Matière : Physique Chimie	**GRAVITATION UNIVERSELLE**	**Professeur** : M. SARR
Groupe Excellence (Cours en ligne)		**Tel :** 781177433

Exercice 1 :

Données : $G = 6{,}67.10^{-11}$ SI ; rayon de l'orbite de titan $R_T = 1{,}22.10^6$ km ; rayon de la planète Saturne $R_S = 6{,}0.10^4$ km ; période de rotation de Saturne sur elle-même T_S = 10h39min ; masse de saturne $M_S = 5{,}69.10^{26}$ kg.

Dans tout l'exercice on se place dans le référentiel Saturno-centrique, centré sur Saturne et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes. On considère que Saturne et ses satellites sont des corps dont la répartition de masse est à symétrie sphérique. Les rayons des orbites des satellites sont supposés grands devant leur taille.

I/ Quelques caractéristiques de Titan:

1/ On considère que la seule force gravitationnelle exercée sur Titan provient de Saturne.

a/ Nommer la (les) force (s) extérieure (s) appliquée (s) au satellite Titan, de masse M_T.

b/ Représenter qualitativement sur un schéma Saturne, Titan et la (les) force (s) extérieure (s) appliquée (s) à Titan.

c/ Donner l'expression vectorielle de cette (ces) force (s).

2/ On étudie le mouvement du centre d'inertie T de Titan. S est le centre d'inertie de Saturne. Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire porté par la droite ST dirigé de S vers T.

a/ Exprimer son accélération vectorielle en précisant la loi utilisée.

b/ Montrer que le mouvement de Titan est uniforme.

c/ Déterminer l'expression de la vitesse de Titan sur son orbite autour de Saturne.

II/ D'autres satellites de Saturne:

Après le survol de Titan, la sonde Cassini a survolé le satellite Encelade en février 2005. On peut considérer que dans le référentiel Saturno-centrique, Encelade a un mouvement de révolution circulaire uniforme, dont la période (en jour terrestre) est $T_E = 1{,}37$ et le rayon est R_E.

1/ Etablir la 3ème loi de Kepler.

2/ Déterminer la valeur du rayon R_E de l'orbite d'Encelade.

III/ Sonde Saturno-stationnaire:

On cherche dans cette partie de l'exercice à déterminer l'altitude h à laquelle devrait se trouver la sonde Cassini pour être Saturno-stationnaire (immobile au-dessus d'un point de l'équateur de Saturne).

1/ Quelle condition doit-on avoir sur les périodes T_S (rotation de Saturne sur elle-même) et T_C (révolution de Cassini autour de de Saturne) pour que la sonde soit Saturno-stationnaire ?

2/ Calculer la valeur de h.

Exercice 2 :

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

On traitera l'exercice sans utiliser la valeur numérique de la constante universelle de gravitation.

1/ Une fusée de masse $M_1 = 3.10^5$ kg lancée verticalement à partir du sol à l'aide de moteurs qui exercent une force $F = 4{,}3.10^6$ N.

a/ Calculer l'accélération initiale de la fusée quittant le sol.

A l'altitude h, la fusée lâche un satellite de masse m, qui se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon r autour de la terre de centre O et de rayon R_T de masse M_T.

b/ Faire une figure et montrer que la vitesse du satellite est constante. Donner la nature exacte de son mouvement.
c/ Donner l'expression de cette vitesse et de la période du mouvement en fonction de Go, R_T et r ; Go étant la valeur du champ de pesanteur au sol.
d/ Montrer que le rapport $\frac{r^3}{T^2}$ est constant.
e/ Définir un satellite géostationnaire et en déduire son altitude h_o.
2/ On s'intéresse à l'aspect énergétique de la satellisation.
a/ Donner l'énergie mécanique du système (terre + satellite) en fonction de Go, r, m et R_T.
b/ Un satellite se trouve à l'altitude $h_1 = 3200$ km, quelle énergie doit fournir les moteurs pour qu'il soit à l'altitude $h_2 = 2h_1$.
c/ A quelle vitesse faut-il le lancer à partir de h_1 pour qu'il échappe à l'attraction de la terre.
d/ Quelle aurait été cette vitesse de libération si le satellite était lancé à partir de la terre.
On donne : m = 2t ; R_T = 6400 km ; $M_T = 6.10^{24}$ kg ; Go = 9,8 $m.s^{-2}$

Exercice 3 :

Données: Constante de gravitation G = $6,6710^{-11}$ S.I ; masse de la planète $M_P = 5,97.10^{24}$ kg ; Rayon de la planète
R_P = 6390 km ; Intensité du champ de pesanteur g_{0P} = 9,77 $N.kg^{-1}$; Période de la planète T_P = 1440 min.
On considère une planète (P) assimilée à une sphère de rayon R_P animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de la ligne des pôles (qui est perpendiculaire au plan de son équateur). On supposera que le repère planètocentrique, dont l'origine coïncide avec le centre de cette planète et dont les axes ont une direction fixe par rapport aux étoiles, est galiléen.
1/ On étudie le mouvement d'un satellite artificiel de masse m de cette planète assimilable à un point matériel, par rapport au référentiel planètocentrique considéré comme galiléen. La trajectoire du satellite est circulaire, de rayon
$r = R_P + h$ où h représente son altitude.
a/ Montrer que le mouvement du satellite est uniforme dans le repère planètocentrique.
b/ Exprimer la vitesse linéaire V de ce satellite en fonction de g_{0P}, R_P et h.
c/ Etablir les expressions littérales de la période T et de la vitesse angulaire ω du satellite en fonction de g_{0P}, R_P et h dans ce même repère.
2/ Un satellite planètostationnaire reste en permanence à la verticale d'un même point de cette planète. Son orbite est dans le plan de l'équateur de cette planète.
a/ Quelle est la vitesse angulaire de ce satellite dans le repère planétocentrique ?
b/ Calculer le rayon r' de son orbite.
3/ A la surface de cette planète, l'intensité du champ de pesanteur est g_{0P} = 9,77 $N.kg^{-1}$. A l'altitude h, elle est égale:

$$\mathcal{G} = \frac{GM_P}{(R_P + h)^2}$$

Un satellite artificiel (s) de masse m tourne, sur une orbite à une altitude h_1, autour de cette planète.
a/ Exprimer la force $\vec{F}_{P/s}$ exercée par cette planète sur le satellite en fonction de m, M_P, R_P et h_1.
b/ En déduire l'expression de $\mathcal{G}_1$ à cette altitude h_1.
c/ Donner l'expression de $\mathcal{G}_2$ à une altitude $h_2 = 2h_1$.
d/ Des mesures montrent que $\mathcal{G}_1 = 2\times \mathcal{G}_2$. Montrer alors que $\frac{R_P + 2h_1}{R_P + h_1} = \sqrt{2}$
e/ En déduire les valeurs de h_1 et de h_2 et celles de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$.

Exercice 4 :

N.B: Certains renseignements et données ci-dessous sont nécessaires à la résolution de l'exercice.
Le premier lanceur Ariane est une fusée à trois étages dont la hauteur totale est de 47,4 m et qui pèse, avec sa charge utile (satellite), $\mathbf{m_T = 208}$ **tonnes** au décollage.
Le premier étage qui fonctionne pendant 145 secondes est équipé de 4 moteurs Viking V alimentés par du peroxyde d'azote N_2O_4 (masse de peroxyde emportée $\mathbf{m_P = 147{,}5}$ **tonnes**).
L'intensité de la force de poussée totale $\vec{F}$ de ces 4 réacteurs est constante pendant leur fonctionnement: elle vaut **F = 2445 kN**.
Ce lanceur peut mettre en orbite circulaire basse de **200 km** d'altitude un satellite de **4850 kg** ; il peut également placer sur une orbite géostationnaire un satellite de 965 kg; il peut aussi être utilisé pour placer en orbite héliosynchrone des satellites très utiles pour des applications météorologiques.

