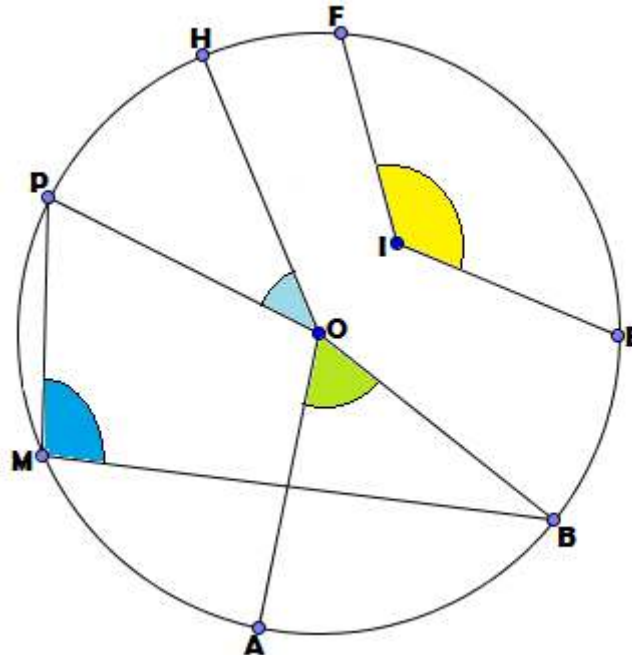


Chap 3 : ANGLES INSCRITS

I. Présentation et définition

Exemple : On considère la figure ci-dessous:



Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{HOP}$ ont pour sommet, le point O centre du cercle : Ils sont appelés angles au centre.

L'angle $\widehat{BCP}$ a pour sommet, le point C qui se situe sur le cercle. En plus de cela, ses côtés CB et CP sont des cordes de ce cercle.

Ces deux conditions réunies, définissent l'angle $\widehat{BCP}$ comme un angle inscrit.

L'angle $\widehat{FIE}$ a pour sommet, le point I qui se situe à l'intérieur du cercle et qui est distinct de O. L'angle $\widehat{FIE}$ n'est alors, ni un angle au centre ni un angle inscrit car il ne respecte aucune des conditions établies ci-dessus.

A Retenir :

Soit (C), un cercle de centre O :

- Un **angle au centre**, est un angle dont le sommet est le point O, centre du cercle.
- Un **angle inscrit** est un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés sont **susceptibles** d'être des cordes de ce cercle.
- Un angle qui ne respecte pas les conditions ci-dessus n'est ni un angle au centre ni un angle inscrit.

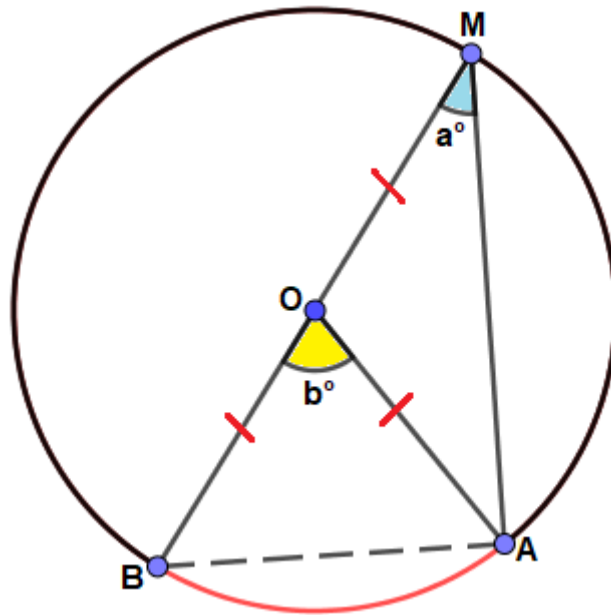
II. Relation entre angle inscrit et angle au centre associé

Exemple 1:

On considère le cercle suivant :

Dans cette figure, l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$ (le petit arc en rouge).

