Chap 3 : APPLICATIONS AFFINES

I- Applications affines

a°) Définition

a et b sont deux nombres réels donnés. Une application affine définie de **IR** dans **IR** est une application, qui, à tout nombre réel x associe le nombre réel $ax + b$.
Si on la désigne par f, alors, on la notera :

$$f : \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto ax + b$$

- ✓ a est le coefficient de l'application affine.
- ✓ b est l'ordonnée à l'origine (lorsque $= 0$)
- ✓ $ax + b$ ou $f(x)$ est l'image de x.
- ✓ La variable x est l'antécédent de $f(x)$.

L'expression simplifiée de f est $f(x) = ax + b$.

Exemples :

$f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -3x + 5$ sont des applications affines.
Pour l'application affine f : $a = 2$ et $b = -1$.
Pour l'application affine g : $a = -3$ et $b = 5$

Contre-exemples :

$h(x) = 2x^2 + 5$ et $t(x) = \frac{2}{x} + 5$ ne sont pas des applications affines. Pour l'une, la variable x est élevée au carré, pour l'autre, la variable x est un dénominateur.

b°) Calcul d'image

Exemple :

On donne l'application affine f définie par $f(x) = -2x + 5$
Calcule l'image de chacun des réels suivants : 1 ; 3 ; -5 ; 0 ; 0,5 ; $\frac{1}{4}$.

Correction (guidée)

- ✓ Image de 1 : $f(1) = -2(1) + 5 = -2 + 5 = 3$. L'image de 1 est 3.
- ✓ Image de 3 : $f(3) = -2(3) + 5 = -6 + 5 = -1$. L'image de 3 est -1.
- ✓ Image de -5 : $f(\cdots\cdots) = -2(\cdots\cdots) + 5 = \cdots\cdots + 5 = \cdots\cdots$. L'image $\cdots\cdots\cdots\cdots$
- ✓ Image de 0 : $f(\cdots\cdots) = -2(\cdots\cdots) + 5 = \cdots\cdots + 5 = \cdots\cdots$. L'image$\cdots\cdots\cdots\cdots$

c°) Calcul d'antécédent

Exemple : On donne l'application affine g définie par $g(x) = \frac{1}{2}x - 4$
Calcule l'antécédent de chacun des réels -1 ; -6 ; 5 et 0.

Correction (guidée)

- ✓ **Antécédent de -1 :**

$g(x) = -1$ *équivaut* à $\frac{1}{2}x - 4 = -1$. Résous cette équation pour trouver x. La valeur trouvée est l'antécédent de -1.

✓ **Antécédent de** -6 :

$g(x) = -6$ $\quad$ *équivaut* à $\frac{1}{2}x - 4 = -6$. Résous cette équation pour trouver x. La valeur trouvée est l'antécédent de -6.

✓ **Antécédent de** 5 :

$g(x) = 5$ $\quad$ *équivaut* à $\frac{1}{2}x - 4 = 5$. Résous cette équation pour trouver x. La valeur trouvée est l'antécédent de -6.

✓ **Antécédent de** 0 :

$g(x) = 0$ $\quad$ *équivaut* à $\frac{1}{2}x - 4 = 0$. Résous cette équation pour trouver x. La valeur trouvée est l'antécédent de 0.

d°) <u>Détermination de l'expression d'une application affine</u>.

1er cas : connaissant les images de deux réels

Exemple : Soit f l'application affine d'expression générale $f(x) = ax + b$

Détermine les réels a et b tels que $f(3) = 9$ et $f(2) = 2$.

Proposition de démarche :

<u>Calcul du coefficient</u> a.

$a = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{9-2}{1} = \frac{7}{1} = 7$; $f(x) = ax + b$ devient $f(x) = 7x + b$

<u>Calcul de l'ordonnée</u> b.

