Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433

Chap 6 : TRANSFORMATION DU PLAN

I. Etude de deux symétries orthogonales successives d'axes parallèles

Activité :

Soit un plan (P); (D) et (D') deux droites parallèles dans (P) et M un point de (P).

a. Construis le point M' symétrique orthogonal de M par rapport à (D).

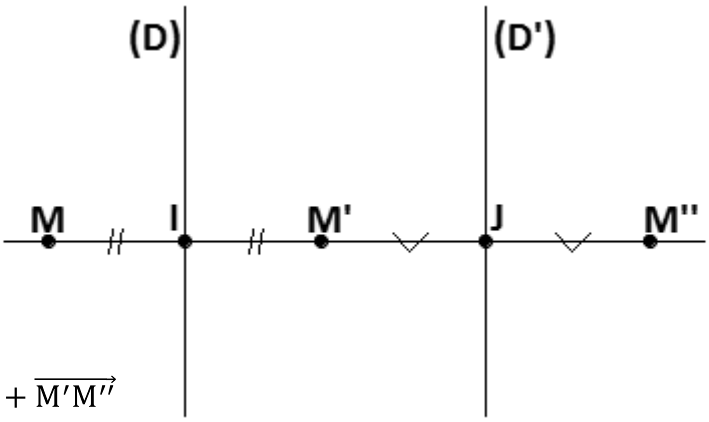
b. Construis le point M'' symétrique orthogonal de M' par rapport à (D').

c. Soit I le milieu du segment $[\mathrm{MM'}]$ et J celui de $[\mathrm{M'M''}]$.

Montre que $\overrightarrow{\mathrm{MM''}} = 2\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$.(penser à la relation de CHASLES)

Correction

a. Voir figure



b. Voir figure

c. $\overrightarrow{\mathrm{MM''}} = \overrightarrow{\mathrm{MM'}} + \overrightarrow{\mathrm{M'M''}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{MM''}} + \overrightarrow{\mathrm{MM''}}$

$= 2\overrightarrow{\mathrm{IM'}} + 2\overrightarrow{\mathrm{M'J}} = 2\left(\overrightarrow{\mathrm{IM'}} + \overrightarrow{\mathrm{M'J}}\right) = 2\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ compte tenu de la relation de Chasles

$\overrightarrow{\mathrm{MM''}} = 2\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$

- ✓ Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ est un vecteur constant. Il est indépendant du point M.
- ✓ Sa direction est la perpendiculaire aux droites (D) et (D').
- ✓ Son sens est de (D) vers (D').
- ✓ Sa longueur ou norme est la distance entre les droites (D) et (D').

> L'action successive deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation de vecteur constant.
> **NB** : *l'image A' d'un point A par la symétrie orthogonale d'axe (D) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (D') lorsque (D) et (D') sont parallèles, est une translation de vecteur* $2\overrightarrow{IJ}$ *définie par* $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{IJ}$. *Avec IJ la distance de (D) à (D').*

Exemple : (d) et (d') sont deux droites parallèles dans un plan (P) ; A, M et Q sont trois points quelconques de (P). $a = IJ = 3cm$ est la distance séparant les droites (d) et (d').
Construis les points B, N et P images respectives des points A, M et Q par la symétrie orthogonale d'axe (d) suivi de la symétrie orthogonale d'axe (d').

Proposition de démarche :

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IJ}$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont la même direction, le même sens et $AB = 6cm$

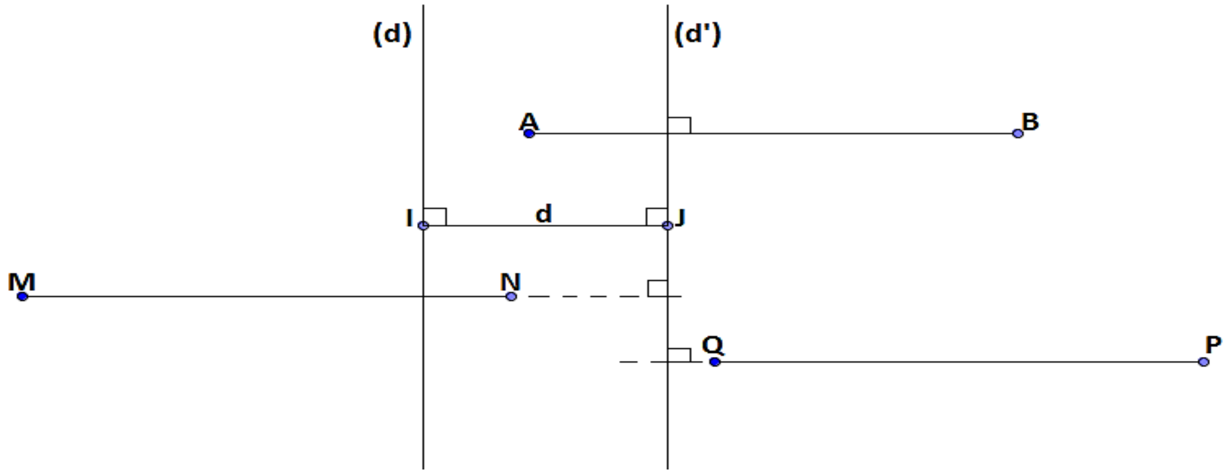
$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = 2\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$: les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont la même direction, le même sens et $MN = 6cm$

