Chap 4 : VECTEURS

I. Addition vectorielle

1. Théorème et définition

Exemple :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un plan (P) et A un point quelconque de (P).

a. Construis le point M image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

b. Construis le point B image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

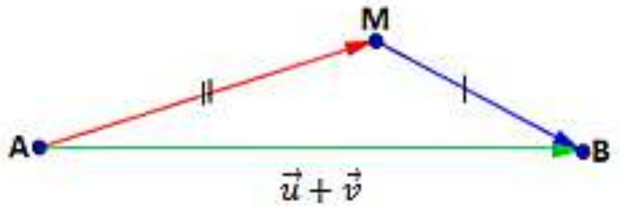
c. Trace le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Correction :

La traduction mathématique de ''M image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$'' est : $t_{\vec{u}}(A) = M$. **Il vient** :

a. $t_{\vec{u}}(A) = M$ signifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont égaux (même direction, même sens, même longueur) voir figure.

b. $t_{\vec{v}}(M) = B$ signifie que les vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont égaux (même direction, même sens, même longueur) voir figure.



c. Voir figure

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la résultante (la somme) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans cet exemple, B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de vecteur $\vec{v}$.

Théorème et définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un plan (P) et A un point de (P). Si M est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la somme des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$. On note $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque :

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ne dépend pas de la position du point A (A peut être placé à n'importe quel endroit du plan).

2. Relation de Chasles

En considérant l'exemple précédent, il vient :

$t_{\vec{u}}(A) = M$ et $t_{\vec{v}}(M) = B$ donc $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{MB} = \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

La relation vectorielle $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$ est la relation de Chasles.

Michel Chasles Mathématicien Français du XIX siècle

Enoncé de la relation de Chasles :

Soit A, B et M trois points quelconques du plan, on a : $\overrightarrow{\mathbf{AM}} + \overrightarrow{\mathbf{MB}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

II. Construction de la somme de deux vecteurs

Exemples :

1er cas (en quatre figures) **: Les deux vecteurs ont même origine.**

- Matériel : compas ; règle et crayon.

Les vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$ ont même origine I. Pour construire le vecteur $\overrightarrow{IM}$, somme des vecteurs $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IA}$, on construit avec le compas l'arc de cercle de centre A et de rayon IB puis l'arc de cercle de centre B et de rayon IA. Les deux arcs se coupent en M. Avec la règle, on trace le vecteur $\overrightarrow{IM}$.(Voir figure).

Fig1

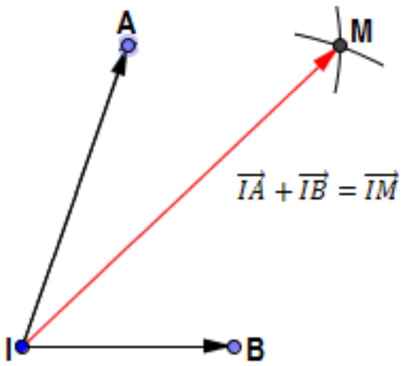


Fig2

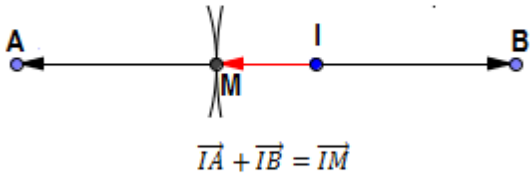
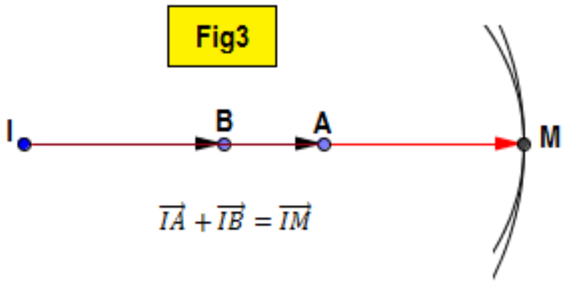


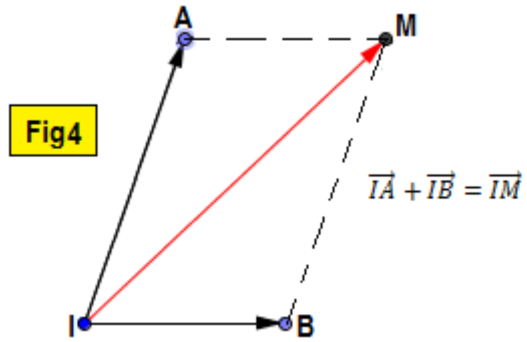
Fig3



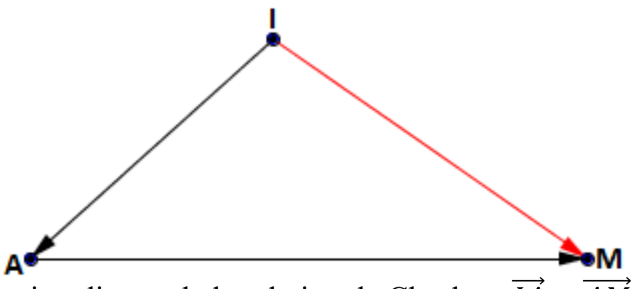
$\overrightarrow{IM}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$

- Matériel : équerre. Règle et crayon.

