Chap 4 : ÉQUATIONS ET SYSTÉME D'EQUATIONS A DEUX INCONNUES

I. Equation à deux inconnues du type : $ax + by + c = 0$

Exemple :

Résoudre graphiquement dans IR² l'équation suivante : $2x + y - 1 = 0$

Proposition de démarche

Choisir arbitrairement une valeur pour x et retrouver la valeur de y correspondante.

- ✓ Si $x = 1$ alors $2(1) + y - 1 = 0$

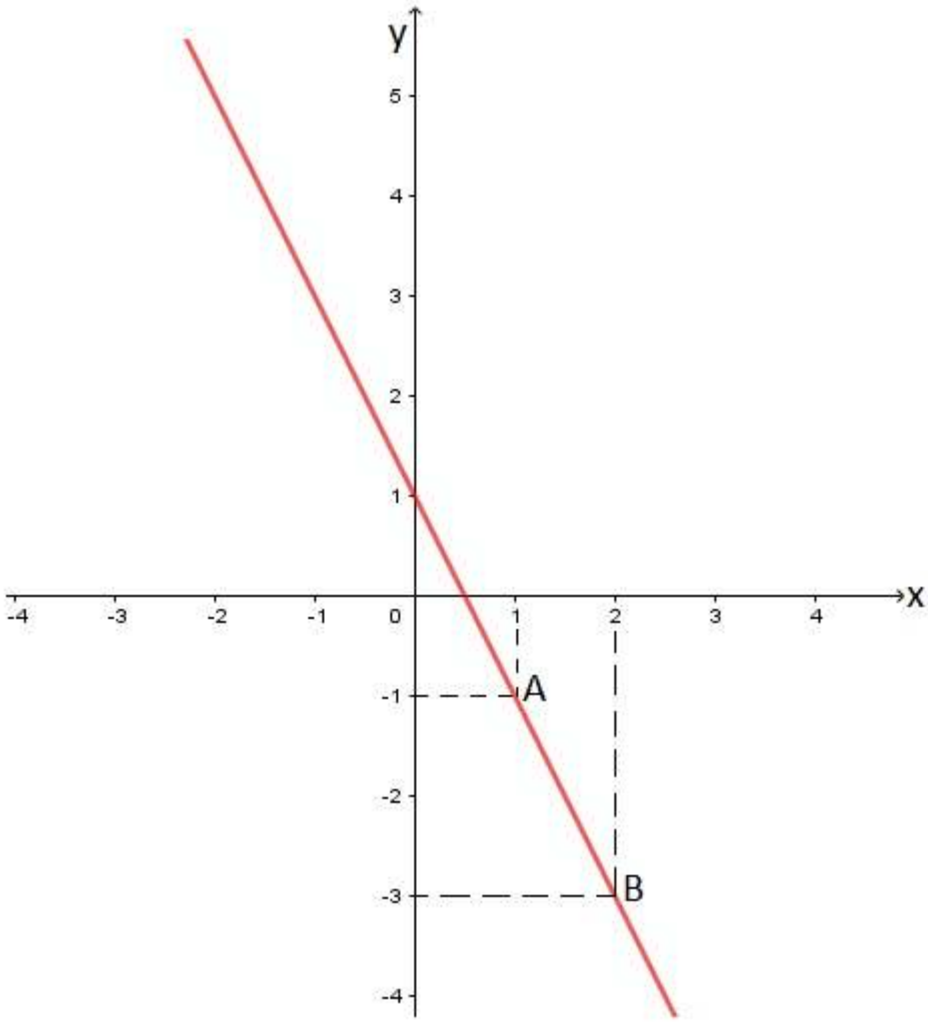
$$y + 1 = 0$$
$$y = -1$$

- ✓ Si $x = 2$ alors $2(2) + y - 1 = 0$

$$y + 3 = 0$$
$$y = -3$$

	$2x + y - 1 = 0$	
	A	B
si $x =$	1	2
alors $y =$	-1	-3

Construire un repère orthonormé, dans lequel, on placera les points $A\binom{1}{-1}$ et $B\binom{2}{-3}$.



