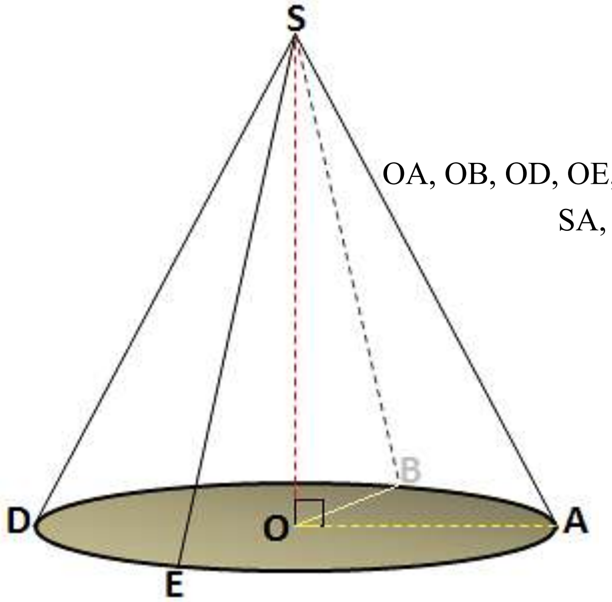
# Chap 6 : GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

## Leçon 1 : CÔNE

## I. Cône de révolution

### A°) Présentation et définition



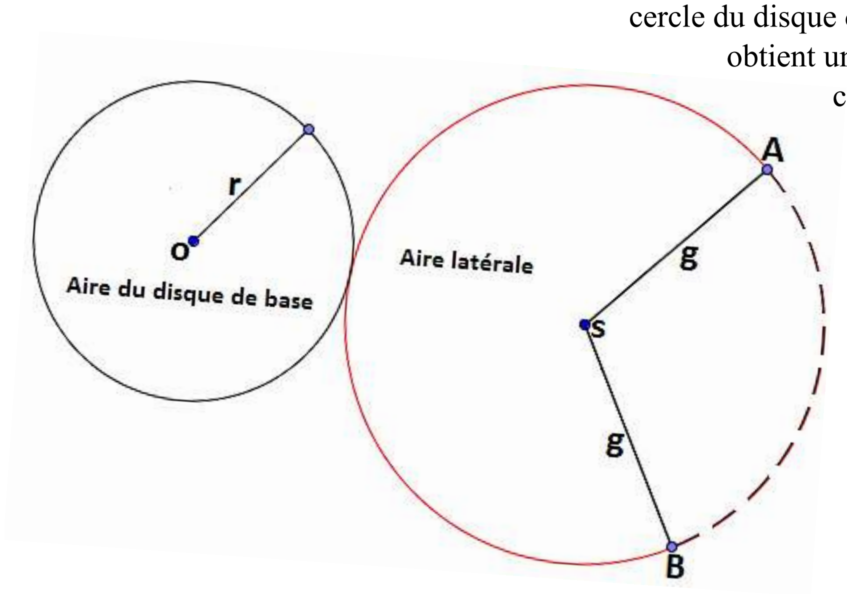

Le solide ci-contre est un cône de révolution ;
Le point S est le sommet de ce cône de révolution ;
SO est la hauteur de ce cône, on note h=SO ;
O est le centre du disque de base ;
OA, OB, OD, OE, … sont des rayons **r** du disque de base de ce cône ;
SA, SB, SD, SE, …, sont des génératrices **g** de ce cône ;
La droite (OS) est l'axe de rotation de ce cône ;

Tout segment obtenu, en reliant S à un point du cercle du disque de base est une génératrice g, et : $g^2 = h^2 + r^2$
Compte tenu du théorème de Pythagore.

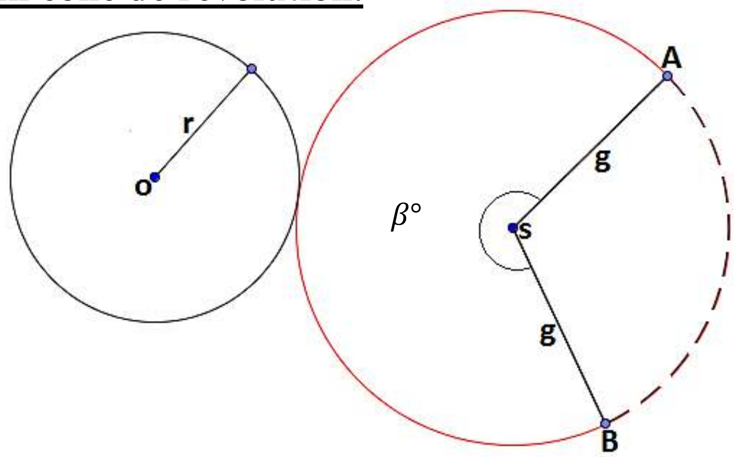
**Définition :** un cône est dit cône de révolution :
- ✓ Si sa base est un disque circulaire de centre O et de rayon r.
- ✓ Sa hauteur passe par son sommet et est perpendiculaire au plan du disque de base en O.