1/ L'ascension de la fusée Ariane:

Le champ de pesanteur $\vec{g}_0$ est supposé uniforme. Son intensité est $g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}$.
On choisit un axe Oz vertical dirigé vers le haut.
On étudie le mouvement de la fusée dans le référentiel terrestre qu'on suppose galiléen.
1-1/ Représenter clairement, sur un schéma, les deux forces qui agissent sur la fusée Ariane lorsqu'elle s'élève verticalement. On néglige les frottements et la poussée d'Archimède dans l'air.
1-2/ A un instant quelconque, la masse de la fusée est m.
1-2-1/ En appliquant le théorème du centre d'inertie à la fusée Ariane, déterminer en fonction de m et des intensités des deux forces précédentes la valeur de l'accélération a.
1-2-2/ On considère d'abord la situation au décollage. La masse de la fusée vaut alors m_T. Calculer la valeur numérique de l'accélération a_1 à cet instant.
1-2-3/ On envisage la situation qui est celle immédiatement avant que tout le peroxyde d'azote ne soit consommé. La masse de la fusée vaut alors m_2. Calculer la valeur numérique de m_2 puis celle de l'accélération a_2 à cet instant.
1-2-4/ Le mouvement d'ascension de la fusée est-il uniformément accéléré ?

2/ Etude du satellite artificiel situé à basse altitude (h = 200 km)

On s'intéresse au satellite artificiel S, de masse m_s, en mouvement circulaire uniforme autour de la Terre de masse M_T, de rayon R_T et de centre O.
On suppose que la Terre est une sphère et qu'elle présente une répartition de masse à symétrie sphérique et que le satellite peut être assimilé à un point.
2-1/ Enoncer la loi de la gravitation universelle.
2-2/On appelle $\vec{F}_S$ la force qu'exerce la Terre sur le satellite. Cette force dépend de la position du satellite.
Soit $\vec{F}_S = m_s \times \vec{g}(h)$ tel que $\vec{g}(h)$ représente le vecteur champ gravitationnelle à l'endroit où se trouve le satellite. Exprimer g(h) en fonction de R_T, h et g_0.
2-3/ Etablir l'expression de la vitesse v_S du satellite en fonction de g_0, R_T et h puis celle de sa période de révolution Ts. Calculer v_S et T_S.
Données : $\mathbf{g_0 = 9{,}8\ m.s^{-2}}$ **; h = 200 km et** $\mathbf{R_T = 6400}$ **km.**

Exercice 5 :

La constante de gravitation universelle est $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.
On considère une planète P de masse M. Le mouvement de l'un de ses satellites S, assimilé à un point matériel de masse m, est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, muni d'un repère dont l'origine coïncide avec le centre O de la planète P et les trois axes dirigés vers trois étoiles fixes.
On admet que la planète a une distribution de masse à symétrie sphérique et que l'orbite de son satellite est un cercle de centre O et de rayon r.
1/ Donner les caractéristiques de la force de gravitation exercée par la planète P sur le satellite S. Faire un schéma.
2/ Donner l'expression du vecteur champ de gravitation créé par la planète P au point où se trouve le satellite S. Représenter ce vecteur champ sur le schéma précédent.

3/ Déterminer la nature du mouvement du satellite S dans le référentiel d'étude précisé.
4/ Exprimer le module de la vitesse linéaire v et la période de révolution T du satellite S en fonction de la constante de gravitation G, du rayon r de la trajectoire du satellite et de la masse M de la planète P.

5/ Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante.
6/ Sachant que l'orbite du satellite S a un rayon r = 185 500 km et que sa période de révolution vaut T = 22,6 heures, déterminer la masse M de la planète P.
7/ Un autre satellite S' de la planète P a une période de révolution T' = 108,4 heures. Déterminer le rayon r' de son orbite.

Exercice 6 :

1/On se propose de déterminer la masse de Jupiter en étudiant le mouvement de ses principaux satellites : I_0 ; Europe ; Ganymède et Callisto.
Le mouvement d'un satellite, de masse m est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, ayant son origine au centre de Jupiter et ses axes dirigés vers des étoiles lointaines, considérées comme fixe.
On supposera que Jupiter et ses satellites ont une répartition de masse à symétrie sphérique. Le satellite se déplace sur une orbite circulaire, à la distance r du centre de Jupiter.
a/ Exprimer le force de gravitation $\vec{F}$ exercée par Jupiter sur un satellite considéré en fonction de G (constante gravitationnelle), m, r, M (masse de Jupiter) et $\vec{u}$ (vecteur unitaire). On fera un schéma pour illustrer.
b/ Etablir l'expression de l'accélération du satellite en fonction de G, M et r.
c/ Déterminer la nature du mouvement d'un satellite autour de Jupiter.
d/ En déduire l'expression de la vitesse v et la période de révolution T du satellite en fonction de G, M et r.

e/ Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est constant.
2/ Les périodes de révolution et les rayons des orbites des quatre principaux satellites de Jupiter ont été déterminés et ont les valeurs suivantes :

	I_0	Europe	Ganymède	Callisto
T (s)	$1{,}5.10^5$	$3{,}05.10^5$	$6{,}18.10^5$	$14{,}5.10^5$
r (m)	$4{,}22.10^8$	$6{,}71.10^8$	$10{,}7.10^8$	$18{,}8.10^8$
T^2 (10^{11} s^2)				
r^3 (10^{26} m^3)				

a/ Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
b/ Représenter sur papier millimétré le graphe donnant les variations de T^2 en fonction de r^3.
Echelle: 1 cm pour 5.10^{26} m^3 et 1 cm pour 2.10^{11} s^2.
c/ En utilisant le graphe précédent, trouver la relation entre T^2 et r^3.
d/ En reliant ces résultats à ceux obtenus ci-dessus, déterminer la masse M de Jupiter.

Exercice 7 :

En 1997 a été effectuée une mission spatiale destinée à l'exploration de Saturne. Huit ans plus tard la sonde d'exploration s'est posée sur Titan le plus gros des satellites de Saturne.
Le tableau ci-dessous rassemble les données relatives à Titan et à trois autres satellites de Saturne.
1/ On s'intéresse à l'étude du mouvement d'un satellite supposé ponctuel de masse m en orbite circulaire de rayon r autour de Saturne. Le mouvement est étudié dans un référentiel lié à Saturne qui

sera considéré comme un référentiel galiléen. On suppose que le satellite est soumis à la seule action de Saturne. On assimile Saturne à un corps sphérique de masse M possédant une répartition sphérique de masse.

a/ Après avoir rappelé la loi de la gravitation universelle, faire un schéma où seront représentés Saturne, le satellite et la force de gravitation exercée par Saturne sur le satellite.

On notera K, la constante de gravitation et on prendra $K = 6{,}67.10^{-11}$ N.m².kg⁻².

b/ Par application de la deuxième loi de Newton déterminer les caractéristiques du vecteur accélération du mouvement du satellite.

c/ Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

d/ Etablir la relation entre la période de révolution T du satellite et le rayon r de sa trajectoire.

2/ Recopier le tableau ci-dessous et le compléter par les valeurs du rapport $\frac{T^2}{r^3}$.

La 3ème loi de Kepler est-elle vérifiée ?

NB: On utilisera les unités du système international pour le calcul du rapport $\frac{T^2}{r^3}$

3/ Déterminer la masse M de Saturne.

