

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Sciences Physiques	P_1 : Cinématique	Professeur : M. DIALLO
Niveau : T ^{le} S		Téléphone : 77.148.28.36 lodiamatador@gmail.com

I. Rappels

1. Mobile

On appelle mobile tout corps qui se déplace. C'est l'objet sur lequel porte l'étude du mouvement.

2. Caractère relatif du mouvement

Un voyageur assis dans une voiture qui se déplace est :

- Immobile par rapport aux autres voyageurs.
- En mouvement par rapport aux piétons et aux arbres.

Les notions de déplacement, de mouvement et de vitesse sont relatives au référentiel choisi : c'est le caractère relatif du mouvement.

3. Référentiel

3.1. Définition

Un référentiel est un repère d'espace muni d'un ensemble d'horloges synchronisées immobiles en chaque point.

3.2. Exemples de référentiels

- Référentiel terrestre

Il est utilisé pour étudier les objets situés sur la terre.

- Référentiel géocentrique

Il est utilisé pour étudier le mouvement de rotation de la terre sur elle-même, ou le mouvement des satellites autour de la terre.

- Référentiel de Copernic (Héliocentrique)

Il est utilisé pour étudier le mouvement des corps qui tournent autour du soleil.

II. Grandeurs cinématiques

1. Repères et systèmes de coordonnées

1.1. Repères

Pour faire la description complète du mouvement d'un corps ; il faut en plus du référentiel, choisir un repère d'espace et un repère de temps.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



1.1.1. Repère d'espace

Un repère d'espace est l'association :

- D'un point O fixé au référentiel appelé origine.
- D'une base composée de trois vecteurs unitaires

Le repère s'écrit donc : $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.1.2 Repère de temps

Le choix d'un repère de temps se ramène aux choix d'une origine des dates, appelée instant initial (t_0) et au choix d'une unité de temps.

1.2. Systèmes de coordonnées

1.2.1. Coordonnées cartésiennes

La position du point M(x, y, z) à chaque instant est repérée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

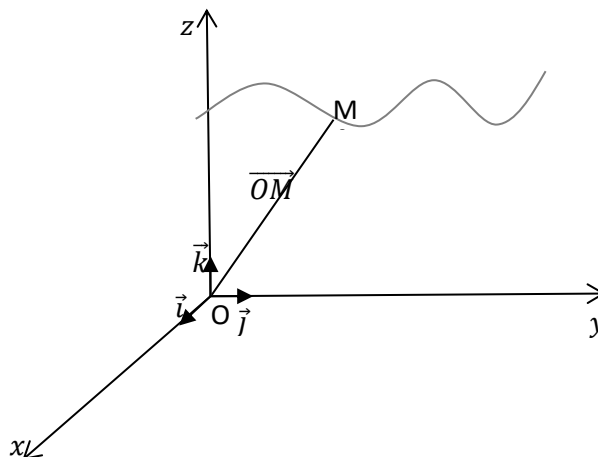
x, y et z sont les coordonnées du point M, elles dépendent du temps.

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} ,$$

où $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont appelées équations horaires ou lois horaires

du mouvement. Par exemple : $\overrightarrow{OM} = (2t^2 + 5)\vec{i} + (-t + 3)\vec{j} + 2\vec{k}$

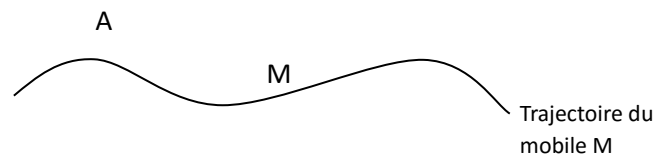
ou encore $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = 2t^2 + 5 \\ y(t) = -t + 3 \\ z(t) = 2 \end{cases}$





1.2.2. Abscisse curviligne

Pour simplifier l'étude cinématique, on utilise une abscisse qui précise la position du mobile sur la trajectoire : c'est l'abscisse curviligne s .



$$s(t) = \widehat{AM}$$

1.2.3. Coordonnées polaires

La trajectoire du point $M(r, \theta)$ à chaque instant est déterminée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

