Chap 1 : THÉORÈME DE THALÈS

THÉORÈME DIRECT – CONSÉQUENCE - RÉCIPROQUE

I- Cas du triangle

a) Théorème direct

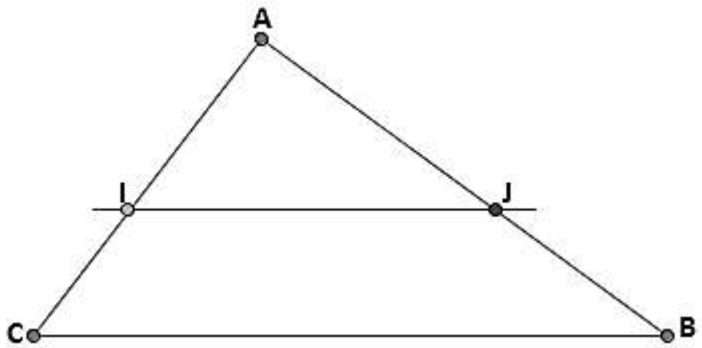
Enoncé du théorème direct de Thalès :

Soit ABC un triangle, I un point de la droite (AC) et J un point de la droite (AB).

Si la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC) alors, $\frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC}$.

Exemple 1: Comment utiliser le théorème dans un exercice.

Dans la figure suivante $(IJ)//(BC)$ et AB = 4cm ; AC = 3,2cm ; AJ = 2,5cm. Calcule AI



Règle des trois étoiles :

*ABC est un triangle (énoncer un triangle)

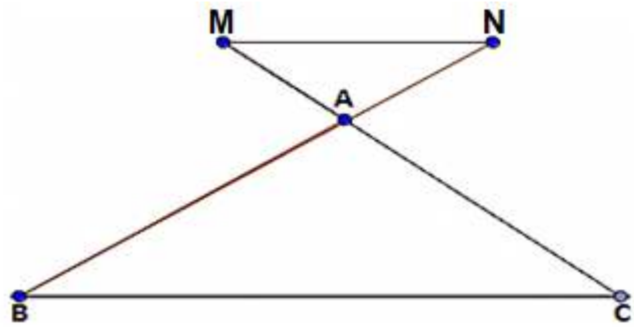
*I ∈(AC) et J ∈ (AB) (énoncer l'appartenance des autres points aux droites …)

*Comme (BC)//(IJ), donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC}$ ce qui donne $AI = \frac{AJ \times AC}{AB} = \frac{2,5 \times 3,2}{4} = 2$; $AI = 2cm$

Exemple 2 : Autre manière

Dans la figure suivante $(MN)//(BC)$; $AB = 4,5cm$; $AC = 3,6cm$ et $AN = 1,5cm$. Calcule AM.



Les points M; A et C d'une part et N ; A et B d'autre part sont alignés dans leur ordre d'écriture.
Comme (MN) et (BC) sont parallèles donc, d'après le Théorème direct de Thalès on a :

$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$; il vient : $AM = \frac{AC \times AN}{AB} = \frac{3,6 \times 1,5}{4,5} = 1,2$; $AM = 1,2\ cm$

b) Conséquence du théorème de Thalès

Enoncé de la conséquence du théorème de Thalès :

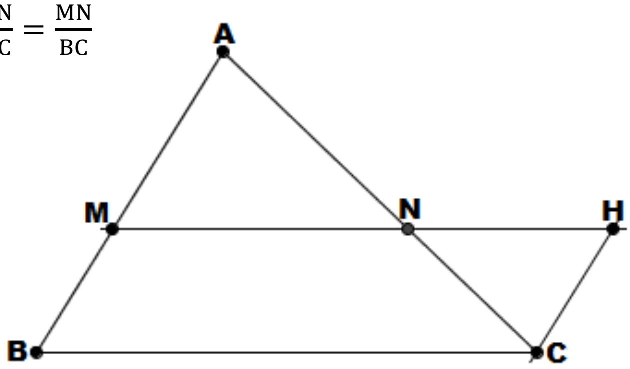
Soit ABC un triangle, M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

Si (MN) est parallèle à (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Exemple 1 : Démonstration de la conséquence du théorème de Thalès

Dans la figure suivante (MN)//(BC) ; (MH)//(BC) et (AM)//(CH).

