

Chap 5 : REPÉRAGE DANS LE PLAN

I. Coordonnées d'un vecteur

A°) Calcul des coordonnées d'un vecteur

A retenir :

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se calculent comme suit :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$$

Exemple :

On donne $H \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $L \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{HL}$.

$$\overrightarrow{HL} \begin{pmatrix} x_L - x_H \\ y_L - y_H \end{pmatrix} = \overrightarrow{HL} \begin{pmatrix} 5 - (-7) \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{HL} \begin{pmatrix} 5 + 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{HL} \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

B°) Calcul des coordonnées du milieu d'un segment

A retenir :

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal, les coordonnées d'un point M milieu du segment [AB] se calculent comme suit :

$$x_E = \frac{x_B + x_A}{2} \quad \text{et} \quad y_E = \frac{y_B + y_A}{2}$$

Exemple :

On donne $A \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal. Calcule les coordonnées du point E milieu de [AD].

$$x_E = \frac{x_D + x_A}{2} = \frac{5 - 7}{2} = -1 \quad \text{et} \quad y_E = \frac{y_D + y_A}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2.5$$

II. Calcul de la distance de deux points

A retenir :

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal. La distance AB est

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple :

On donne les points $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. La distance AB se calcule comme suit :

$$\text{La distance AB est : } AB = \sqrt{(0 - 4)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

III. Propriétés

Propriété 1 : vecteurs égaux

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthogonal.

Si $\vec{u} = \vec{v}$ alors $x = x'$ et $y = y'$.

Si $x = x'$ et $y = y'$ alors $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemple :

Propriété 2 : somme de deux vecteurs

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs dans un repère orthogonal.

Si $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ alors $\vec{w}$ a pour coordonnées $\vec{w} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

Exemple :

Propriété 3 : produit d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormal et k un réel.

Si $\vec{u} = k \times \vec{v}$ alors $x = k \times x'$ et $y = k \times y'$

Si $x = k \times x'$ et $y = k \times y'$ alors $\vec{u} = k \times \vec{v}$

Exemple :

Propriété 4 : vecteurs opposés

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthogonal.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont opposés si et seulement si $x = -x'$ et $y = -y'$.

Exemple :

Propriété 5 : vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthogonal.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $x \times y' - x' \times y = 0$.

Si $x \times y' - y \times x' = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exemple :

Propriété 6 : vecteurs orthogonaux

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthogonal.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $x \times x' + y \times y' = 0$.

Si $x \times x' + y \times y' = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

IV. Equations et représentation d'une droite

1. Equation générale $ax + by + c = 0$

Une équation générale est une équation de la forme $ax + by + c = 0$

1^{er} cas : cas où la droite n'est parallèle ni à $(x'x)$ ni à $(y'y)$.

Exemple :

Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal.

Détermine l'équation cartésienne de la droite (AB).

Proposition de démarche :

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point quelconque de la droite (AB) , les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On calcule leurs coordonnées puis on applique la **Propriété 5** (voir ci-dessus).

$$\overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x-1 \\ y-3 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} 4-1 \\ 7-3 \end{smallmatrix}\right) = \overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM}\left(\begin{smallmatrix} x-1 \\ y-3 \end{smallmatrix}\right) \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB}\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \text{ donc } & 4(x-1) - 3(y-3) = 0 \\ & 4x - 4 - 3y + 9 = 0 \\ & 4x - 3y + 5 = 0 \end{aligned}$$

Réponse attendue :

La droite (AB) a pour équation : $4x - 3y + 5 = 0$. On note $(AB) : 4x - 3y + 5 = 0$

2^{ème} cas : cas où les deux points ont la même abscisse.

Exemple :

Soit $C\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $D\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal et $P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point quelconque de la droite (d) passant par les points C et D . Détermine l'équation de la droite (CD) .

Proposition de démarche :

Soit $P\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point quelconque de la droite (CD) , les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On calcule leurs coordonnées puis on applique la **Propriété 5** (voir ci-dessus).

$$\overrightarrow{CP}\left(\begin{smallmatrix} x-2 \\ y-1 \end{smallmatrix}\right); \quad \overrightarrow{CD}\left(\begin{smallmatrix} 2-2 \\ -3-1 \end{smallmatrix}\right) = \overrightarrow{CD}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP}\left(\begin{smallmatrix} x-2 \\ y-1 \end{smallmatrix}\right) \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{CD}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) \text{ donc } & -4(x-2) - 0(y-1) = 0 \\ & -4x + 8 = 0 \\ & x = 2 \end{aligned}$$

Réponse attendue :

La droite (CD) ou (d) a pour équation : $x = 2$. On note $(CD) : x = 2$ ou $(d) : x = 2$

NB : on remarque que, lorsque deux points ont la même abscisse a , l'équation de la droite passant par ces deux points est $x = a$. La représentation graphique de cette équation est une droite qui passe par le point $(a ; 0)$ parallèlement à l'axe des ordonnées.

3^{ème} cas : cas où les deux points ont la même ordonnée.

Exemple :

Soit $E\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $F\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal et $N\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point quelconque de la droite (Δ) passant par E et F . Détermine l'équation de la droite (EF) .