Satellites	Distance moyenne au centre de Saturne r (km)	Période de révolution T	Rapport $\frac{T^2}{r^3}$
Janus	159.10^3	17 h 38 min	
Encelade	238.10^3	1 j 8 h 53 min	
Dione	377.10^3	2 j 17 h 41 min	
Titan	1220.10^3	15 j 22 h 41 min	

Exercice 8 :

Données numériques : Constante gravitationnelle : $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I

On considère une planète (P) assimilée à une sphère de masse M_p et de rayon R_P animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de la ligne des pôles (qui est perpendiculaire au plan de son équateur).

On supposera que le repère planètocentrique, dont l'origine coïncide avec le centre de cette planète et dont les axes ont une direction fixe par rapport aux étoiles, est galiléen.

1/ On admet qu'un satellite de cette planète (P), assimilé à un point matériel de masse m, est soumis uniquement à la force gravitationnelle $\vec{F}$ exercée par cette planète (P), et décrit, dans le référentiel planètocentrique, une trajectoire circulaire de centre O à l'altitude h.

1-1/ Enoncer la loi de la gravitation universelle appelée troisième de Newton.

1-2/ Exprimer la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par la planète (P) sur ce satellite considéré en fonction de G (constante gravitationnelle), m, r, M_P et $\vec{u}$ (vecteur unitaire). On fera un schéma pour illustrer.

1-3/ Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

1-4/ Exprimer la vitesse V, la vitesse angulaire ω du satellite et la période T du satellite en fonction de M_P, G, R_P et h.

2/ Utilisation de la troisième loi de Kepler.

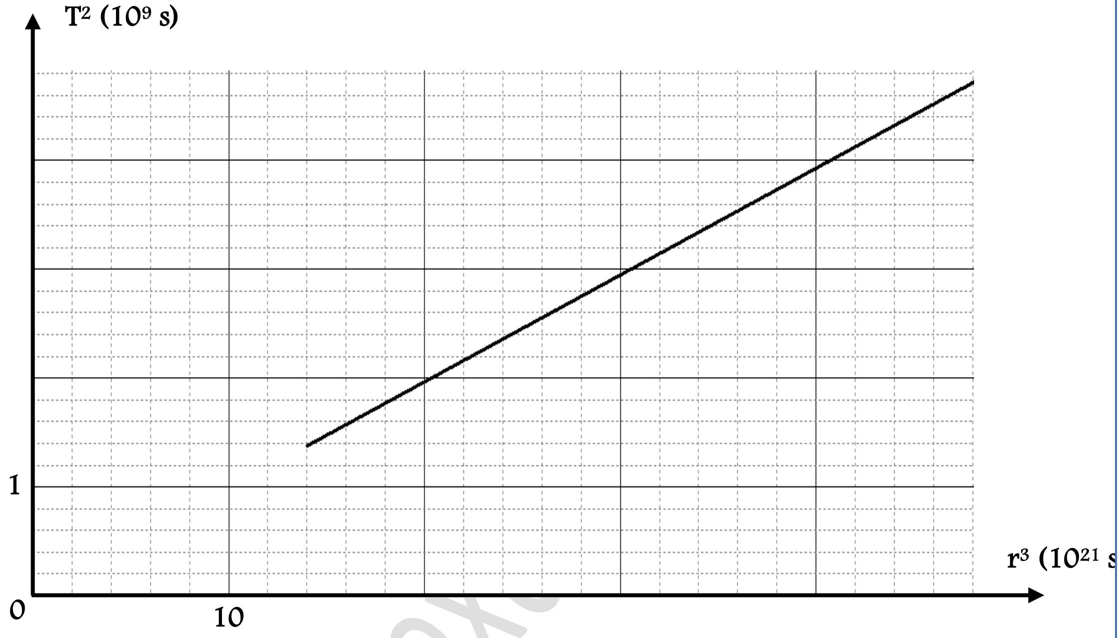
2-1/ Montrer que le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est égale à une constante que l'on exprimera en fonction de M_P et G.

2-2/ Le graphe ci-dessous représente les variations de T^2 en fonction de r^3.

Trouver la relation entre T^2 et r^3.

2-3/ Déduire de ce qui précède la masse M_P de cette planète puis donner son nom.

Planète	Mars	Jupiter	Terre
Masse en kg	$6,4.10^{23}$	$1,9.10^{27}$	6.10^{24}



Exercice 9 :

Uranus est la 7ème planète du système solaire. Elle a été découverte en 1781 par William Herechelle. Elle fût mieux connue par l'homme grâce à son survol, en 1986, par la sonde Voyager II. Uranus met 84 ans pour faire un tour complet autour du soleil. Les cinq plus gros satellites de la planète Uranus ont été découverts grâce aux observations depuis la Terre entre 1787 et 1948. Il s'agit de: Miranda, Ariel, Umbriel, Titania et Obéron.
Le tableau qui suit précise le rayon de la trajectoire décrite par chaque satellite autour d'Uranus et la période de révolution (durée d'un tour autour d'Uranus):

Satellite	Rayon de l'orbite r (10^6 m)	Période de révolution T(jour)
MIRANDA	129,8	1,4
ARIEL	191,2	2,52
UMBRIEL	266,0	4,14
TITANIA	435,8	8,71
OBERON	582,6	13,5

Dans tout le problème, on suppose que la répartition de masse des astres est à symétrie sphérique.
Les mouvements des différents satellites d'Uranus sont étudiés dans le référentiel "Uranocentrique" supposé galiléen.
On donne: $G = 6,67.10^{-11}$ SI. On prendra 1 jour = 86400s.
1/ On se propose de déterminer la vitesse d'un satellite d'Uranus. On admet que le centre d'inertie du Satellite effectue un mouvement circulaire dans le référentiel "Uranocentrique".
a/ Rappeler la définition d'un référentiel géocentrique. Définir, par analogie, le référentiel "Uranocentrique".

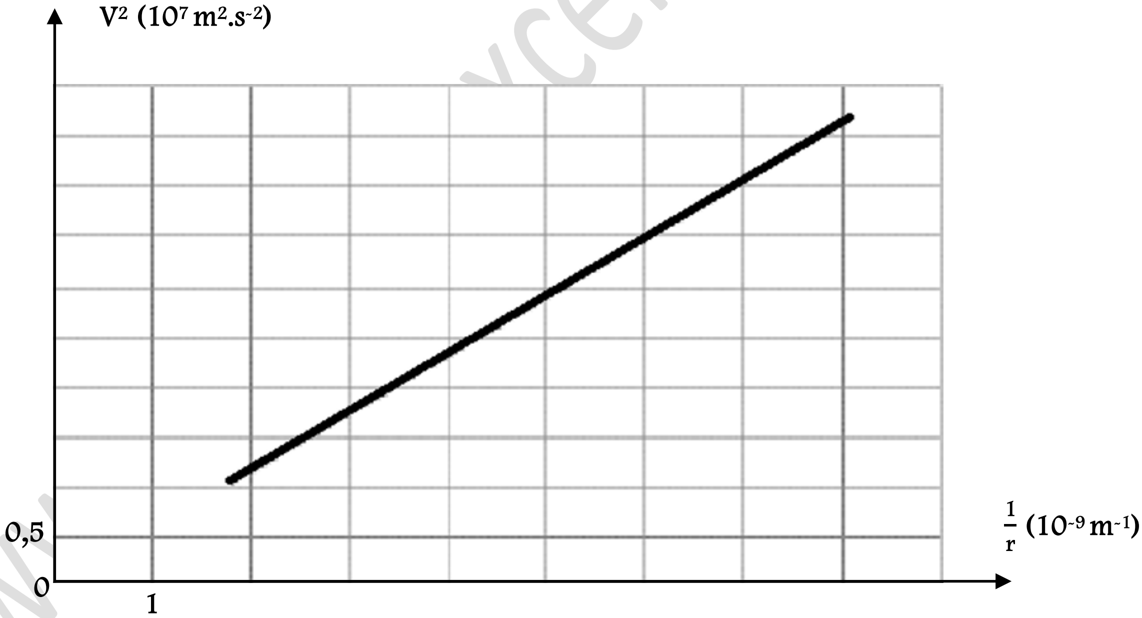
b/ Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
c/ Etablir l'expression de la vitesse V du centre d'inertie du satellite en fonction du rayon r de sa trajectoire et de sa période T de révolution.
d/ Faire l'application numérique pour le satellite Umbriel.
2/ Dans la suite, on cherche à déterminer la masse M d'Uranus par deux méthodes.