Démontrons que : $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$



Les points A, M et B d'une part et A, N et C d'autre part sont alignés dans leur ordre d'écriture.

Comme (MN)//(BC) donc, d'après le théorème direct de Thalès on a : $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ 1

Les points A, N et C d'une part et M, N et H d'autre part sont alignés dans leur ordre d'écriture.

Comme (AM)//(HC), il vient d'après le théorème direct de Thalès on a : $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NH}}$ 2

Le quadrilatère MBCH est un parallélogramme car ses côtés sont parallèles deux à deux, donc $\mathrm{BC} = \mathrm{MH}$. Comme $\mathrm{MH} = \mathrm{MN} + \mathrm{NH}$ donc $\mathrm{BC} = \mathrm{MN} + \mathrm{NH}$ d'où $\mathrm{NH} = \mathrm{BC} - \mathrm{MN}$

L'égalité $\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NH}}$ devient :

$$\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{BC} - \mathrm{MN}} \iff \mathrm{NA}(\mathrm{BC} - \mathrm{MN}) = \mathrm{NC} \times \mathrm{NM} \iff \mathrm{NA} \times \mathrm{BC} - \mathrm{NA} \times \mathrm{MN} = \mathrm{NC} \times \mathrm{NM}$$

$$\mathrm{NA} \times \mathrm{BC} = \mathrm{NC} \times \mathrm{NM} + \mathrm{NA} \times \mathrm{MN} \quad ; \quad \mathrm{NA} \times \mathrm{BC} = (\mathrm{NC} + \mathrm{NA})\mathrm{MN} = \mathrm{AC} \times \mathrm{MN}$$

$$\mathrm{NA} \times \mathrm{BC} = \mathrm{AC} \times \mathrm{MN} \quad \text{donne} \quad \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$$ 3

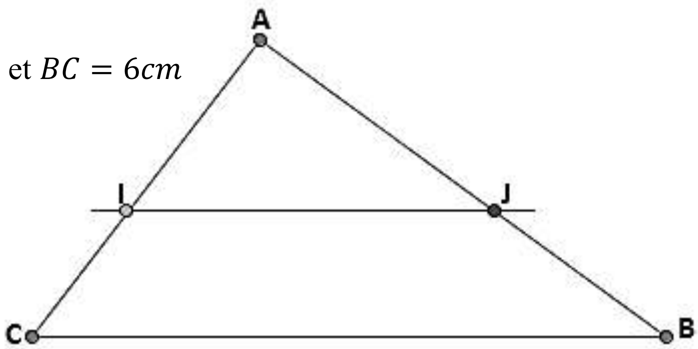
Compte tenu des trois relations, on peut en déduire que : $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$. Cette relation est la **conséquence du théorème de Thalès**.

Exemple 2 : Comment utiliser la conséquence dans un exercice.

Dans la figure suivante $(IJ)//(BC)$ et

$\mathrm{AB} = 4\mathrm{cm}$; $\mathrm{AC} = 3{,}2\mathrm{cm}$; $\mathrm{AJ} = 2{,}5\mathrm{cm}$; $\mathrm{AI} = 2\mathrm{cm}$ et $BC = 6cm$

Calcule IJ



Règle des trois étoiles :

*ABC est un triangle

*I ∈(AC) et J ∈ (AB)

*Comme (BC)//(IJ), donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{AJ}{AB} = \frac{AI}{AC} = \frac{IJ}{BC}$ ce qui donne $IJ = \frac{AI \times BC}{AC} = \frac{2 \times 6}{3{,}2} = 3{,}75$; $IJ = 3{,}75cm$

Remarque :

Le théorème et la conséquence de Thalès permettent de calculer des longueurs de segments dans un triangle.

c) Réciproque du théorème de Thalès

Enoncé de la réciproque du théorème de Thalès :