Proposition de démarche :

Soit $T\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ un point quelconque de la droite (EF) , les vecteurs $\overrightarrow{ET}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires. On calcule leurs coordonnées puis on applique la **Propriété 5** (voir ci-dessus).

$$\overrightarrow{ET}\left(\begin{smallmatrix} x+1 \\ y-3 \end{smallmatrix}\right); \quad \overrightarrow{EF}\left(\begin{smallmatrix} 4+1 \\ 3-3 \end{smallmatrix}\right) = \overrightarrow{EF}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ET}\left(\begin{smallmatrix} x+1 \\ y-3 \end{smallmatrix}\right) \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{EF}\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ donc } & 0(x+1) - 5(y-3) = 0 \\ & -5y + 15 = 0 \\ & y = 3 \end{aligned}$$

Réponse attendue :

La droite (EF) ou (Δ) a pour équation : $y = 3$. On note (EF) : $y = 3$ ou $(\Delta) : y = 3$

NB : on remarque que, lorsque deux points ont une même ordonnée b , l'équation de la droite est $y = b$. La représentation graphique de cette équation est une droite qui passe par le point $(0 ; b)$ parallèlement à l'axe des abscisses.

2. Equation réduite : $y = mx + p$

1^{er} cas : connaissant les coordonnées de deux points

Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$;

$A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points quelconques de (d) tels que $x_A \neq x_B$;

L'équation réduite de la droite (AB) se détermine comme suit :

Comme en application affine, on calcule m et p .

Le coefficient directeur m se calcule comme suit : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ou $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

L'ordonnée à l'origine p est : $p = y - mx$. Elle se calcule avec les coordonnées de A ou avec celles de B une fois que m est trouvé. **Il vient :** $p = y_A - mx_A$ ou $p = y_B - mx_B$

Exemple :

Soit $R \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $T \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux points dans un plan muni d'un repère orthogonal. Détermine l'équation de la droite (RT) .

Proposition de démarche :

$$m = \frac{y_R - y_T}{x_R - x_T} = \frac{5 - 3}{-1 - 4} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5} ; \quad p = y_R - mx_R = 5 - \left(-\frac{2}{5}\right) \times (-1) = 5 - \frac{2}{5} = \frac{23}{5}$$

L'équation réduite de la droite (RT) est : $(RT) : y = -\frac{2}{5}x + \frac{23}{5}$

2^{ème} cas : à partir d'une équation générale (équation cartésienne).

Exemple :

Soit (D) une droite d'équation générale $4x + 2y - 5 = 0$. Etablis l'équation réduite de (D)

Proposition de démarche :

$$4x + 2y - 5 = 0 ; \quad 2y = -4x + 5 ; \quad y = -\frac{4x}{2} + \frac{5}{2} = -2x + 2.5$$

$y = -2x + 2.5$ est l'équation réduite de (D) , on note $(D) : y = -2x + 2.5$

V. Positions relatives de deux droites d'équations données

Soit deux droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = m_1x + p$ et $y = m_2x + p'$.

- ✓ Si $m_1 = m_2$ alors, les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles
- ✓ Si les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles alors, $m_1 = m_2$
- ✓ Si $m_1 \times m_2 = -1$ alors, les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires
- ✓ Si les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires alors, $m_1 \times m_2 = -1$
- ✓ Si $m_1 \neq m_2$ et $m_1 \times m_2 \neq -1$ alors, les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes et non perpendiculaires.

VI. Vecteur directeur et représentation graphique d'une droite

A°) Vecteur directeur

Exemple 1 : cas d'une équation générale.

On donne la droite $(d) : ax + by + c = 0$ où a , b et c sont des réels.

$\vec{u}(-b; a)$ est vecteur directeur de la droite (d) .

Exemple 2 : cas d'une équation réduite.

On donne la droite $(D) : y = mx + p$ où m et p sont des réels.

$\vec{u}(1; m)$ est vecteur directeur de la droite (D) .

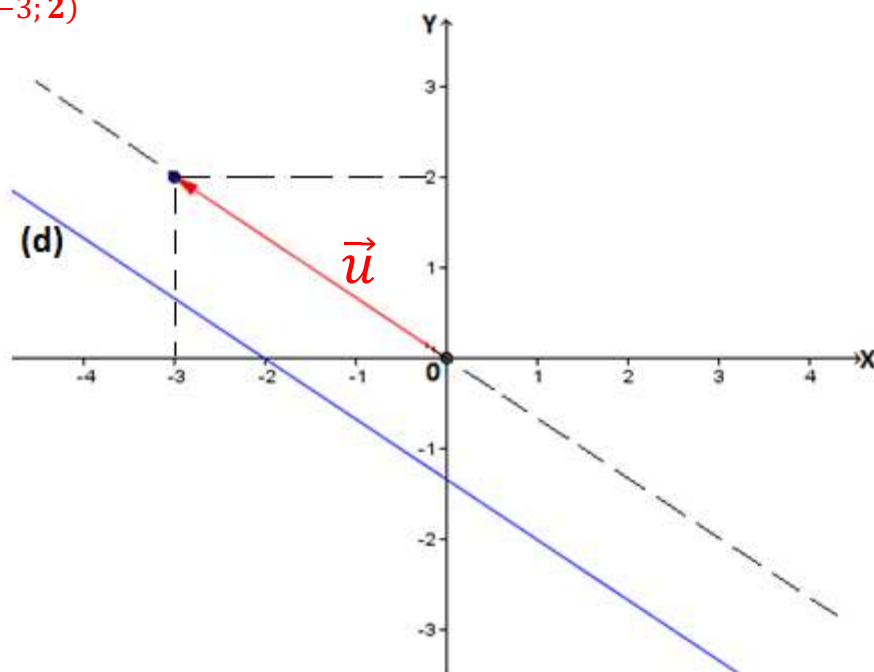
B°) Représentation graphique d'une droite et de son vecteur directeur

A retenir :

Dans un repère orthonormé, une droite et son vecteur directeur sont parallèles.

Exemple :

On a représenté dans le repère ci-dessous la droite (d) d'équation $2x + 3y + 4 = 0$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3; 2)$



Remarque : Pour la représentation graphique d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$, il faut se référer au chapitre : **équation du premier degré à deux inconnues** déroulé dans la version **activité numérique**.