### B)° Patron d'un cône.

Lorsqu'on détache suivant une génératrice puis suivant le cercle du disque de base le solide(cône), on obtient une représentation plane qui constitue le patron du cône.



## C°) Aire d'un cône de révolution.




La longueur du grand arc $\widehat{AB}$ est égale au périmètre du cercle disque de base de rayon r.

- ✓ Périmètre du disque de base : $P_B = 2 \times \pi \times r$
- ✓ Longueur de l'arc AB : $L_{AB} = g \times \beta°$ ( $\beta°$ *doit être converti en radian*)

Conversion de $\beta°$ en radian :

$360° \to 2\pi$ donc $\beta° \to \frac{2\pi\times\beta°}{360°}$ ; ''compte tenu de l'application de la règle de trois''

Il vient : $L_{AB} = g \times \frac{2\pi\times\beta°}{360°}$

L'égalité entre le périmètre du disque de base et la longueur de l'arc AB permet d'établir l'expression du rayon r du disque de base ou de la génératrice g du cône ou de l'angle $\beta°$ou le rapport $\frac{r}{g}$.

Il vient :

$P_B = L_{AB}$ équivaut à $2 \times \pi \times r = g \times \frac{2\pi\times\beta°}{360°}$ équivaut à :

$$\boxed{r = \frac{\beta°}{360°} \times g \quad \text{ou} \quad g = \frac{360°}{\beta°} \times r \quad \text{ou} \quad \beta° = \frac{r\times 360°}{g} \quad \text{ou} \quad \frac{r}{g} = \frac{\beta°}{360°}}$$

## D°) Aire latérale du cône de révolution

360° occupe une aire égale à $\pi \times g^2$ ; $\beta°$ occupera une aire $A_L$ égale à $\frac{\pi\times g^2\times\beta°}{360°}$. L'aire latérale d'un cône de révolution a donc pour formule :

$$\boxed{A_L = \frac{\pi \times g^2 \times \beta°}{360°}}$$

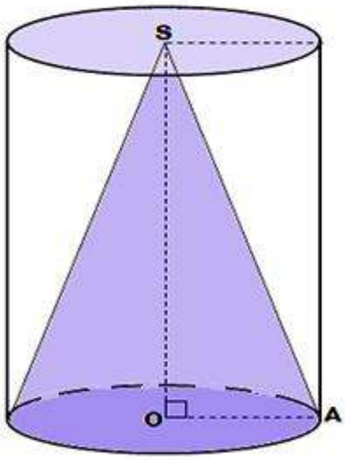
Remplaçons $\beta° = \frac{360°\times r}{g}$ dans $A_L = \frac{\pi\times g^2\times\beta°}{360°}$.

Il vient : $A_L = \frac{\pi\times g^2\times\beta°}{360°} = \frac{\pi\times g^2\times\frac{360°\times r}{g}}{360°} = \pi \times r \times g$ or $\pi \times r = \frac{P_B}{2}$.

$$\boxed{\text{Donc} \quad A_L = \pi \times r \times g \quad \text{ou} \quad A_L = \frac{P_B}{2} \times g}$$

**E°) Aire totale du cône de révolution :** L'aire totale d'un cône de révolution est égale à la somme de son aire de base et de son aire latérale : $A_T = A_B + A_L$

## II. Volume d'un cône de révolution.




La figure ci-contre est constituée :
D'un cylindre de rayon $r = OA$ et de hauteur $h = OS$.
D'un cône de révolution de même hauteur et de même
Rayon que le cylindre.
En utilisant ce cône pour remplir le cylindre d'eau,
On constatera que le cylindre est plein après trois versements.
Dans ces conditions, le volume du cylindre
est égal à trois fois celui du cône. **Il vient :**