$b = f(x) - ax$; Comme $a = 7$ donc $\boldsymbol{b = f(x) - 7x}$

Comme b est constant, donc on peut le calculer avec $f(3) = 9$ ou avec $f(2) = 2$.

Il vient :

$b = f(3) - 7(3) = 9 - 21 = -12$ $\qquad$ ou $\qquad$ $b = f(2) - 7(2) = 2 - 14 = -12$

Réponse attendue : $a = 7$; $b = -12$ et $f(x) = 7x + (-12) = 7x - 12$

2eme cas : connaissant le coefficient et l'image d'un réel

Exemple :

Soit f l'application affine définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + b$. Détermine le réel b tel que $f(2) = 7$.

Proposition de démarche

$f(x) = \frac{1}{2}x + b$ $\quad$ donc $\quad$ $b = f(x) - \frac{1}{2}x$ en transposant $\frac{1}{2}x$

Comme $f(2) = 7$ donc $b = f(2) - \frac{1}{2}(2) = 7 - \frac{1}{2}(2) = 7 - 1 = 6$

Réponse attendue : $b = 6$ et $f(x) = \frac{1}{2}x + 6$

3eme cas : connaissant l'ordonnée et l'image d'un réel

Exemple :

Soit f l'application affine définie par $f(x) = ax + 12$. Détermine le réel a tel que $f(-1) = 7$.

Proposition de démarche

$f(x) = ax + 12$ donc $a = \frac{f(x)-12}{x}$

Il vient : $a = \frac{f(-1)-12}{-1} = \frac{7-12}{-1} = \frac{-5}{-1} = 5$;

Réponse attendue : $a = 5$ et $f(x) = 5x + 12$

e) Représentation graphique dans un repère orthonormé

Propriété admise : *La représentation graphique d'une application affine est une droite.*

Exemple :

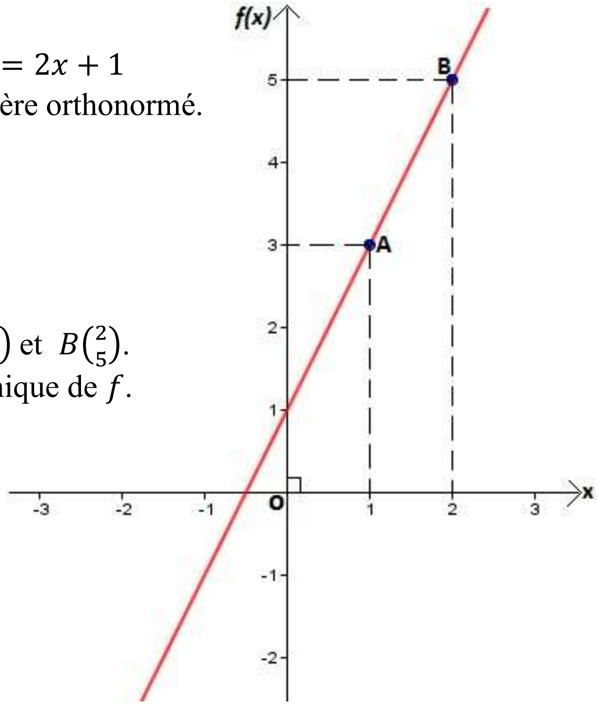
Soit f l'application affine définie dans IR par $f(x) = 2x + 1$
Donne la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

Proposition de démarche

Etablir un tableau de valeurs :