2-1/ Méthode graphique.

La courbe de la fonction $V^2 = f\left(\frac{1}{r}\right)$ où V est la vitesse du satellite dans le référentiel "Uranocentrique" et r le rayon de l'orbite autour d'Uranus est représentée ci-dessous.
a/ Etablir l'expression de la vitesse V en fonction de G, M et r
b/ En vous aidant de la courbe, déterminer la masse d'Uranus (il n'est pas demandé de rendre la courbe avec la copie; on expliquera seulement le mode d'exploitation).

2-2/ Utilisation de la troisième loi de Kepler

a/ Etablir la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$
b/ En utilisant les informations données sur les satellites, montrer, aux erreurs d'expériences près, que le
rapport $\frac{T^2}{r^3}$ est une constante dont on donnera la valeur numérique.
c/ En déduire la masse d'Uranus et comparer le résultat avec celui obtenu par la méthode graphique.



Exercice 10 :

Dans le domaine de l'astronautique, une navette spatiale désigne conventionnellement un véhicule spatial pouvant revenir sur Terre en effectuant un atterrissage contrôlé à la manière d'un avion et pouvant être réutilisé pour une mission ultérieure. Le vol d'une navette spatiale comprend trois étapes : le lancement, le vol orbital et l'atterrissage.
On se propose d'étudier le vol orbital.
Dix minutes après le décollage, la navette est en mouvement circulaire uniforme autour de la terre à l'altitude h.

Sa masse est m = 69,68.10^3 kg. L'intensité du champ de gravitation terrestre à l'altitude h est G_h = 6,95 m.s^{-2}.
Le rayon de la terre est R_T = 6380 km. La masse de la terre sera notée M_T.
1/ Rappeler l'expression de la force de gravitation universelle, puis établir l'expression de l'intensité du champ de gravitation G_h en fonction de Go, R_T et h ; Go étant l'intensité du champ de gravitation au sol (Go = 9,80 m.s^{-2}).
2/ En déduire l'expression de l'altitude h de la navette. Calculer sa valeur.
3/ Etablir l'expression de la vitesse V du centre d'inertie de la navette à l'altitude h en fonction de G_h, R_T et h.
Calculer cette vitesse V pour h = 1196 km.
4/ Etablir l'expression de la période T de révolution de la navette à l'altitude h en fonction de R_T, V et h.
Calculer la période T.
5/ Montrer que les variations de la vitesse et celle de la position sont liées par la relation Tdv = – πdr. T étant la période.
6/ On définit l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle Ep entre la terre et la navette par : $\frac{dE_p}{dr}$ = F(r) ; relation où F(r) est l'intensité de la force de gravitation que la terre exerce sur la navette.
a/ En choisissant Ep = 0 quand r tend vers l'infini, déterminer l'expression de E_p.
b/ Comparer l'énergie potentielle E_p avec l'énergie cinétique E_C de la navette.
c/ Déterminer l'énergie mécanique totale E_m du système en fonction de Go, R_T, m et r. La calculer pour h=1196 km.
d/ Déterminer pour l'altitude h_0, l'expression de l'énergie mécanique E_{m0} du système en fonction de r_0 (rayon de l'orbite à l'altitude h_0) puis en fonction de la vitesse V_0.
e/ Lorsque l'altitude du satellite est peu élevée, il peut subir les frottements des hautes couches de l'atmosphère. Son énergie mécanique diminue suivant la loi :

$$\mathbf{E_m = E_{m0}(1+\alpha t)\ ;\ \alpha > 0.}$$

On suppose que la trajectoire est circulaire. En comparant les énergies, montrer que le rayon de l'orbite diminue avec le temps alors que la vitesse augmente.

Exercice 11 :

Les satellites géostationnaires sont utilisés, entre autres, en télécommunication, en météorologie et dans le domaine militaire. Ils ont pour rôle de recevoir et de réémettre, vers une zone couvrant une partie de la surface terrestre, des signaux électromagnétiques.
Dans cet exercice, on se propose d'étudier le mouvement circulaire d'un satellite géostationnaire dans le référentiel géocentrique supposé galiléen et de déterminer la fraction de la surface terrestre couverte par le faisceau électromagnétique envoyé par un tel satellite.
1/ Enoncer la loi de gravitation universelle puis donner, schéma à l'appui, sa formulation vectorielle.
2/ En déduire l'expression vectorielle du champ de gravitation terrestre $\mathcal{G}$ à l'altitude h.
Etablir alors l'expression de $\mathcal{G}$ en fonction de sa valeur $\mathcal{G}_0$ au sol, de l'altitude h et du rayon R de la Terre.
3/ Montrer que le mouvement du satellite géostationnaire est uniforme.
4/ Etablir, en fonction de $\mathcal{G}_0$, R et h, l'expression de la vitesse v du satellite sur son orbite et celle de sa période T.
5/
a/ Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?
b/ Montrer, par un calcul, que l'altitude du satellite géostationnaire vaut h = 3,58.10^4 km.
6/ Météosat-8 est un de ces satellites géostationnaires.

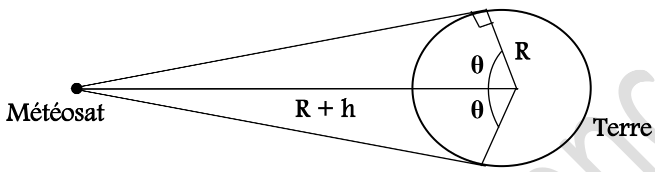
a/ Calculer la fraction de la surface terrestre couverte par le faisceau électromagnétique envoyé par Météosat-8.
b/ Dire si les observations faites par Météosat-8 concernent toujours la même zone de la Terre ou non.

On donne :

► La surface S de la calotte sphérique de rayon R, vue sous l'angle 2θ depuis le centre de la Terre est donnée par:
$S = 2\pi R^2(1 - \cos\theta)$.

► Rayon terrestre R = 6400 km; période de rotation de la Terre sur elle-même $T_T = 8{,}6.10^4$ s

► Valeur du champ de gravitation terrestre au sol : $\mathcal{G}_0 = 9{,}8$ S.I



Exercice 12 :

1/ L'énergie potentielle du satellite dans le champ de pesanteur à l'altitude h est donnée par la relation:

$$E_p = -\frac{G M_T m_S}{R_T + h};$$

Relation où G est la constante de gravitation et M_T la masse de la Terre et en convenant que Ep = 0 pour h = ∞.
a/ Justifier le signe négatif et exprimer Ep en fonction de m_S, g_0, R_T et h.
b/ Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du satellite puis comparer Ep à Ec et E à Ec.
2/ On fournit au satellite un supplément d'énergie $E = + 5.10^8$ J. Il prend alors une nouvelle orbite circulaire. Déterminer :
a/ Sa nouvelle énergie cinétique et sa vitesse,
b/ Sa nouvelle énergie potentielle et son altitude.
Données : $m_S = 1020$ kg, $R_T = 6400$ km, h = 400 km, $g_0 = 9{,}8$ m.s^{-2}.