$\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{IJ}$: l es vecteurs $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont la même direction, le même sens et $QP = 6cm$

www.groupe-excellence.sn

Télécharger à www.groupe-excellence.sn

Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433



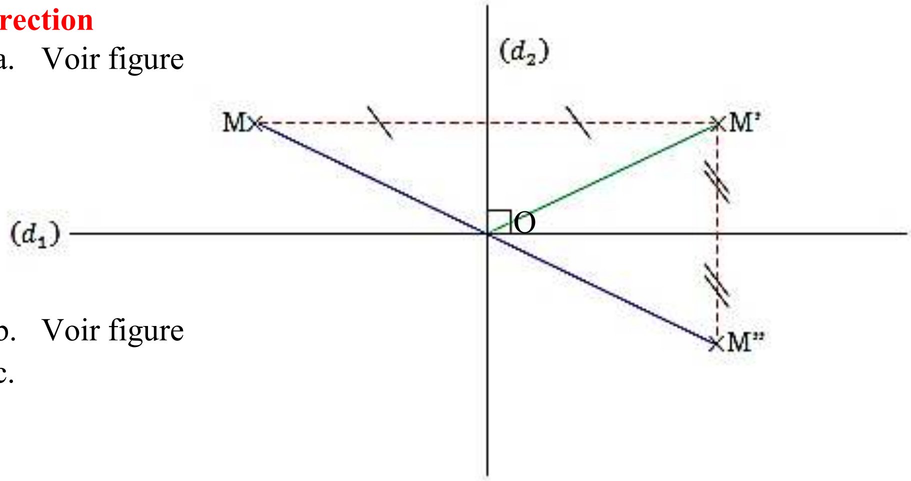
II. Etude de deux symétries orthogonales successives d'axes perpendiculaires.

Activité : Soit un plan (P) ; (d_1) et (d_2) deux droites perpendiculaires en O dans (P)et M un point de (P).

a. Construis le point M' symétrique de M par rapport à (d_2).
b. Construis le point M'' symétrique de M' par rapport à (d_1).
c. Montre que O est le milieu du segment $[MM'']$.

Correction

a. Voir figure



b. Voir figure
c.

M' symétrique de M par rapport à (d_2), donc (d_2) est la médiatrice du segment $[\mathrm{MM'}]$ et $(d_2) \perp (\mathrm{MM'})$. Comme $\mathrm{O} \in (d_2)$ donc $\mathrm{OM} = \mathrm{OM'}$.

M'' symétrique de M' par rapport à (d_1), donc (d_1) est la médiatrice du segment $[\mathrm{M'M''}]$ et $(d_1) \perp (\mathrm{M'M''})$. Comme $\mathrm{O} \in (d_1)$donc $\mathrm{OM'} = \mathrm{OM''}$.

On en déduit de ce qui précède que O est le centre du cercle circonscrit au triangle MM'M'' rectangle en M'. Les points M, O et M'' sont donc alignés et O est le milieu du segment $[\mathrm{MM''}]$ d'où M'' est le symétrique de M par rapport à O.

L'action successive de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires en O est une symétrie centrale de centre O.

NB : *l'image A' d'un point A par la symétrie orthogonale d'axe (D) suivie de la symétrie orthogonale d'axe (D') lorsque (D) et (D') sont perpendiculaire en O est une symétrie centrale de centre O.*

www.groupe-excellence.sn

Télécharger à www.groupe-excellence.sn

Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433

III. Etude de deux symétries orthogonales successives d'axes sécants et non perpendiculaires.

Activité :

Soit un plan (P) ; (d) *et* (d')deux droites sécantes et non perpendiculaires en O dans (P) et M un point de (P).