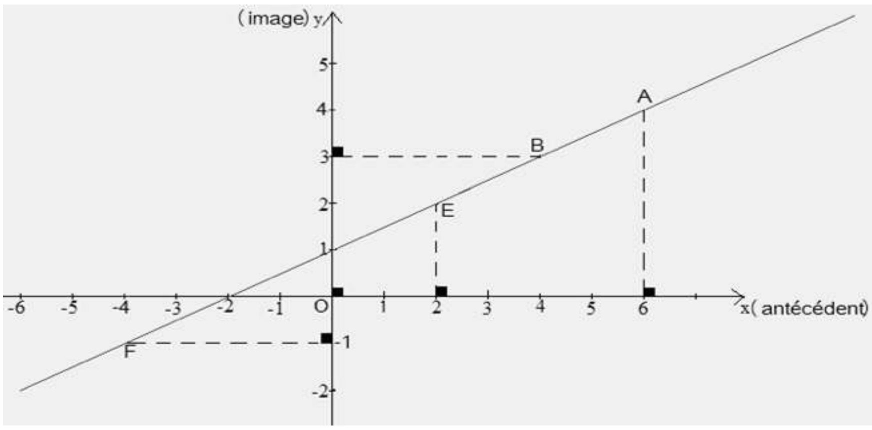
x	1	2
$f(x)$	3	5

Dans un repère orthonormé, on place les points $A\binom{1}{3}$ et $B\binom{2}{5}$.
Trace la droite (AB), elle est la représentation graphique de f.



f°) Détermination d'image et d'antécédent par la méthode graphique :

Dans le repère ci-dessous, la droite (d) est la représentation graphique d'une application affine.



Dans ce repère :

- ✓ L'abscisse de E est 2. Trouve son ordonnée en projetant sur l'axe des ordonnées. Le nombre trouvé est ⋯⋯⋯ ; c'est l'image de 2.
- ✓ L'ordonnée de B est 3. Trouve son abscisse en projetant sur l'axe des abscisses. Le nombre trouvé est ⋯⋯⋯ ; c'est l'antécédent de 3.
- ✓ L'abscisse de A est 6. Trouve son ordonnée en projetant sur l'axe des ordonnées. Le nombre trouvé est ⋯⋯⋯ ; c'est l'image de 6.
- ✓ L'ordonnée de F est ⋯⋯ En projetant sur l'axe des abscisses on trouve ⋯⋯⋯donc ⋯⋯ est l'⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ de ⋯⋯

II- Applications affines par intervalles

a) Application constante et application constante par intervalles

Définition :

k est un nombre réel fixe.

Une application constante définie de **IR** dans **IR** est une application qui, à tout nombre réel x associe le nombre réel constant k.

Si h désigne cette application, on la notera :

$$h : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto k$$

L'expression simplifiée de h est : $h(x) = k$

Exemple 1:

Soit h l'application constante définie par $h(x) = 2$

1. Calcule les images des réels 0 ; $2; -1; 3; -2$.
2. Donne la représentation graphique de h.

Correction :

1.

Image de 0 : $h(0) = 2$; image de 2 : $h(2) = 2$; image de -1 : $h(-1) = 2$

Image de : -2 : $h(-2) = 2$; image de 3 : $h(3) = 2$;

On remarque le même résultat partout. Cela signifie que tous les réels ont la même image par l'application constante h.

2.

NB : la représentation graphique d'une application constante $h(x) = k$ est une droite qui passe par l'ordonnée k parallèlement à l'axe des abscisses.

La représentation graphique de $h(x) = 2$ est la droite qui passe par l'ordonnée $y = 2$ et qui est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple 2 :

Soit f l'application constante par intervalles définie par :

$f(x) = 1$ si $x \in [-2; 0[$; $f(x) = 2$ si $x \in [0; 3[$; $f(x) = 5$ si $x \in [3; 5[$

L'application f est définie sur trois intervalles. On dit de ce fait que f est une application constante par intervalles.

Pour calculer l'image d'un réel par f, il faut au préalable le situé dans son intervalle.

