

DEVOIR N1 DU 1ER SEMESTRE

Vendredi 09 Novembre 2012

Durée : 3 H

Exercice 1: 4 points

Soit la fonction $g : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \tan x$

- 1) Montrer que g est bijective.
- 2) On note Arctan la bijection réciproque de g (Arctan est la fonction arc-tangente).
 - a) Démontrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - b) En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R}^*,$ on a : $\text{Arctan} x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2: 5 points

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, ($a < b$), et telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

On suppose de plus qu'il existe un réel $k \in]0; 1[$ tel que, $\forall x \in]a, b[$, on ait $|f'(x)| \leq k$.

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[a, b]$.
- 2) On définit une suite (X_n) par la donnée de $X_0 \in [a, b]$ et par la relation de récurrence $X_{n+1} = f(X_n), \forall n \in \mathbb{N}$.
 - a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in [a, b]$.
 - b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, |X_{n+1} - \alpha| \leq k|X_n - \alpha|$
 - c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n - \alpha| \leq k^n |X_0 - \alpha|$
 - d) La suite (X_n) est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

Exercice 3: 5 points

On considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par : $S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \dots + \frac{3n-2}{5^n} = \sum_{p=1}^n \frac{3p-2}{5^p}$

- 1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,$ on a : $S_{k+1} - S_k = \frac{3k-2}{5^k} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5^{k+1}}$
- 2) En déduire :
 - a) Le sens de variation de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$
 - b) La relation : $S_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} S_n + \frac{3}{20} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$
- 3) Dédire des résultats du 2) que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est majorée.
- 4) Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 4: 6 points

DEVOIR N1 DU 1ER SEMESTRE

Vendredi 09 Novembre 2012

Durée : 3 H

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose la fonction polynôme f_n définie par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$

- 1) Etudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$.
- 2) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$, pour tout $n \geq 2$.
- 3) a) Calculer $f_{n+1}(\alpha_n)$. En déduire que $f_{n+1}(\alpha_n) = f_n(\alpha_n) + (\alpha_n)^{n+1}$.
b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a : $\alpha_n > \alpha_{n+1}$.
- 4) a) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente et que $\alpha_n \leq 0,7$, $\forall n \geq 2$.
b) Montrer que, $\forall x \neq 1$, on a : $f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 2$
c) En déduire que, $\forall n \geq 2$, on a : $2\alpha_n - 1 = (\alpha_n)^{n+1}$
d) Montrer que $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ converge vers $\frac{1}{2}$.