Exercice 13 :

Un satellite tourne autour de la Terre, sur une orbite circulaire de rayon r, dans le plan équatorial terrestre. La Terre est supposée à symétrie sphérique.
Etablir l'expression de l'intervalle de temps Δt sépare deux passages consécutifs à la verticale d'un point donné de l'équateur en fonction de T_T (période de la terre) et T_S (période du satellite):
1/ Lorsque le satellite se déplaçant dans le même sens de rotation que la terre.
2/ Lorsque le satellite se déplaçant dans le sens opposé de rotation que la terre.

Exercice 14 :

Un satellite de masse m = 2t se trouve au rayon d_1 = 70.000km de la terre et d_2 du soleil.
a/ Représenter les forces auxquelles il est soumis sur un axe joignant les centre de la terre et du soleil.
b/ Au point d'équigravité, les attractions de le terre et du soleil sont égales. Calculer en ce point la distance d_2 qui sépare le satellite du soleil.

On donne : R_T = 6400 km ; M_T = 6.10^{24} kg ; Go = 9,8 m.s^{-2} ; distance terre-soleil d = 150.10^{6} km ; M (soleil) = 2.10^{30}kg.

Exercice 15 :

Dans tout l'exercice, l'étoile Gliese 581 est notée E et son exo-planète Gliese c est notée C.
Données complémentaires: caractéristiques de la planète C :

- ✓ Valeur du champ de gravitation à la surface: g_0 = 22 N.kg^{-1}
- ✓ Masse estimée: Mc = 3,0.10^{25} kg
- ✓ Rayon estimé: Rc = 9,6.10^{6} m.
- ✓ Unité Astronomique: 1 UA = 1,50.10^{11} m

Les applications numériques de cet exercice se feront sans utiliser la valeur numérique de la constante de gravitation universelle G.

PREMIERE PARTIE

On considère la planète C, de masse M_C. Le mouvement de l'un de ses satellites S, assimilé à un point matériel de masse m, est étudié dans un référentiel considéré comme galiléen, muni d'un repère dont le centre coïncide avec le centre O de la planète C et les trois axes dirigés vers trois étoiles fixes.
On admet que la planète a une distribution de masse à symétrie sphérique et que l'orbite de son satellite est un cercle de centre O et de rayon r.
1/ Enoncer la loi de gravitation universelle puis donner, schéma à l'appui, sa formulation vectorielle à l'altitude h.
2/ Montrer que le mouvement du satellite S est uniforme.
3/ Etablir, en fonction de g_0, R_C et h, l'expression de la vitesse v du satellite S sur son orbite. Faire l'application numérique, sachant que h = 20 km.
4/ Etablir l'expression de la vitesse de libération du satellite S à l'altitude h. Faire l'application numérique.

DEUXIEME PARTIE :

Cette étude se fera dans un référentiel, considéré comme galiléen, lié au centre de l'étoile E.
L'étoile E possède trois planètes actuellement identifiées: Gliese b notée B, Gliese c notée C et Gliese d notée D.
On considère que ces trois planètes se déplacent sur des orbites pratiquement circulaires.
Le tableau ci-dessous regroupe quelques caractéristiques de ces planètes B, C et D.

Période (jours)	T_b = 5,366	T_C = ?	T_d = 84,44
Rayon trajectoire (UA)	r_b = ?	r_c = 7,27.10^{-2}	r_d = 2,54.10^{-1}

5/ Enoncer la troisième loi de Kepler, relative à la période de révolution de la planète autour de son étoile.
6/ Calculer la valeur de la constante de proportionnalité intervenant dans cette loi en utilisant les données du tableau ci-dessus.
On utilisera le jour pour l'unité de temps et l'unité astronomique pour unité de distance.
7/ Calculer, en unité astronomique, le rayon de la trajectoire de la planète B et en jours la période de la planète C.

Exercice 16 :

On admet que la Terre a une répartition de masse à symétrie sphérique. Elle est considérée comme une sphère de centre O, de rayon R = 6370 km et de masse M = 5,97.10^{24} kg.
La constante de gravitation universelle est G = 6,67.10^{-11} S.I

Un satellite, assimilé à un point matériel, décrit une orbite circulaire de rayon r dans le plan équatorial, autour de la Terre.
1/ Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.
2/ Etablir l'expression de sa vitesse V en fonction de r, M et G.
En déduire l'expression de la période T du mouvement du satellite en fonction de r, M et G.
3/ Les données suivantes constituent un extrait de la fiche technique de la mission de la navette spatiale américaine DISCOVERY pour l'étude environnementale sur l'atmosphère moyenne de la Terre:

- ✓ **Masse de la navette en orbite : m = 69,68.10^3 kg.**
- ✓ **Altitude moyenne h = 296 km.**
- ✓ **Nombre d'orbites n = 189 (nombre de tours effectués par DISCOVERY de sa date de lancement jusqu'à la date d'atterrissage).**

a/ Déterminer à partir des données techniques, les valeurs numériques de la vitesse et de la période du mouvement de la navette spatiale DISCOVERY.
b/ La navette a atterri le 18 Août 1997 à Kennedy Space Center.
Déterminer la date de lancement de la navette ; on négligera les durées de la mise sur orbite et de l'atterrissage.
4/ DISCOVERY a atterri le 18 août 1997, à la date t = 7 h 07 min. Dans la phase d'approche à l'atterrissage, moteurs à l'arrêt, la navette est soumise à son poids et aux forces de frottement de l'air. On trouvera ci-dessous la valeur de sa vitesse à différentes dates.

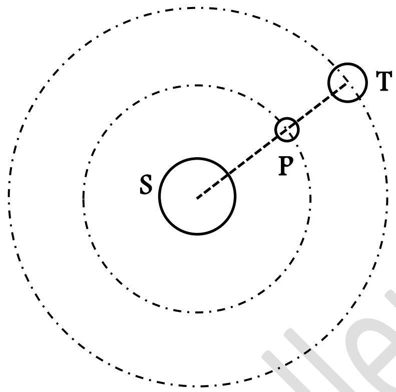
Date	Altitude (km)	Vitesse (m.s^{-1})
t_1 = 6 h 59 min	54,86	1475
t_1 = 7 h 04 min	11,58	223,5

On prendra g = 9,7 m.s^{-2} pendant toute la phase d'approche.
a/ Calculer le travail du poids du DISCOVERY entre les dates t_1 et t_2.
b/ En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer le travail des forces de frottement de l'air sur DISCOVERY entre les instants t_1 et t_2 de la phase d'approche à l'atterrissage.

Exercice 17 :

La sonde spatiale SOHO (Solar and Heliospheric Observatory) est un satellite qui a été mis en orbite par la fusée
ATLAS II. Elle a pour mission d'étudier la structure interne du soleil, la chaleur de son atmosphère et les origines du vent solaire.
Dans ce qui suit, on étudie le mouvement de la sonde.
1/ Au décollage, le mouvement de la fusée ATLAS II est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La fusée et son équipement (y compris la sonde) ont une masse M = 850 tonnes supposée constante durant le décollage. La force de poussée $\vec{F}$ générée par les propulseurs de la fusée a une intensité égale à 16.10^6 N durant la phase de décollage.
1-1/ Déterminer la valeur algébrique de l'accélération du centre d'inertie de la fusée durant le décollage sachant que le repère d'espace choisi est l'axe vertical (OZ) orienté vers le haut et que le centre d'inertie de la fusée est initialement confondu avec l'origine O.
1-2/ Etablir la loi horaire de son altitude z(t) durant cette phase. Calculer l'altitude à la date t = 15s.
2/ Le Soleil, de centre S et de masse M_S et la Terre de centre T et de masse M_T, sont considéré considérés comme des astres présentant une répartition de masse à symétrie sphérique. On admet que la Terre décrit autour du Soleil, un mouvement uniforme, une orbite circulaire de centre S et de rayon d.
Sa période de révolution est de 365,25 jours.
2-1/ On suppose que la Terre ne subit que l'action du Soleil. Exprimer la vitesse angulaire de la Terre

sur son orbite en fonction de G, Ms et d.
2-2/ En déduire la valeur de la masse Ms du Soleil.
2-3/ Le satellite SOHO, assimilé à un point matériel P de masse m, est placé à un endroit très particulier du système solaire, le point de Lagrange L_1, situé à la distance ℓ du centre de la Terre. Il décrit autour du Soleil, d'un mouvement uniforme, une orbite circulaire de rayon $b = d - \ell$.
Les centres de S, P et T sont constamment alignés.