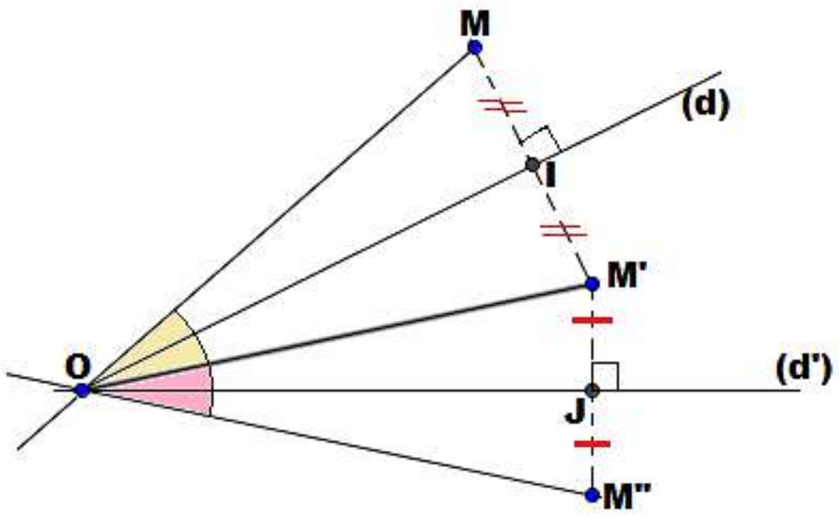
a. Construis le point M' symétrique orthogonal de M par rapport à (d) puis marque le point I milieu du segment $[MM']$.

b. Construis le point M'' symétrique orthogonal de M' par rapport à (d') puis marque le point J milieu du segment $[M'M'']$.

c. On pose $\widehat{IOJ} = \beta$. Montre que $\widehat{MOM''} = 2\beta$

Correction

a. Voir figure



b. Voir figure

c.

M' symétrique orthogonal de M par rapport à (d), donc (d) est la médiatrice du segment $[MM']$. Comme $O \in (d)$ donc $OM = OM'$ d'où OMM' est un triangle isocèle en O. Etant médiatrice passant par le sommet principal O du triangle isocèle OMM', (d) est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$d'où $\widehat{MOI} = \widehat{IOM'}$.

De même $\widehat{M'OJ} = \widehat{JOM''}$

$\widehat{MOM''} = \widehat{MOM'} + \widehat{M'OM''} = 2\widehat{IOM'} + 2\widehat{M'OJ} = 2\left(\widehat{IOM'} + \widehat{M'OJ}\right) = 2\widehat{IOJ} = 2\beta$

> L'action successive de deux symétries orthogonales d'axes sécants et non perpendiculaires et une rotation d'angle 2β.
>
> **NB :** On a deux types de rotations dans le plan: la rotation suivant les aiguilles d'une montre (sens horaire). La rotation dans le sens opposé (sens anti horaire).

Exemple : (d) et (d') sont deux droites sécantes et non perpendiculaires en I dans un plan (P) ; A, M sont deux points quelconques de (P). $\widehat{IOJ} = 40°$ est l'angle formé entre les droites (d) et (d'). Construis les points B et N images respectives des points A et M par la symétrie orthogonale d'axe (d) suivi de la symétrie orthogonale d'axe (d').