La solution est l'ensemble des couples de coordonnées (x ; y) de chaque point de la droite (AB)

II. Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues du type

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Exemple :

On se propose de résoudre dans IR² le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \text{ ; ligne 1} \\ x + 3y + 5 = 0 \text{ ; ligne 2} \end{cases}$$

On peut résoudre ce système en utilisant l'une des méthodes de résolution suivantes :

- ✓ La méthode de résolution par addition appelée aussi méthode par combinaison ;
- ✓ La méthode de résolution par substitution ;
- ✓ La méthode de résolution par comparaison ;
- ✓ La méthode de résolution graphique ;

1) Méthode de résolution par addition

En multipliant la ligne2 par -2 on obtient $-2x - 6y - 10 = 0$ le système devient :

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \text{ ; ligne 1} \\ -2x - 6y - 10 = 0 \text{ ; } -2 \times \text{ligne 2} \end{cases}$$

En additionnant membre à membre on a :

$$(2x + y + 1) + (-2x - 6y - 10) = 0 + 0$$

$$2x + y + 1 - 2x - 6y - 10 = 0$$

$$2x - 2x + y - 6y + 1 - 10 = 0$$

$$0 - 5y - 9 = 0$$

$$-5y = 9$$

$$y = -\frac{9}{5}$$

En multipliant la ligne1 par -3 on obtient, $-6x - 3y - 3 = 0$. Le système devient :

$$\begin{cases} -6x - 3y - 3 = 0 \text{ ; } -3 \times \text{ ligne 1} \\ x + 3y + 5 = 0 \text{ ; ligne 2} \end{cases}$$

En additionnant membre à membre on a :

$$-6x - 3y - 3 + x + 3y + 5 = 0 + 0$$

$$-6x + x - 3y + 3y - 3 + 5 = 0$$

$$-5x + 0 + 2 = 0$$

$$-5x = -2$$

$$x = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Solution : $S = \left\{\left(\frac{2}{5}; -\frac{9}{5}\right)\right\}$

2) Méthode de résolution par substitution

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \,; \text{ ligne 1} \\ x + 3y + 5 = 0 \,; \text{ ligne 2} \end{cases}$$

Ligne1 : on exprime y en fonction de x . il vient : $y = -2x - 1$

Ligne2 : on remplace $y = -2x - 1$ dans $x + 3y + 5 = 0$. Il vient :

$$x + 3(-2x - 1) + 5 = 0$$
$$x - 6x - 3 + 5 = 0$$
$$-5x = -2$$
$$x = \frac{2}{5}$$

On remplace $x = \frac{2}{5}$ par sa valeur dans $y = -2x - 1$. Il vient :

$$y = -2 \times \left(\frac{2}{5}\right) - 1$$
$$y = -\frac{4}{5} - 1$$
$$y = -\frac{9}{5}$$

Solution : $S = \left\{\left(\frac{2}{5}; -\frac{9}{5}\right)\right\}$

3) Méthode de résolution par comparaison

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \,; \text{ ligne 1} \\ x + 3y + 5 = 0 \,; \text{ ligne 2} \end{cases}$$

Ligne1 : On exprime y en fonction de x : $y = -2x - 1$

Ligne2 : On exprime y en fonction de x : $3y = -x - 5$ donc $y = \frac{-x-5}{3}$

Ligne1 : On exprime x en fonction de y : $x = \frac{-y-1}{2}$

Ligne2 : On exprime x en fonction dey : $x = -3y - 5$

Par comparaison on a : $y = y$ donc

$$\frac{-x-5}{3} = -2x - 1$$
$$-x - 5 = -6x - 3$$
$$-x + 6x = -3 + 5$$
$$5x = 2$$
$$x = \frac{2}{5}$$

Par comparaison on a : $x = x$ donc

$$\frac{-y-1}{2} = -3y - 5$$
$$-y - 1 = -6y - 10$$
$$-y + 6y = -10 + 1$$
$$5y = -9$$
$$y = -\frac{9}{5}$$