D = TS et ℓ = TP

2-3-1/ A quelle vitesse angulaire SOHO tourne-t-il autour du Soleil ? Justifier la réponse.
2-3-2/ Faire l'inventaire des forces qui agissent sur lesatellite P. Les représenter sur un schéma.
2-3-3/ En appliquant le théorème du centre d'inertie au satellite et en tenant compte du résultat obtenu à la question 3.2.1, établir la relation entre d, ℓ et le rapport des masses $\frac{M_T}{M_S}$.
2-3-4/ Tenant compte du fait que le point de Lagrange L_1 est situé beaucoup plus près du centre de la Terre que de celui du soleil, on peut faire l'approximation $\frac{\ell}{d} << 1$.
Etablir alors la relation $\left(\frac{\ell}{d}\right)^3 = \frac{M_T}{3\,M_S}$
Calculer la distance ℓ situant le point de Lagrange à la terre.
3/ Quel est l'avantage d'un satellite comme SOHO par rapport à des observatoires terrestres?
4/ D'après un article extrait d'un hebdomadaire de vulgarisation scientifique « SOHO est le premier observatoire spatial à être placé à un endroit très particulier du système solaire le point de LagrangeL_1 du nom d'un mathématicien français qui en a découvert l'existence… A cet endroit précis où l'attraction du Soleil équilibre très exactement l'attraction de la **Terre**, le satellite spatial peut observer le Soleil 24h sur 24 ».
L'information fournie par cet article selon laquelle SOHO est situé à un endroit précis où l'attraction du Soleil équilibre très exactement l'attraction de la Terre est-elle compatible avec le mouvement circulaire uniforme de SOHO autour du Soleil ? Justifier la réponse.
Données : masse de la Terre $M_T = 5{,}98\ 10^{24}$ kg ; distance Terre-Soleil d = 1,50 10^8 km ; Constante de gravitation G = 6,67 10^{-11} N.m².kg^{-2} ; intensité du champ de gravitation terrestre ausol, g_0 = 9,80 m.s^{-2}.

Exercice 18 :

Données :

- ✓ **Masse de la Terre $M_T = 6.10^{24}$ kg ;**
- ✓ **Masse du soleil $M_S = 2.10^{30}$ kg ;**

- ✓ **Distance Terre-Soleil r = 1,50 10^8 km ;**
- ✓ **Constante de gravitation G = 6,67 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}**

4-1/ PREMIERE PARTIE :

Le Soleil, de centre S et de masse M_S et la Terre de centre T et de masse M_T, sont considérés comme des astres présentant une répartition de masse à symétrie sphérique.

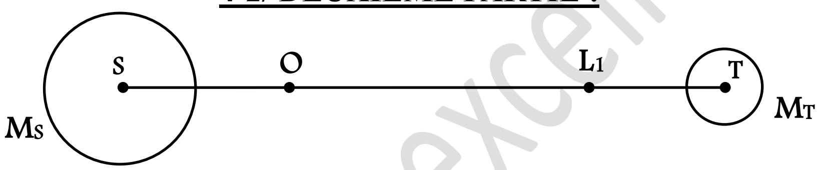
4-1-1/ Enoncer la loi de gravitation universelle puis faire un schéma traduisant sa formulation vectorielle.

4-1-2/ Montrer que le mouvement de la terre, satellite du soleil sur orbite circulaire, est uniforme.

4-1-3/ Etablir, en fonction de G, M_S et r, l'expression de la vitesse v de la terre sur son orbite autour du soleil. Faire l'application numérique.

4-1-4/ Etablir, en fonction de G, M_S et r, l'expression de la vitesse angulaire ω de la terre sur son orbite autour du soleil. Faire l'application numérique.

4-2/ DEUXIEME PARTIE :



- ✓ **M_S : représente la masse du Soleil**
- ✓ **M_T : représente la masse de la Terre**
- ✓ **Barycentre des masses M_S et M_T**
- ✓ **L_1 : représente le point de Lagrange**

On s'intéresse au mouvement d'un satellite de masse m placé un point L_1 d'un repère dont l'origine O est situé sur le barycentre des deux masses de la Terre et du soleil. (Voir figure ci-dessus)

On pose : $r = ST$; $d = L_1T$; $x = \frac{d}{r}$; $k = \frac{M_T}{M_S}$

4-2-1/ Exprimer les distances OT et OS en fonction de r et k.

4-2-2/ En L_1, le satellite de m est soumis à deux forces gravitationnelles : l'une force $\vec{F}_1$ exercée par le soleil et l'autre $\vec{F}_2$ exercée par la Terre.

4-2-2-1/ Exprimer les intensités F_1 et F_2 respectivement de $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ en fonction de r, x et des grandeurs physiques qui les caractérisent.

4-2-2-2/ En application de la deuxième loi de Newton au satellite de masse m, établir la relation suivante :

$$\omega^2\left(\frac{1}{1+k} - x\right) = \frac{G}{r^3}\left(\frac{M_S}{(1-x)^2} - \frac{M_T}{x^2}\right)$$

4-2-2-3/ Monter que pour que le satellite de masse m apparait fixe par rapport à la Terre et au soleil, il faut que :

$$(1 + k)\,x - 1 + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{k}{(x)^2} = 0$$

4-2-2-4/ Déduire de ce qui précède que $d = r\left(\sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}\right)$ puis la calculer (elle sera notée d_1).

On fera les approximations suivantes : k << 1 ; x << 1 et que $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ si $\varepsilon \to 0$

4-2-2-5/ Des recherches très précises ont pu établir la relation suivante :

$$d = r\left[\left(\sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}\right)\left(1 - \frac{1}{3} \times \sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}\right) - \frac{1}{9} \times \left(\sqrt[3]{\frac{M_T}{3M_S}}\right)^2\right]$$

Calculer la valeur précise de d (elle sera notée d_2). Trouver l'erreur relative entre d_1 et d_2.

Exercice 19 :

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.

1 – Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O, à une altitude h de l'ordre de quelques centaines de kilomètres (orbite basse). En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au satellite.

1.1. Montrer que son mouvement est uniforme.

1.2. Établir la relation entre la période de révolution T et h.

1.3. Exprimer de même la relation entre la vitesse v et h.

2 – Soient E_C et E_P l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre ; établir le « théorème du viriel » : $2E_C + E_P = 0$. (La référence de l'énergie potentielle est à l'infini)

3– À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire. Pour un observateur situé en Q, la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Fig. 1) et sa disparition sous l'horizon (point B).

Exprimer τ en fonction de h, G, M_T et R_T .Calculer τ pour $h = 8.10^5\ m$.

4 – Pour les besoins de téléphonie mobile, on place sur les p orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre) un ensemble de 42 satellites identiques. Chaque orbite, appelé « train de satellites », contient N satellites. Ces N satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km.

4.1 Calculer $\frac{T}{\tau}$

4.2 Calculer le nombre minimal N de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.

4.3 Combien d'orbites polaires p de ce type faut - il pour couvrir la surface de la Terre, c'est-à-dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ?

5.La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $f\vec{a}$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $f\vec{a} = -\alpha M_S \vec{v}$ où α a une valeur positive, constante dans cette question.