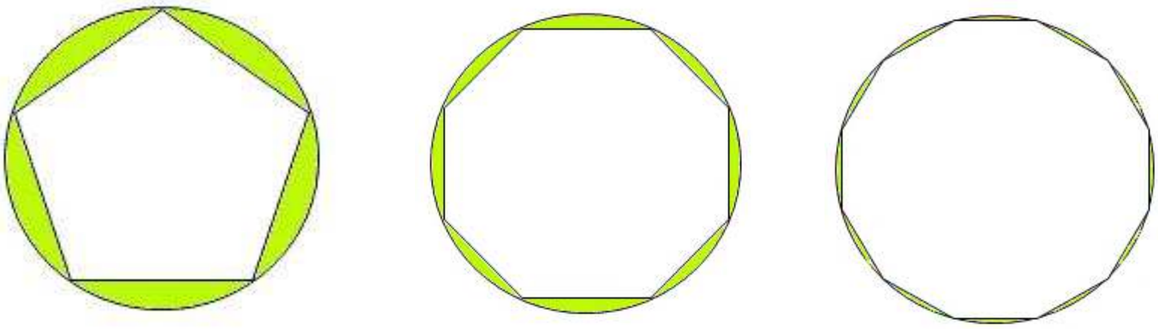
$V_{cylindre} = 3 \times V_{cône}$

$V_{cône} = \frac{1}{3} \times V_{cylindre}$ or $V_{cylindre} = \pi \times r^2 \times h$ donc $V_{cône} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h$

Comme $\pi \times r^2$ est l'aire du disque de base, donc $V_{cône} = \frac{1}{3} \times A_B \times h$

Le volume d'un cône de révolution a pour formule : $V = \frac{1}{3} \times A_B \times h$

**Autre méthode**



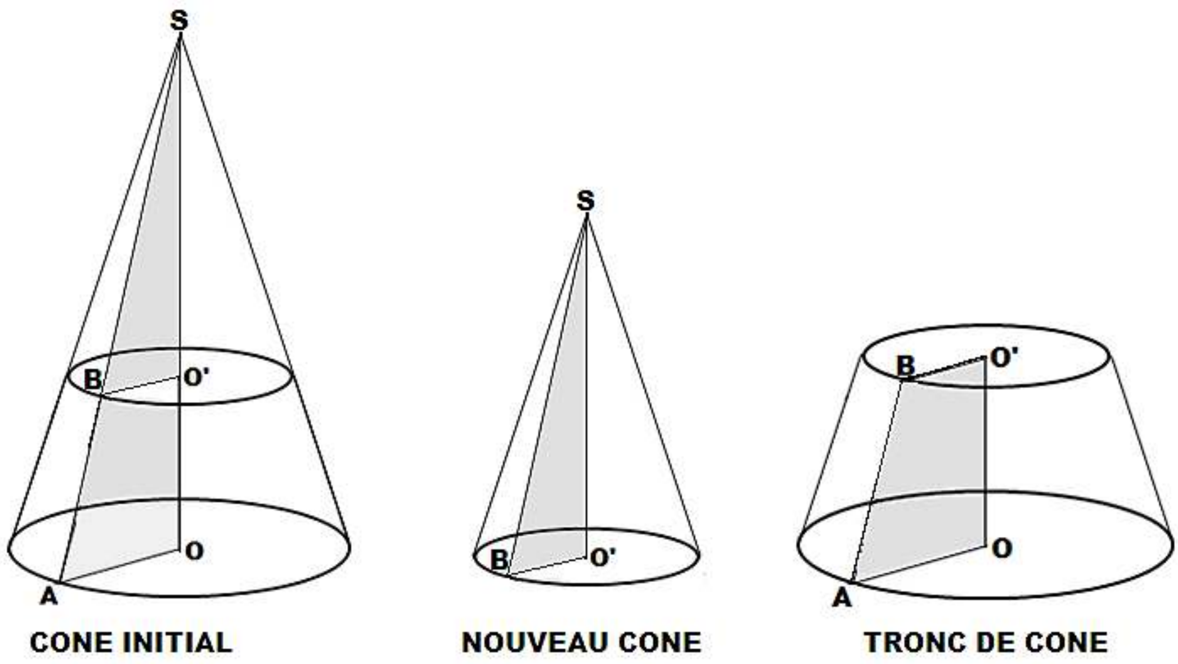
Dans les trois figures ci-dessus, les polygones sont réguliers et représentent des bases de pyramides régulières. Les cercles circonscrits à ces polygones représentent des bases de cônes de révolution. Quand le nombre de côtés du polygone augmente, le cercle du disque de base du cône de révolution se rapproche et se confond progressivement au polygone. Cette observation permet de conclure que le volume du cône de révolution se calcule de la même manière que celui d'une pyramide régulière. (Voir leçon suivante).

$$V = \frac{1}{3} \times A_B \times h \text{ avec } A_B = \pi \times r^2$$

## III. Section d'un cône de révolution par un plan parallèle au plan de sa base – coefficient de réduction.

### 1. Section d'un cône de révolution

Quand on sectionne un cône par un plan parallèle au plan de sa base, on obtient deux solides : le cône réduit (nouveau cône) et le tronc de cône.