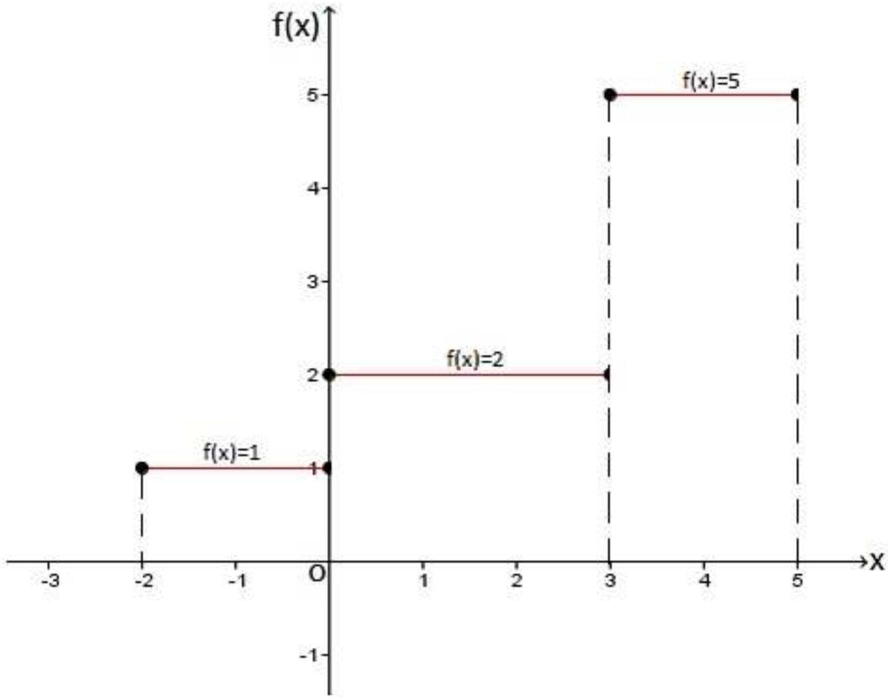
1. Calcule les images des réels 0 ; 4 ; -1.
2. Représente f.

Correction :

1. Calcul des images.

Image de 0 : $0 \in [0; 3[$ — $f(0) = 2$; image de 4 : $4 \in [3; 5[$ — $f(4) = 5$; image de -1 : $-1 \in [-2; 0[$ — $f(-1) = 1$

2. Représentation graphique de f.



b) <u>Application du type</u> : $f(x) = |ax + b|$

Exemple : Soit f l'application affine définie par $f(x) = |-2x + 6|$.

1. Ecris f sans les symboles de la valeur absolue.
2. Représente graphiquement f dans un repère orthonormé.

Proposition de démarche

1.

- D'abord, on pose $-2x + 6 = 0$. En résolvant cette équation on trouve $x = 3$.
- Ensuite on établit un tableau des signes :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x+6$	Signe contraire de – 2 ici $+$	0	Signe de– 2 ici $-$
$\lvert -2x+6 \rvert$	$+(-2x+6) = -2x+6$	0	$-(-2x+6) = +2x-6$

- Enfin, on extrait les expressions de f sans les symboles de la valeur absolue :

  f présente deux expressions sans les valeur absolues. Il s'agit de :

  l'expression $f(x) = -2x + 6$ définie dans l'intervalle $]-\infty; 3]$ et

  l'expression $f(x) = +2x - 6$ définie dans l'intervalle $[3; +\infty[$

Ces deux expressions sans les valeurs absolues, définissent f comme étant une application affine par intervalles.

2.

On établit un tableau de valeurs pour chaque expression. On tiendra compte des intervalles. Les choix arbitraires sur les valeurs à donner à x doivent se faire dans les intervalles concernés.

Dans l'intervalle $]-\infty\,;3]$

$f(x) = -2x + 6$

x	3	2
$f(x)$	0	2

Dans l'intervalle $[3\,;\,+\infty[$.

$f(x) = 2x - 6$

x	3	4
$f(x)$	0	2

Dans un repère orthonormé, on place les points $A\binom{3}{0}$; $B\binom{2}{2}$ et $C\binom{4}{2}$. En traçant les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, on obtient la représentation graphique de f. (voir figure)