Avec la règle et l'équerre, on trace la parallèle à (IA) passant par B puis la parallèle à (IB) passant par A. Les deux droites tracées se coupent en M. On trace le vecteur $\overrightarrow{IM}$.



2[ieme] cas : L'origine de l'un est confondue avec l'extrémité de l'autre



Application directe de la relation de Chasles : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{IM}$

III. Construction du produit d'un vecteur par un nombre réel

Exemple : on donne un vecteur $\vec{u}$ de longueur $2cm$ et deux points A et B non confondus.

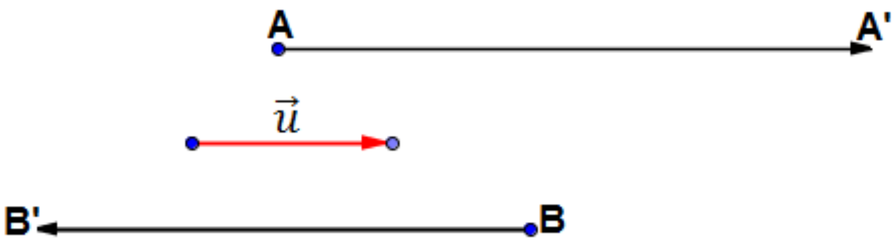
Construis les points A' et B' tels que : $\overrightarrow{AA'}=3\vec{u}$ et $\overrightarrow{BB'}=-2{,}5\vec{u}$

Construction et proposition de démarche

$$\overrightarrow{AA'}=3\vec{u} : \begin{cases} 3>0 \\ \overrightarrow{AA'} \text{ et } \vec{u} \text{ ont la même direction} \\ \text{comme } 3>0 \text{ donc } \overrightarrow{AA'} \text{ et } \vec{u} \text{ ont le même sens} \\ AA'=+3\times 2=6cm \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BB'}=-2{,}5\vec{u} : \begin{cases} -2{,}5<0 \\ \overrightarrow{AA'} \text{ et } \vec{u} \text{ ont la même direction} \\ \text{comme } -2{,}5<0 \text{ donc } \overrightarrow{AA'} \text{ et } \vec{u} \text{ ont des sens opposés} \\ BB'=+2{,}5\times 2=5cm \end{cases}$$

Figure



IV. Propriétés

k et k' étant deux réels donnés et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a :

Propriété 1 $k\vec{u} + k\vec{v} = k(\vec{u} + \vec{v}) =$

Propriété 2 : $k(k'\vec{u}) = k \times k'\vec{u}$

Propriété 3 : $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

Propriété 4 : $1\vec{u} = \vec{u}$

Exemples :

$3(\vec{u} + \vec{v}) = 3\vec{u} + 3\vec{v}$ $\quad -2(7\vec{u}) = -14\vec{u}$ $\quad \left(4 + \frac{1}{2}\right)\vec{u} = 4\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}$

$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AC}$

$\vec{v} = -3\overrightarrow{EF} + 3\overrightarrow{EG} = +3\overrightarrow{FE} + 3\overrightarrow{EG} = 3\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG}\right) = 3\overrightarrow{FG}$

V. Vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. S'il existe un réel $\boldsymbol{k}$ tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$; alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Cas de l'alignement de points

Soit A, B et C trois points distincts, s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et les points A, B et C alignés.

Exemples : questions réponses

On donne $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$; $\vec{v} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{AB} = -3\vec{u} + 12\vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - 4\vec{v}$

1. Montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Réponse

$\vec{u} = 2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} = 2(\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}) = 2\,\vec{v}$

$\vec{u} = 2\,\vec{v}$ est de la forme $\vec{u} = k \times \vec{v}$ avec $k = 2$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Montre que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. En déduis que les points A, B et C sont alignés.

Réponse

$\overrightarrow{AB} = -3\vec{u} + 12\vec{v} = -3(\vec{u} - 4\vec{v}) = -3\left(\overrightarrow{AC}\right) = -3\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ est de la forme $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$ avec $k = -3$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

3. R ; T ; M ; N et O sont quatre points tels que $\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RN}$ et O milieu du segment [NT].
   Montre que les points R ; O et M sont alignés.

Réponse

$\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{RO} + \vec{O} = 2\overrightarrow{RO}$

$\overrightarrow{RM} = 2\overrightarrow{RO}$ est de la forme $\overrightarrow{RM} = k \times \overrightarrow{RO}$ avec $k = 2$ donc $\overrightarrow{RM}$ et $\overrightarrow{RO}$ sont colinéaires et les points R ; O et M sont alignés.