5.1 Déterminer l'unité de α.

5.2 En écrivant le théorème de l'énergie cinétique et supposant que le théorème du viriel établi à la question 2 reste applicable en présence de $f\vec{a}$,

Montrer que $dE_P = 2fa.dr$.

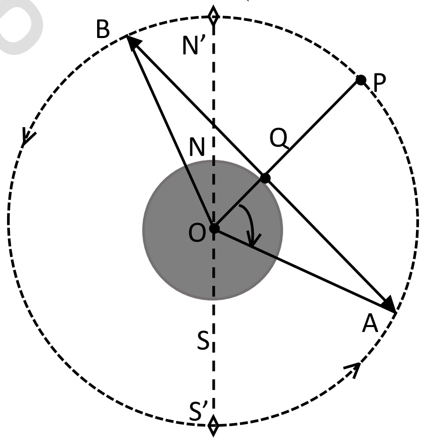
5.3 En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $h\ est\ \frac{dh}{dt} = -2\alpha\sqrt{GM_T\ (R_T + h)}$.

6. Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution.

6.1 Déduire de l'équation différentielle vérifiée par h, par approximation, l'expression de α en fonction de $\Delta h, R_T\ et\ h$. Calculer la valeur de α.

6.2 En admettant que la période est de révolution du satellite est constante et que la perte d'altitude est proportionnelle au temps,

Calculer la perte d'altitude au bout de dix ans ($1an = 365{,}25jours$)



Exercice 20 :

Le lancement du robot Curiosity de la mission Mars Science Laboratory (MSL) a eu lieu le samedi 26 novembre 2011. Il s'est posé sur le sol martien le 6 août 2012 (au total 255 jours). Ce robot transporte du matériel scientifique destiné à l'analyse de la composition du sol et de l'atmosphère martienne.

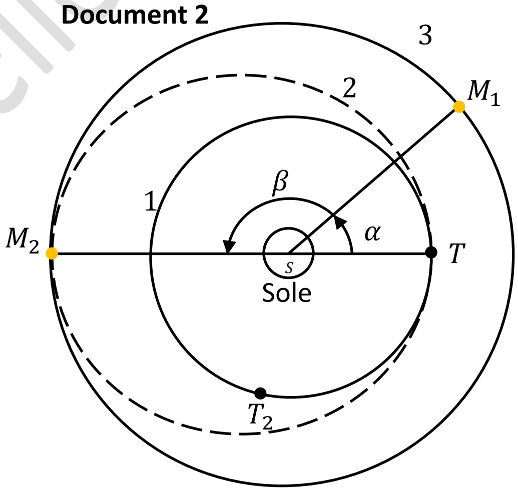
Le but de cet exercice est d'évaluer les conditions à respecter sur les positions relatives de la Terre et de Mars lors du lancement du robot Curiosity.

Données : distance Soleil-Terre : $R_1 = 1{,}50.10^8\ km$; distance Soleil-Mars : $R_2 = 2{,}28\,.\,10^8\ km$

- période de révolution de Mars autour du Soleil : $1{,}88\ an$;
- constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$;

-masse du Soleil $M_S = 1{,}99.10^{30}\ kg$.

Document 2

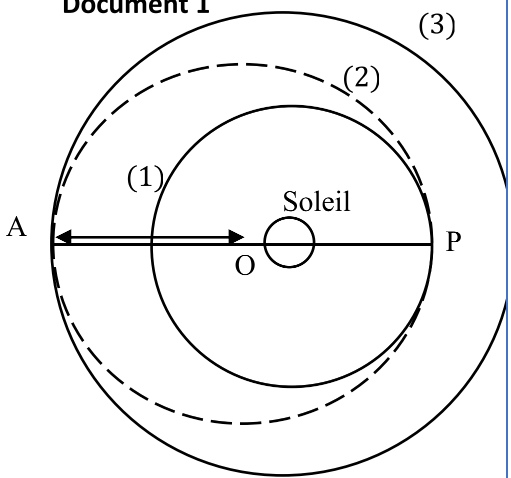


<u>Document 1</u>. Orbite de Hohmann

Dès les années1920, Walter Hohmann étudie la manière la plus économique en énergie pour se rendre d'une planète à une autre. Pour un voyage interplanétaire entre la Terre et Mars, la trajectoire du vaisseau est une ellipse (2) de centre O.

On appelle cette ellipse de demi grand axe a l'orbite de Hohmann. Le périhélie P (point le plus proche du Soleil) est sur l'orbite de la Terre et l'aphélie A (point le plus éloigné du Soleil) sur celle de Mars. Pour simplifier, les orbites de Mars et de la Terre autour du Soleil sont considérées comme circulaires et contenues dans le même plan.

Document 1



<u>Document 2.</u> Conditions de rencontre entre Curiosity et Mars

La figure ci-contre donne les positions de la Terre et de Mars au moment du départ et de l'arrivée de Curiosity. Mars accomplit uneorbite complète de 360° en 1,88 an.On suppose que les deux planètes décrivent un

mouvement circulaire et uniforme pendant le temps du voyage. On lance le vaisseau de la Terre lorsque Mars se trouve au point M_1 sur son orbite, position initiale repérée par l'angle α représenté ci-dessous. Le point M_2 représente le lieu de rendez-vous entre le vaisseau et Mars. On note β l'angle $\widehat{SM_1; SM_2}$.

1. Indiquer les différentes phases du voyage de la mission MSL ?
2. Sur le schéma du document 1 repasser en couleur le chemin suivi par MSL et indiquer

les distances R_1 et R_2 introduites dans les données. Montrer que la valeur du demi grand-axe de l'orbite de Hohmann est à = $1{,}89.10^8\ km$.

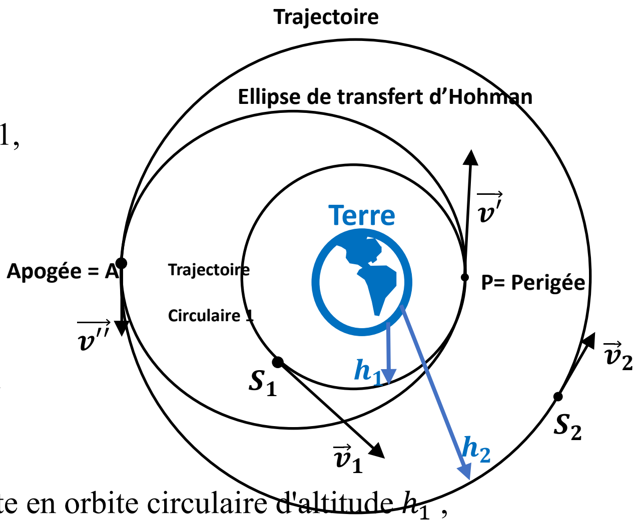
3. La troisième loi de Kepler permet d'écrire $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ où a est le demi grand axe de l'ellipse, T la période pour parcourir la totalité de l'ellipse, G la constante de gravitation universelle et M_S la masse du Soleil.

a) Exprimer la durée Δt du voyage de Curiosity en fonction de $a, G\ et\ M_S$.
b) Calculer la durée Δt. Commenter le résultat obtenu par rapport à la durée de la mission.

4. Déterminer la valeur de l'angle β qui repère la position de Mars au départ, condition nécessaire à la réussite de la mission

Exercice 21 :

Soit un satellite artificiel S, de masse $m_i = 1\ 500\ kg$, en orbite autour de la Terre de masse $M = 5{,}97.1024\ kg$ et de rayon $R = 6378\ km$, et que l'on veut remonter de la trajectoire circulaire 1, d'altitude $h_1 = 500\ km$ à la trajectoire circulaire 2, d'altitude $h_2 = 600\ km$, ne serait-ce que parce-que les hautes couches de l'atmosphère le freinent et le font retomber progressivement. Voici comment on procède, que ce soit autour de la Terre, de



Mars ou d'autres planètes : d'abord on met le satellite en orbite circulaire d'altitude h_1 , sur laquelle il a une vitesse v_1 .