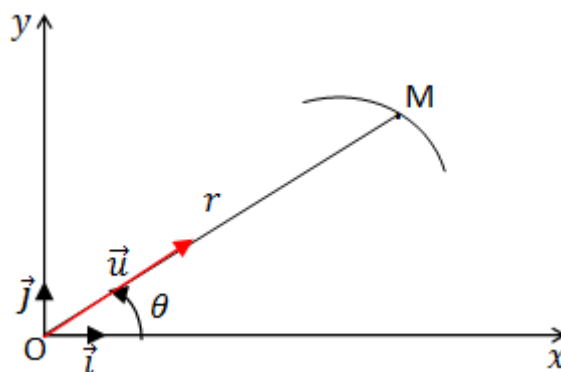
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}(\theta)$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Or $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, il vient :

$$\overrightarrow{OM} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) = r \vec{u}(\theta)$$

$$\text{Exemple : } \overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = 3 \cos 2\pi t \\ y(t) = 5 + 3 \sin 2\pi t \end{cases}$$



2. Vecteur vitesse

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



2.1. Vecteur vitesse moyenne

Le vecteur vitesse moyenne entre les instants de dates t_1 et t_2 est donné par :

$$\vec{v}_m(t_1, t_2) = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(\overrightarrow{OM})}{\Delta t}$$



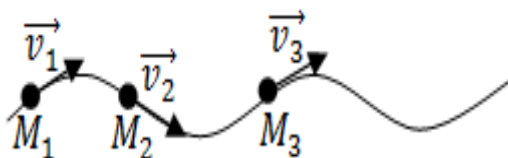
2.2. Vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$ à la date t est la limite du vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_m$ entre les dates t_1 et t_2 lorsque t_2 tend vers t_1 . Nous noterons :

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} (\vec{v}_m) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta(\overrightarrow{OM})}{\Delta t} \right)$$
$$\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$$

Le vecteur vitesse instantanée est la dérivée par rapport au temps du vecteur position à la date considérée.

Remarque : Lorsque t_2 tend vers t_1 , le point M_2 se rapproche du point M_1 . A la limite le support du vecteur $\Delta(\overrightarrow{OM})$ devient tangent à la trajectoire en M , position du mobile à la date t .



2.2.1. Expression du vecteur vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes

Dans le repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



$$\vec{v} = \frac{d(\vec{OM})}{dt} = \frac{d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt}$$

Et puisque $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs constants :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\text{On note : } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

La norme du vecteur vitesse est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Exemple : $\vec{OM} = (2t^2 + 5)\vec{i} + (-t + 3)\vec{j} + 2\vec{k}$

$$\vec{v} = \frac{d(2t^2 + 5)\vec{i}}{dt} + \frac{d(-t + 3)\vec{j}}{dt} + \frac{d(2)\vec{k}}{dt} = (10t)\vec{i} - \vec{j}$$

A la date $t=2s$, $\vec{v}(t=2) = 20\vec{i} - \vec{j}$

2.2.2. Expression du vecteur vitesse instantanée en abscisse curviligne

En abscisse curviligne, la vitesse algébrique instantanée $\bar{v}$ sera définie comme la dérivée par rapport au temps de l'abscisse curviligne. On écrit :

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt}$$

Exemple : $s(t) = 5t - 3 \Rightarrow v = 5$

2.2.3. Expression du vecteur vitesse instantanée dans la base de Frenet

A chaque point M de la trajectoire nous allons associer une base $(\vec{t}, \vec{n})$. Le point M associé à la base $(\vec{t}, \vec{n})$ constitue le repère de projection de Frenet.

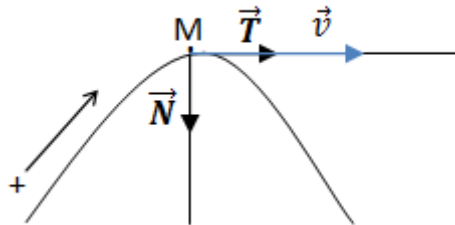
$\vec{t}$ est la tangente à la trajectoire en M orienté dans le sens arbitrairement choisi.

$\vec{n}$ est perpendiculaire à $\vec{t}$ et orienté du côté concave de la trajectoire en M.

Dans la base de Frenet $\vec{v} = v_n\vec{n} + v_t\vec{t}$. Le vecteur vitesse étant toujours tangent à la trajectoire : $v_n = 0$ et $v_t = \frac{ds}{dt}$.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



3. Loi de composition des vitesses

La loi de composition des vitesses permet d'écrire la vitesse d'un point matériel M par rapport à un référentiel galiléen **fixe** (ou **absolu**), noté (R), à partir de la vitesse du point M par rapport à un référentiel intermédiaire, appelé référentiel **mobile** (ou **relatif**), noté (R₁), lui-même en mouvement par rapport à (R).