Solution : $S = \left\{\left(\frac{2}{5}; -\frac{9}{5}\right)\right\}$

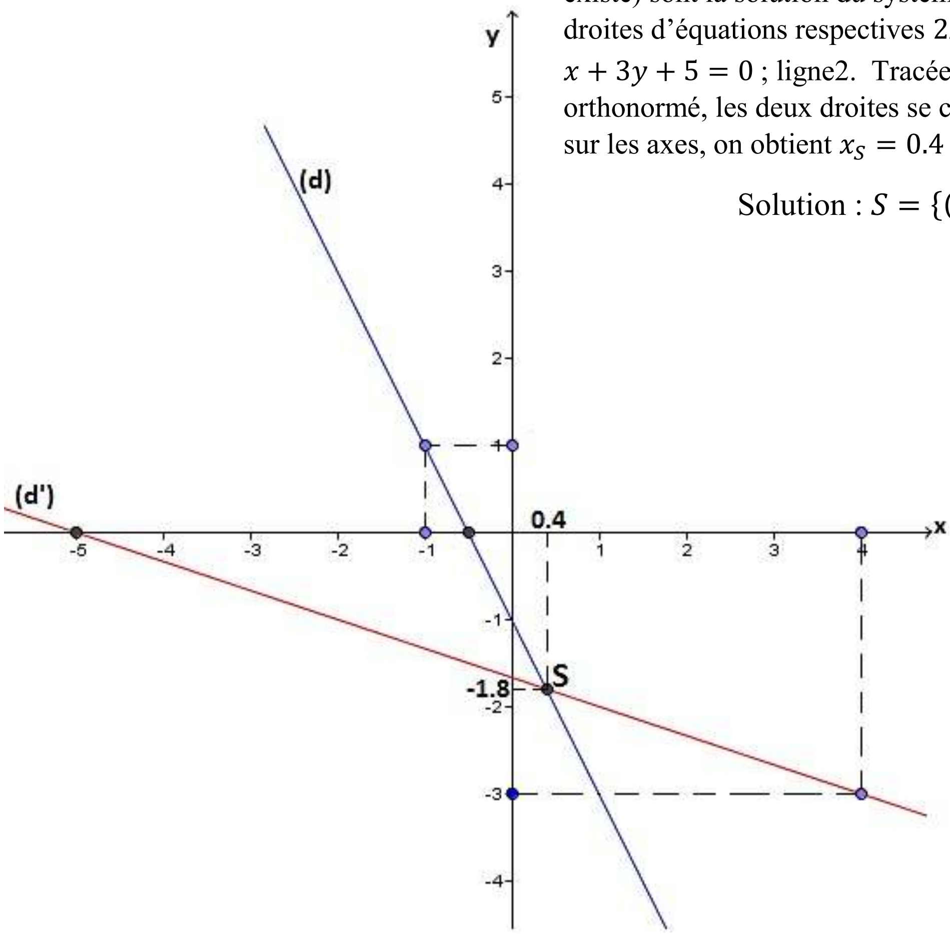
NB : *la solution est unique quelle que soit la méthode utilisée. Veiller à bien l'écrire.*

4) Méthode de résolution graphique

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0\ ; & \text{ligne 1} \\ x + 3y + 5 = 0\ ; & \text{ligne 2} \end{cases}$$

La résolution graphique consiste à tracer deux droites. Les coordonnées du point d'intersection des deux droites (s'il existe) sont la solution du système. Soit (d) et (d') les droites d'équations respectives $2x + y + 1 = 0$; ligne1 et $x + 3y + 5 = 0$; ligne2. Tracées dans un repère orthonormé, les deux droites se coupent en S. En projetant sur les axes, on obtient $x_S = 0.4$ et $y_S = -1.8$

Solution : $S = \{(0.4; -1.8)\}$



III. Comment vérifier qu'un couple de réels est solution d'une équation ou d'un système d'équations ?

Exemple :

- Vérifions que le couple $(2; 3)$ est solution de l'équation $2x - y - 1 = \mathbf{0}$.

Pour se faire, on peut procéder comme suit :

$2 \times (2) - (3) - 1 = 4 - 3 - 1 = 1 - 1 = \mathbf{0}$

Donc le couple $(2; 3)$ est solution de l'équation $2x - y - 1 = \mathbf{0}$

- Le couple $(\mathbf{1}; 3)$ est-il solution de l'équation $2x + y + 1 = \mathbf{0}$.

$2 \times (1) + (3) + 1 = 4 + 3 + 1 = 8$

Comme $8 \neq 0$; donc le couple $(1; 3)$ n'est pas solution de l'équation $2x + y + 1 = \mathbf{0}$

NB : *dans le cas d'un système d'équations, il convient de vérifier que le couple est solution de chacune des équations du système. Dès que la vérification ne marche pas avec une des équations, alors le couple n'est pas solution du système.*