www.groupe-excellence.sn

Télécharger à www.groupe-excellence.sn

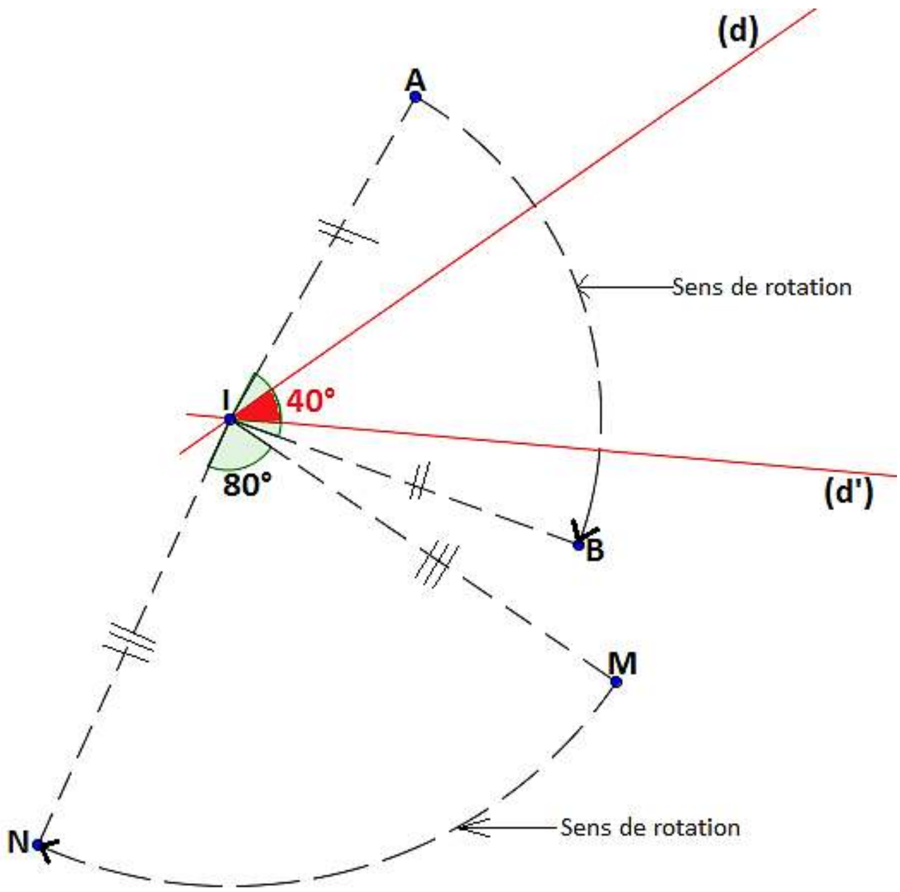
Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433

www.groupe-excellence.sn

Correction

On trace en pointillés le segment $[IA]$ puis on construit le point B tel que l'angle $\widehat{AIB} = 80°$ et $IA = IB$.

On trace en pointillés le segment $[IM]$ puis on construit le point N tel que l'angle $\widehat{MIN} = 80°$ et $IM = IN$. On tiendra compte du sens de rotation.



IV. Etude de deux translations successives de vecteurs.

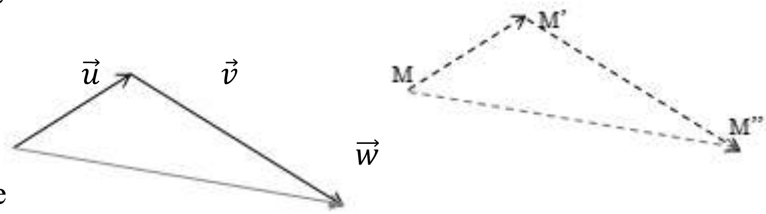
Activité :

Soit deux vecteurs du plan (P) et M un point de (P).

a. Construis le point M' image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.
b. Construis le point M'' image de M' par la translation de vecteur $\vec{v}$.
c. Construis le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$
d. Trace le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM''}}$. Vérifie que $\overrightarrow{\mathrm{MM''}}$ et $\vec{w}$ ont la même direction, le même sens et la même longueur.
e. Montre que $\overrightarrow{\mathrm{MM''}}$ et $\vec{w}$ sont égaux.

Correction

a. Voir figure



b. Voir figure

Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433

c. Voir figure

d. Voir figure. Vérification à l'aide de la règle, de l'équerre et du compas.

e.

- ✓ $t_{\vec{u}}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- ✓ $t_{\vec{v}}(M') = M''$ équivaut à $\overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$.
- ✓ $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\mathrm{MM}''} = \vec{w}$.
- ✓ $\overrightarrow{\mathrm{MM}''} = \vec{w}$ donc M'' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

L'action successive de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ suivi de $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

NB : *l'image A' d'un point A par la translation successive de vecteur $\vec{u}$ suivi de $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ définie par $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}+\vec{v}$.*

Exercice :

1. Dans un plan muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J), place les points $F\binom{2}{3}$, $E\binom{-1}{0}$, $A\binom{2}{0}$ et $G\binom{2}{-3}$.
2. Justifie que GEF est un triangle rectangle isocèle.
3. Justifie que G est le symétrique de F par la symétrie orthogonale d'axe (EA).
4. Détermine l'angle de la rotation de centre E qui applique F sur G.
5. Construis le point M image de G par la rotation de centre E qui applique F sur G.
6. Calcule les coordonnées du point M.

www.groupe-excellence.sn

Télécharger à www.groupe-excellence.sn