La vitesse du point M par rapport à (R), appelé vitesse absolue et notée $\vec{v}_a$ ou $\vec{v}_{M/R}$

s'écrit : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ où $\begin{cases} \vec{v}_r = \vec{v}_{M/R_1} : \text{vitesse relative} \\ \vec{v}_e = \vec{v}_{R_1/R} : \text{vitesse d'entraînement} \end{cases}$

Pour obtenir $\vec{v}_r$, on « immobilise » (R₁) et on détermine la vitesse du point M par rapport à (R₁).

Pour obtenir $\vec{v}_e$, on détermine la vitesse de (R₁) par rapport à (R).

Application : Un voyageur, à l'intérieur d'un bus, se dirige de façon rectiligne vers le vendeur de ticket à la vitesse constante de 1 m.s⁻¹, dans le sens contraire au mouvement du bus. Le bus roule sur une route rectiligne à la vitesse constante de 90 Km.h⁻¹ par rapport à la gare de Darou Mouhty. Donner l'expression de la vitesse du voyageur par rapport au vendeur de ticket. Quelle est la vitesse du voyageur par rapport à la gare de Darou Mouhty ?

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



4. Vecteur accélération

4.1. Vecteur Accélération moyenne

On définit le vecteur accélération moyenne $\overrightarrow{a_m}$ du mobile par la relation :

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1}$$

4.2. Vecteur accélération instantanée

Le vecteur accélération instantanée à la date t est la limite du vecteur accélération moyenne entre t_1 et t_2 lorsque t_2 tend vers t_1 .

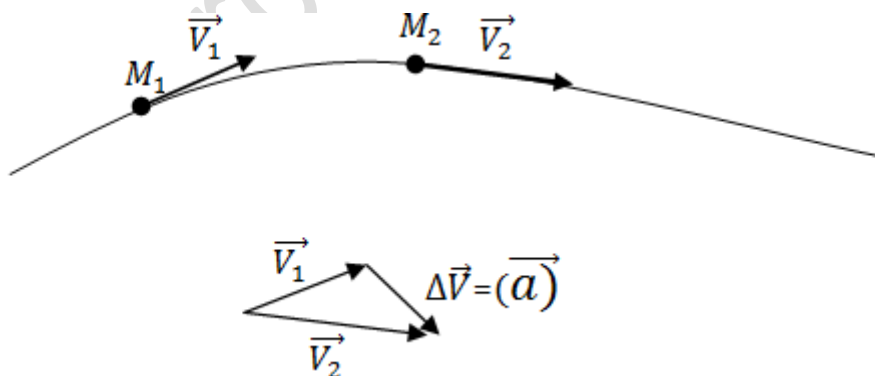
$$\vec{a} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} (\overrightarrow{a_m}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right) = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2}$$

Le vecteur accélération instantanée est la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps.

Lorsque t_2 tend vers t_1 , le point M_2 se rapproche du point M_1 .

Remarque : le vecteur accélération à la date t sera représenté par un vecteur d'origine M , dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire en ce point.



Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



4.2.1. Expression du vecteur accélération instantanée en coordonnées cartésiennes.

Dans le repère $R (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2} = \frac{d^2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

La norme du vecteur accélération est : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Si $\vec{v} = (10t)\vec{i} - \vec{j}$ alors $\vec{a} = 10\vec{i}$

4.2.2. Expression du vecteur accélération instantanée dans la base de Frenet

Soit $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$ les composantes du vecteur accélération dans ce repère $R (M, \vec{t}, \vec{n})$ nous avons :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t\vec{t} + a_n\vec{n}$$

a_t : Accélération tangentielle et a_n : accélération normale

Nous admettrons les deux relations suivantes :

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v} : \text{vitesse algébrique instantanée.}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \rho : \text{Rayon de courbure de la trajectoire au point M.}$$

III. Etude de quelques mouvements

1. Mouvements rectilignes

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne si le support de sa trajectoire est une droite.

1.1. Mouvement rectiligne uniforme

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et si la norme de son vecteur vitesse instantanée est constante.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 = v_0\vec{i}$$

- ✓ Lois horaires
- ❖ Expression de la vitesse

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



$$v = v_0 = \text{constante}$$

- ❖ Expression de l'accélération

$$a = \frac{dv}{dt} = 0$$

L'accélération d'un mouvement rectiligne uniforme est nulle

- ❖ Equation horaire

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow x = vt + A$$

A est une constante qui dépend des conditions initiales

A $t=0$, on a $x=x_0$ ceci donne $A=x_0$

L'équation s'écrit : $x = vt + x_0$

Dans un mouvement rectiligne uniforme l'abscisse est une fonction affine du temps.

1.2. Mouvement rectiligne uniformément varié

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié :

- Si la trajectoire est une droite.
- Si son vecteur accélération est constante.