$OA = r\ ;\ \ SO = h\ \ \ ;\ SB = g'\ ;\ \ O'B = r'\ ;\ \ SO' = h'\ \ ;\ \ OA = r\ \ ;\ OO' = h''\ ;\ \ SA = g$

## 2. Coefficient de réduction $k$

Les points S, B et A d'une part et S, O' et O d'autre part sont alignés dans leur ordre d'écriture. Les triangles SOA et SO'B sont en position de Thalès car $(OA)//(O'B)$. Il vient d'après la conséquence du théorème de Thalès : $\frac{SO'}{SO} = \frac{SB}{SA} = \frac{O'B}{OA}$.

Les rapports $\frac{SO'}{SO}$ ; $\frac{SB}{SA}$ et $\frac{O'B}{OA}$ définissent le coefficient de réduction du cône initial. Ce coefficient est plus généralement noté par la lettre $k$. Ainsi on a :

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{h'}{h} \quad \text{ou} \quad k = \frac{SB}{SA} = \frac{g'}{g} \quad \text{ou} \quad k = \frac{O'B}{OA} = \frac{r'}{r}$$

### a. Détermination de $k$ avec les périmètres de base

Périmètre de base du cône initial : $P_b = 2 \times \pi \times r$
Périmètre de base du cône réduit : $P'_b = 2 \times \pi \times r'$

$$\frac{P'_b}{P_b} = \frac{2 \times \pi \times r'}{2 \times \pi \times r} = \frac{r'}{r} \quad or \quad \frac{r'}{r} = \frac{O'B}{OA} = k \quad donc \quad \frac{P'_b}{P_b} = k$$

Avec les périmètres de base, le coefficient de réduction est : $k = \frac{P'_b}{P_b}$

### b. Détermination de $k$ avec les aires

Aire du disque de base du cône initial : $A_b = \pi \times r^2$
Aire du disque de base du cône réduit : $A'_b = \pi \times r'^2$
Aire latérale du cône initial : $A_L = \pi \times r \times g$
Aire latérale du nouveau cône : $A'_L = \pi \times r' \times g'$

$$\frac{A_b'}{A_b} = \frac{\pi \times r'^2}{\pi \times r^2} = \frac{r'^2}{r^2} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \quad or \quad \frac{r'}{r} = k \quad donc \quad \frac{A_b'}{A_b} = k^2 d'où \quad k = \sqrt{\frac{A_b'}{A_b}}$$

$$\frac{A_L'}{A_L} = \frac{\pi \times r \times g'}{\pi \times r \times g} = \frac{r' \times g'}{r \times g} = \frac{r'}{r} \times \frac{g'}{g} \quad or \quad \frac{r'}{r} = k \quad et \quad \frac{g'}{g} = \frac{SB}{SA} = k \quad donc$$

$$\frac{A_L'}{A_L} = k \times k = k^2 \quad d'où \quad k = \sqrt{\frac{A_L'}{A_L}}$$

Avec les aires, le coefficient de réduction $k$ est tel que : $k^2 = \frac{A_b'}{A_b}$ ou $k^2 = \frac{A_L'}{A_L}$

### c. Détermination de $k$ avec les volumes

Volume du cône initial : $V = \frac{1}{3} \times A_b \times h$ ; Volume du cône réduit : $V' = \frac{1}{3} \times A_b' \times h'$

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3} \times A_b' \times h'}{\frac{1}{3} \times A_b \times h} = \frac{A_b' \times h'}{A_b \times h} = \frac{A_b'}{A_b} \times \frac{h'}{h} \quad \text{or} \quad \frac{A_b'}{A_b} = k^2 \quad \text{et} \quad \frac{h'}{h} = \frac{SO'}{SO} = k$$

**Donc :**

$$\frac{V'}{V} = k^2 \times k = k^3 \quad d'où \quad k^3 = \frac{V'}{V}$$

Avec les volumes, le coefficient de réduction $k$ est tel que : $k^3 = \frac{V'}{V}$

## 3. Aire et volume du tronc de cône

Le tronc de cône de révolution présente deux bases : la grande base (GB) de centre O et de rayon $r$ et la petite base (PB) de centre O' et de rayon $r'$.
Sa hauteur est $h'' = OO'$.

- ✓ Son aire latérale $A_L''$ est : $A_L'' = A_L - A_L' = A_L - k^2 \times A_L = (1 - k^2) \times A_L$
- ✓ Son volume $V''$ est : $V'' = V - V' = V - k^3 \times V = (1 - k^3) \times V$
- ✓ L'aire de sa GB est : $A_{GB} = \pi \times r^2$
- ✓ L'aire de sa PB est : $A_{PB} = \pi \times r'^2$
- ✓ Son aire totale est : $A_T = A_{GB} + A_{PB} + A_L''$