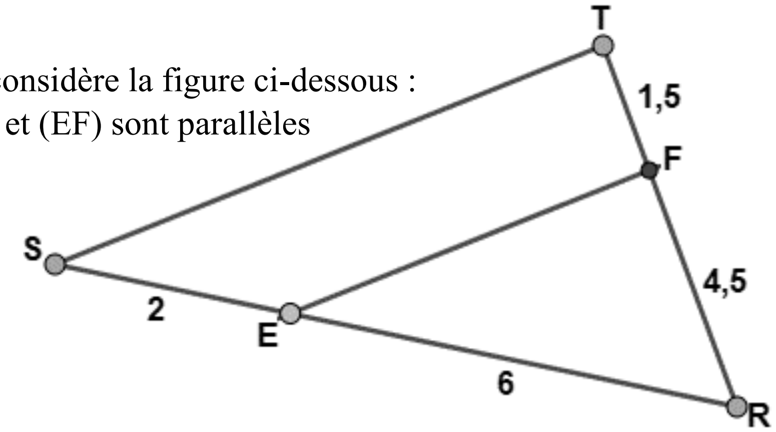
Soit ABC un triangle, M un point de la demi-droite $[AB)$ et N un point de la demi-droite $[AC)$.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors, (MN) est parallèle à (BC).

Exemple :

L'unité est le centimètre. On considère la figure ci-dessous :

Montrons que les droites (ST) et (EF) sont parallèles



Règle des quatre étoiles :

*RST est un triangle

*E ∈[RS) et F ∈ [RT)

*$\frac{RE}{RS} = \frac{6}{8} = 0{,}75$; $\frac{RF}{RT} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$

*Comme $\frac{RE}{RS} = \frac{RF}{RT}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès (ST)//(EF)

II. Cas du trapèze

Exemple :

ABCD est un trapèze (voir définition)

$M \in (AD)$ et $N \in (BC)$ tels que :

$(AB)//(MN)$

Le théorème direct de Thalès est :

ABCD est un trapèze, M un point de [AD]et N un pointde[BC].

Si $(AB)//(MN)$ alors, $\frac{AM}{BN} = \frac{MD}{NC}$

La réciproque de Thalès est :

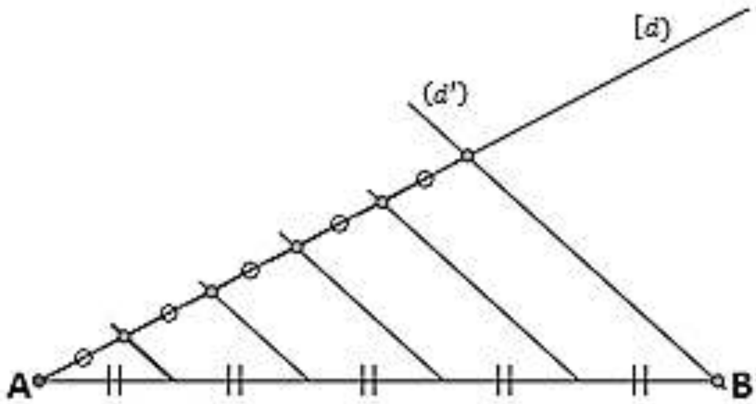
Si $\frac{AM}{BN} = \frac{MD}{NC}$ alors, les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

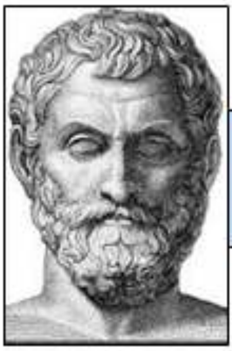
III. Partage d'un segment dans un rapport donné

Exemple :

Trace un segment $[AB]$ de longueur quelconque. Trace une demi-droite d'origine A non parallèle à la droite (AB). Prends un écart quelconque du compas puis construis à partir de A, 5 segments d'égale longueur sur cette demi-droite. Trace la droite (d') reliant le point B au dernier point marqué sur la demi-droite. Trace les droites parallèles à (d') et passant par les autres points marqués. Elles coupent (AB).

Vérifie avec le compas que le segment $[AB]$ est partagé en 5 segments égaux.





Thalès(Philosophe)
Naissance : 624av. J.-C., Milet, Turquie
Décès : 546av. J.-C., Milet, Turquie