- ✓ Lois horaires

- ❖ Expression de l'accélération

$$a = a_0 = \text{constante}$$

- ❖ Expression de la vitesse

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow v = at + A$$

A $t=0$ on a $v=v_0$ ceci donne $A=v_0$

L'équation s'écrit : $v = at + v_0$

- ❖ Equation horaire

$$v = \frac{dx}{dt} = at + v_0$$

L'abscisse x est de la forme : $x = \frac{1}{2} at^2 + vt + B$

A $t=0$ on a $x=x_0$ ceci donne $B=x_0$

L'équation s'écrit : $x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$

- ✓ Relation indépendante du temps entre v et x

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Dans un mouvement rectiligne uniformément varié on a les expressions suivantes :

$$\begin{cases} v = at + v_0 \\ x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} t = \frac{v-v_0}{a} \quad (2) \\ x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \quad (3) \end{cases}$$

(2) dans (3) $\rightarrow x = \frac{1}{2} a \left(\frac{v-v_0}{a} \right)^2 + v_0 \left(\frac{v-v_0}{a} \right) + x_0$ Après simplification on a :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

✓ Mouvement accéléré et mouvement retardé

Un mouvement rectiligne est accéléré si sa vitesse, en valeur absolue, augmente. Le produit $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$.

Un mouvement est retardé ou décéléré si sa vitesse, en valeur absolue, diminue. Le produit $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$.

1.3. Mouvement rectiligne sinusoïdal

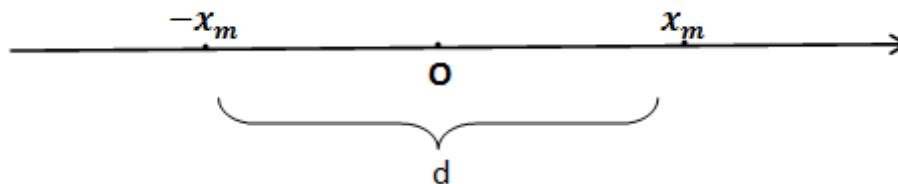
Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal si son abscisse x varie au cours du temps suivant une relation de la forme :

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad x = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

x_m : Amplitude du mouvement (élongation ou abscisse maximale).

$(\omega t + \varphi)$: est appelée la phase et φ la phase initiale ou phase à l'origine.

ω : est une grandeur physique toujours positive : on l'appelle pulsation.



La longueur du segment décrit est égale à deux fois l'amplitude du mouvement :

$$d = 2x_m$$

On montre que la fonction $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



La période correspond à l'intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs du mobile par la même élongation en allant dans le même sens.

Le mouvement effectué par le mobile en une période est une oscillation.

Le nombre d'oscillation pendant l'unité de temps constitue la fréquence N du mouvement :

$$N = \frac{1}{T}$$

- ✓ Equation horaire de la vitesse

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x_m \sin(\omega t + \varphi))}{dt} = \omega x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- ✓ Equation horaire de l'accélération

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega x_m \cos(\omega t + \varphi))}{dt} = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi)$$
$$a = -\omega^2 x \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Remarque : $\sin \alpha = \sin \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = (\pi - \beta) + 2k\pi \end{cases}$

$$\cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

2. Mouvement circulaire

2.1. Mouvement circulaire uniforme

Au cours d'un mouvement circulaire uniforme, le mobile est astreint :

- A décrire une trajectoire circulaire de centre O et de Rayon R.
- A conserver une vitesse constante (norme).
- Repérage par les coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes la position du point M est donné par : $\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$

- Repérage par l'abscisse curviligne

L'abscisse du point M est donnée par : $s = \widehat{AM}$

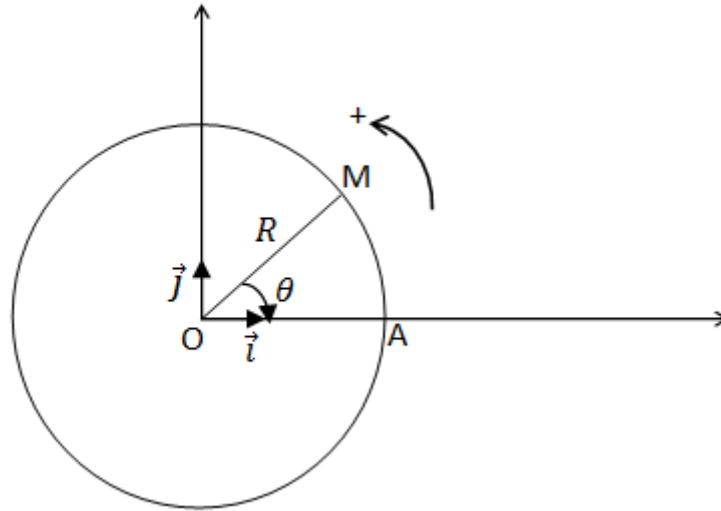
- Repérage par l'abscisse angulaire

$$\theta = \text{mes} (\widehat{OA, OM}) + 2k\pi$$

- Relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire $s = R\theta$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