A un moment convenu, lorsque le satellite est au point P, futur périgée de l'orbite elliptique de transfert d'Hohmann, on augmente sa vitesse, sans changer sa direction, en la faisant passer à la valeur v'. Il faut lui donner une vitesse v' calculée de façon précise pour que l'apogée A de l'ellipse soit sur l'orbite circulaire définitive. Arrivé en A il a une vitesse v'' inférieure à v'. On augmente encore sa vitesse, sans changer sa direction, jusqu'à la valeur v_2 . Sur les 2 premières orbites le satellite peut faire plusieurs révolutions.

1. Exprimer puis calculer les vitesses V_1 et V_2 du satellite respectivement sur les orbites circulaires 1 et 2
2. On montre, dans le cas d'une orbite elliptique, que les énergies potentielle et mécanique s'écrivent :

- Energie potentielle $Ep = \frac{-K.M.m_i}{r}$; $avec\ r = R + h$: distance entre le centre de la terre et le satellite.
- Energie mécanique $Em = \frac{-K.M.m_i}{2a}$; avec $a = \frac{AP}{2}$: demi grand axe de l'ellipse.

a. Exprimer a en fonction de $R, h_1\ et\ h_2$. En utilisant la troisième loi de Kepler ($\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K.M}$), calculer la durée du transfert balistique du satellite de P à A.

b. En utilisant l'expression de l'énergie mécanique sur orbite elliptique, exprimer puis calculer les vitesses V' et V'' respectivement en P et en A.

3. Dans le domaine des vols spatiaux, une manœuvre orbitale est définie comme étant l'utilisation d'un système de propulsion spatiale afin de modifier l'orbite d'un astronef. Par exemple il peut s'agir de l'augmentation ou la diminution de la vitesse d'une sonde interplanétaire, de l'orientation d'un satellite, ou encore de la modification de l'inclinaison de son orbite.

a. Calculer l'accroissement de vitesse Δv qu'il faut communiquer au satellite aux manœuvres orbitales en P et en A.

b. Pour chacune des manœuvres orbitales précédentes, appliquer **l'équation de Tsiolkovski** pour déterminer la masse d'ergols brûlés : $\boldsymbol{\Delta v = v_e . Ln\left(\frac{m_i}{m_i - m_e}\right)}$ où :

- Δv est la variation de vitesse entre le début et la fin de la phase de propulsion considérée ;
- v_e est la vitesse d'éjection des gaz;
- m_i est la masse totale de l'astronef au début de la phase propulsée (i pour initial) ;
- m_e est la masse d'ergols brûlés lors de la phase propulsée, exprimée dans la même unité que m_i ;
- Ln est la fonction logarithme népérien.

La vitesse d'éjection des gaz pour le satellite est $v_e = 380\ m.s^{-1}$

Exercice 22 :

La Terre est assimilée à une répartition de masse à symétrique sphérique. Elle est considérée comme une sphère de centre O, de rayon $R = 6370\ km$ et de masse $Mr = 5{,}97.10^{24}\ kg$.

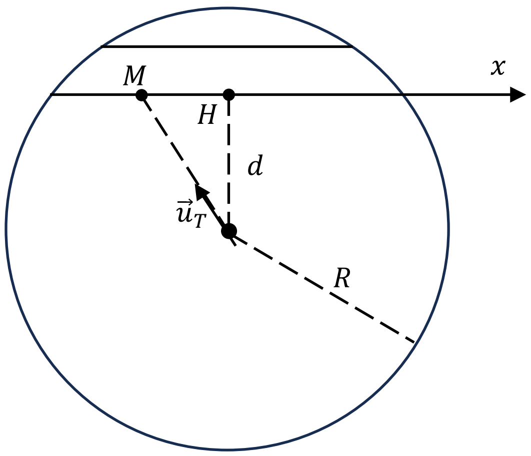


Figure 2

La constante de gravitation universelle est $G = 6{,}67.10^{11} N.kg^{-2}.m^2$

Dans cet exercice on s'intéresse aux interactions entre la Terre et un objet dans les deux situations suivantes : l'objet se situe à une distance r du centre que $r \geq R$ puis le cas ou cette distance est inferieure au rayon terrestre $r \leq R$

1. **Satellite de masse m sur orbite circulaire autour de la Terre :**

Dans cette partie, on étudie le mouvement d'un satellite S de masse m décrivant autour de la Terre une orbite circulaire de rayon r.

a. Donner les caractéristiques de la force de gravitation $\vec{F}$ exercée par la Terre sur le satellite S.

Faire un schéma.

b. Donner l'expression du champ de gravitation $\vec{g}$ créé par la Terre au point où se trouve le satellite S.

Représenter ce vecteur champ de gravitation $\vec{g}$ sur le schéma précédent.

c. Déterminer la nature du mouvement du satellite dans le référentiel d'étude à préciser.

d. Etablir les expressions de l'énergie potentielle et de l'énergie mécanique du système Terre-satellite ainsi que celle de l'énergie cinétique du satellite en fonction de, $m, r\ R\ et\ g_0$. intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre. On choisira la surface de la Terre comme état de référence pour l'énergie potentielle.

e. Le satellite subit des frottements sur les hautes couches de l'atmosphère ; ces frottements sont équivalents à une force de freinage de module $f = \lambda m v^2$. Ce freinage est très faible, et on peut supposer que les révolutions restent presque circulaires et que pour chacune d'elle, le rayon de l'orbite r du satellite diminue de Δr avec $\Delta r \ll r$. Exprimer la variation de vitesse Δv en fonction de Δr et de la période T de révolution du satellite. En déduire l'expression de λ en fonction de r et Δr.

2. **Force de gravitation et tunnel terrestre**

On démontre que pour tout solide M de masse m supposé ponctuel, situé à l'intérieur de la Terre à la distance r du centre O de la Terre, l'attraction terrestre est une force $\vec{F}$ agissant en ce point M dirige vers le centre de la Terre :

$\vec{F} = -m.g_0.\frac{r}{R}\vec{u}_r$, $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire.

R est le rayon de la Terre, $r = OM$ et g_0 l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre (figure 2).

a. Recopier la figure 2 et y représenter la force $\vec{F}$

b. Trouver l'expression de l'énergie potentielle du système constitué par la Terre et le solide M en fonction de m, R, r et g_0 (en supposant que $E_P = 0$ pour $r = 0$).

c. On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe (Hx) ne passant pas par O et traversant la Terre. On note d la distance OH du tunnel au centre de la Terre. Un véhicule assimilé à un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans le tunnel. Il part, à l'instant de date $t = 0$, du point A de la surface terrestre sans vitesse initiale.

- Quelle est l'expression de sa vitesse maximale V_m, au cours du mouvement en fonction de R, d et g_0? Pour $d = 5.10^6$ m calculer V_m.
- Etablir l'équation différentielle de l'abscisse $x = \overline{HM}$ qui traduit le mouvement du point matériel M par une méthode énergétique.
- Montrer que x peut se mettre sous la forme : $x = \sqrt{(R^2 - d^2)}.\cos\left[\left(\sqrt{\frac{g_0}{R}}\right).t + \pi\right]$ puis retrouver l'expression de la vitesse maximale V_m établie à la question 2.b.1.

d. Représenter, en fonction de x, l'énergie potentielle de gravitation $E_P(x)$ de M.

Commenter le graphe obtenu. Décrire le mouvement de M à partir de sa position initiale en A.