Montrons que $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$



Le triangle AOM est isocèle en O, donc ses angles à la base $\widehat{AMO}$ et $\widehat{MAO}$ sont égaux $\widehat{AMO} = \widehat{MAO} = a^\circ$. **1**

Dans le triangle AOM, la somme des angles est égale 180° , **il vient** :

$$\widehat{AMO} + \widehat{MAO} + \widehat{AOM} = 180^\circ \text{ donc } \widehat{AOM} = 180^\circ - \widehat{AMO} - \widehat{MAO} = 180^\circ - 2a^\circ$$

$$\widehat{AOM} = 180^\circ - 2\widehat{AMO}. \quad \mathbf{2}$$

L'angle plat $\widehat{MOB}$ est formé par les angles $\widehat{AOM}$ et $\widehat{AOB}$, **il vient** :

$$\widehat{MOB} = \widehat{AOM} + \widehat{AOB} = 180^\circ \text{ ce qui entraîne que } \widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{AOM}. \quad \mathbf{3}$$

En remplaçant : $\widehat{AOM} = 180^\circ - 2\widehat{AMO}$ dans $\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{AOM}$, **il vient** :
 $\widehat{AOB} = 180^\circ - (180^\circ - 2\widehat{AMO}) = 180^\circ - 180^\circ + 2\widehat{AMO} = 2\widehat{AMO}$.

Comme $\widehat{AMO}$ et $\widehat{AMB}$ désignent le même angle donc $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$.

On obtient la relation $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$

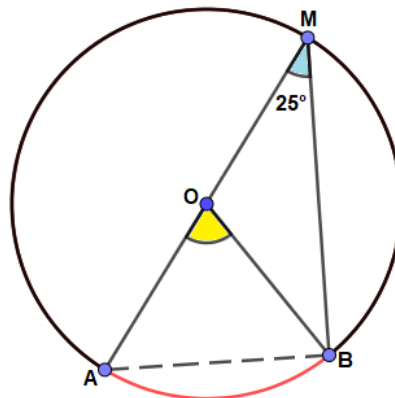
A retenir : Soit (C), un cercle de centre donné :

Dans (C), un angle au centre est égal à **deux fois** un angle inscrit interceptant le même arc que lui.

Exemple 2:

Dans le cercle ci-contre, $\widehat{AMB} = 25^\circ$

Calcule $\widehat{AOB}$

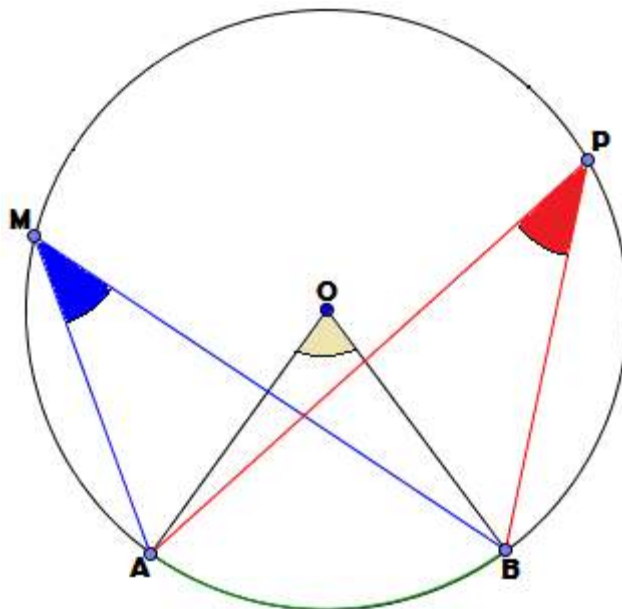


L'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc de cercle $\widehat{AB}$, il vient :

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB} = 2 \times 25^\circ = 50^\circ$$

III. Angles inscrits interceptant le même arc

Exemple : On considère le cercle ci-dessous ;



Dans ce cercle, l'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$ donc :

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$$

Dans ce même cercle, l'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{APB}$ interceptent le même arc $\widehat{AB}$, donc :

$$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{APB}$$

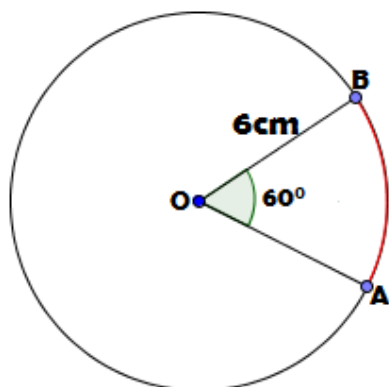
Par comparaison, on a : $2 \times \widehat{AMB} = 2 \times \widehat{APB}$ donc $\widehat{AMB} = \widehat{APB}$. On en déduit que les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{APB}$ interceptant le même arc $\widehat{AB}$ sont égaux.

Soit (C), un cercle de centre donné ;

Dans (C), deux angles inscrits interceptant le même arc sont **égaux**.