✓ Vitesse du mobile

- Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du mobile animé d'un mouvement circulaire uniforme possède les caractéristiques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{direction: Tangente en } M \text{ au cercle de rayon } R \\ \text{sens: celui du mouvement} \\ \text{norme: } v = \frac{ds}{dt} = \text{constante} \end{array} \right.$$

- La vitesse angulaire

Comme $s = R\theta$ avec $R = \text{constante}$ on a :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

Par définition : $\frac{d\theta}{dt}$ représente la vitesse angulaire du mobile notée ω

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



La vitesse angulaire exprimée (rad.s^{-1}) est la dérivée par rapport au temps de l'abscisse angulaire (rad).

$$\text{L'équation horaire s'écrit : } \theta = \omega t + \theta_0$$

Lorsque $t = 0$ on pose $\theta = 0$ donc $\theta_0 = 0$

$$\text{Soit } \theta = \omega t$$

- Relation entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ et } s = R\theta$$

$$\text{Donc } v = R \frac{d\theta}{dt} \text{ d'où } v = R\omega$$

En coordonnée cartésienne l'expression du vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = -R\omega \sin \omega t \vec{i} + R\omega \cos \omega t \vec{j}$$

✓ Accélération du mobile

En coordonnée cartésienne l'expression du vecteur accélération est :

$$\vec{a} = -R\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - R\omega^2 \sin \omega t \vec{j}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$$

Le vecteur accélération et position ont même direction mais sont de sens contraire.

Dans un mouvement circulaire uniforme, le vecteur accélération est porté par le rayon et dirigé vers le centre. On dit qu'il est **centripète**.

La norme du vecteur accélération a pour valeur :

$$a = R \omega^2$$

$$\text{Comme } \omega = \frac{v}{R}, a = R \left(\frac{v}{R}\right)^2 = R \frac{v^2}{R^2}$$

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Coordonnées du vecteur accélération dans la base de Frenet

Dans la base de Frenet $\mathbf{R}(M, \vec{t}, \vec{n})$ le vecteur accélération s'exprime par :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \vec{t} + a_n \vec{n}$$

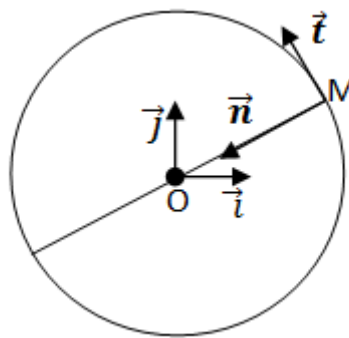
Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



$$V \text{ étant constant on a donc } \begin{cases} a_t = 0 \\ a_n = \frac{v^2}{R} = R \omega^2 \end{cases}$$

Le vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniforme est centripète, sa norme est constante, de valeur : $a = \frac{v^2}{R} = R \omega^2$.



2.2. Mouvement circulaire uniformément varié

Un mouvement est circulaire uniformément varié, si en plus de la trajectoire circulaire, l'accélération angulaire est constante.

✓ Equations horaires

❖ Equation horaire de la vitesse

Pour un mouvement circulaire uniformément varié l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est constante.

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} t + A$$

$$\text{A } t = 0 \text{ on a } \dot{\theta} = \dot{\theta}_0$$

$$\text{En tenant compte de cela on } A = \dot{\theta}_0$$

$$\text{L'équation s'écrit donc : } \dot{\theta} = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0$$

$$\text{A partir de la vitesse angulaire } \omega = \dot{\theta} t + \omega_0 \quad (1)$$

$$\text{A partir de la vitesse linéaire } V = \dot{S} t + V_0$$

❖ Equation horaire de l'abscisse

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \ddot{\theta} t + \dot{\theta}_0 \rightarrow \theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 t + B$$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



A $t = 0$ on a $\theta = \theta_0 \rightarrow B = \theta_0$

L'équation s'écrit donc : $\theta = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \omega_0 t + \theta_0$ (2)

A partir de l'abscisse curviligne $s = \frac{1}{2} \ddot{S} t^2 + \omega_0 t + s_0$

❖ Relation indépendante du temps

En éliminant le temps entre les équations (1) et (2) et après simplification on a :

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0)$$