IV. Longueur d'un arc de cercle :

L'angle au centre $\widehat{AOB} = 60^\circ$ intercepte l'arc AB. Pour calculer la longueur de cet arc, tu dois d'abord, convertir 60° en radian (rad).



$$\begin{aligned} 180^\circ &\rightarrow \pi \text{ rad} \\ 60^\circ &\rightarrow 60 \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \end{aligned}$$

La longueur de l'arc AB est :

$$L_{AB} = \text{Rayon} \times \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi \text{ cm}$$

V. Cas où l'angle au centre intercepte le petit arc $\widehat{AB}$ et l'angle inscrit le grand arc $\widehat{AB}$.

Exemple :

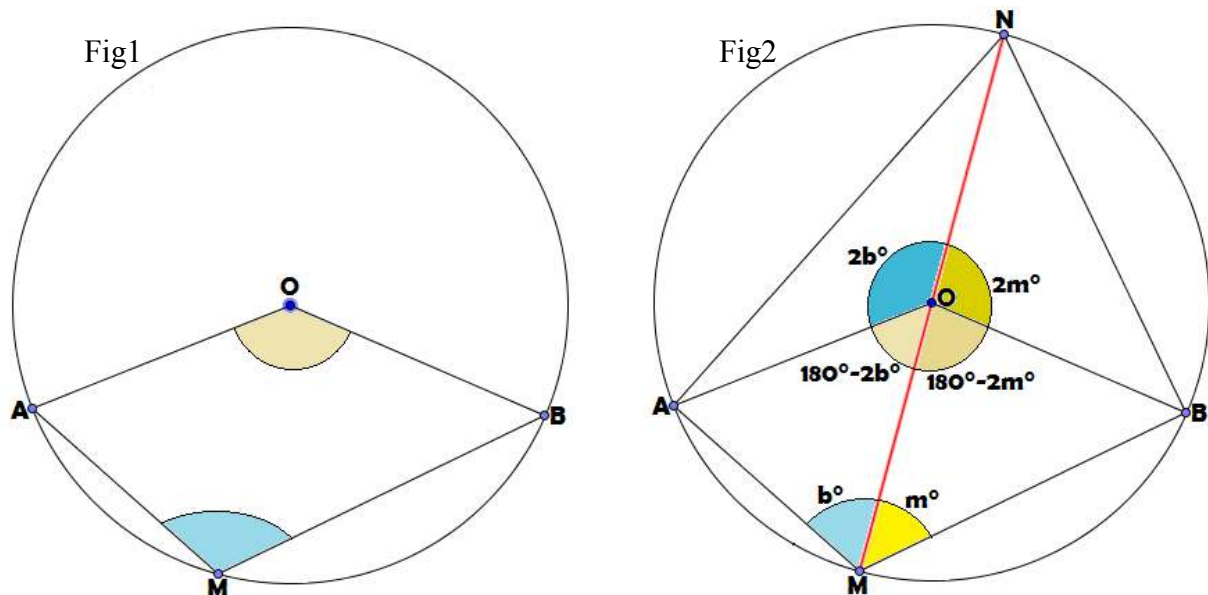


Figure 1 :

L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte le petit arc AB et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le grand arc AB. Quelle est la relation entre les deux ?

Pour répondre à cette question, on peut choisir un point N diamétralement opposé à M. (fig2)

Figure 2 :

On pose : $\widehat{AMN} = b^\circ$ et $\widehat{BMN} = m^\circ$. Il vient, compte tenu de ce qui précède :

$$\widehat{AOM} = 180^\circ - 2b^\circ \quad \text{et} \quad \widehat{BOM} = 180^\circ - 2m^\circ$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOM} + \widehat{BOM} = 180^\circ - 2b^\circ + 180^\circ - 2m^\circ = 360^\circ - 2(b^\circ + m^\circ) = 360^\circ - 2\widehat{AMB}$$

$$\widehat{AOB} = 360^\circ - 2\widehat{AMB} \quad \text{ou} \quad \widehat{AMB} = \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{AOB}) = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

Soit (C), un cercle de centre O ; A et B deux points de (C) :

Dans (C), l'angle au centre interceptant le petit arc $\widehat{AB}$ et l'angle inscrit interceptant le grand arc $\widehat{AB}$ sont liés par la relation :

$$\widehat{AOB} = 360^\circ - 2\widehat{AMB} \quad \text{ou} \quad \widehat{AMB} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOB}$$