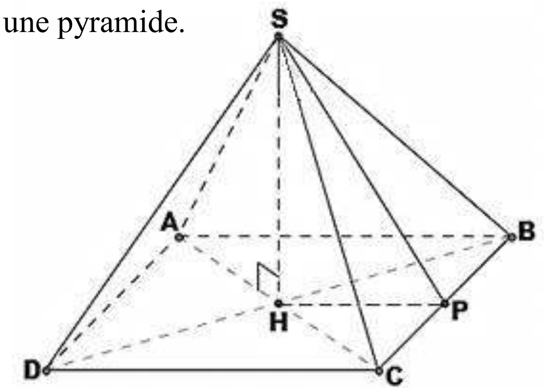
Leçon 2 : PYRAMIDE

I. Pyramide

A°) Présentation

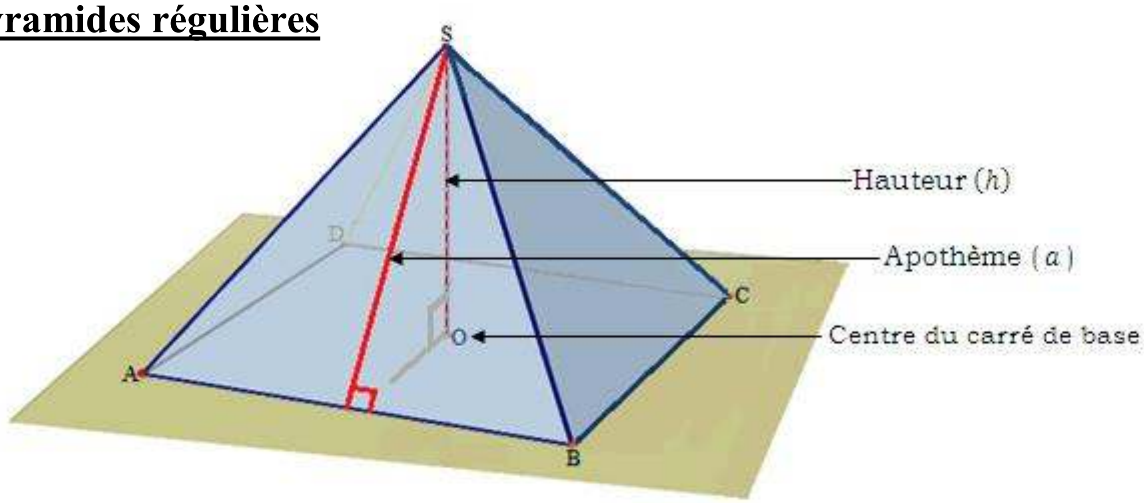
Le solide ci-dessous est une pyramide.



- ✓ Le quadrilatère ABCD est la base de cette pyramide.
- ✓ [SA]; [SB]; [SC]; [SD]; [AB]; [BC];[CD] et [AD]sont ses arêtes.
- ✓ Les triangles SAB ; SBC ; SCD et SAD sont ses faces latérales
- ✓ SH est une hauteur de cette pyramide.
- ✓ SABCD est un des noms de cette pyramide.

Remarque : il existe d'autres formes de pyramides.

B°) Pyramides régulières

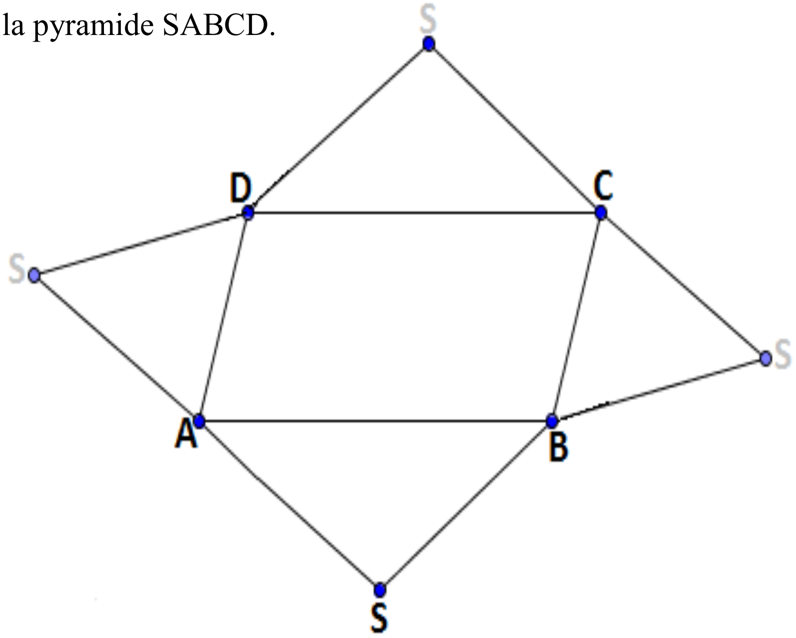


- ✓ La base ABCD est un carré (ou un polygone régulier).
- ✓ SO est la hauteur de cette pyramide.
- ✓ Les faces latérales SAB, SBC, SCD et SAD sont des triangles isocèles
- ✓ Il y a 4 apothèmes (les hauteurs des triangles isocèles issues de S)
- ✓ SABCD est le nom de cette pyramide régulière.

Définition : Une pyramide est dite régulière si :
- ✓ Sa base est un polygone régulier (carré, triangle équilatéral; …)
- ✓ Sa hauteur passe par son sommet et par le centre de sa base.
- ✓ Ses faces latérales sont des triangles isocèles.

C°) Patron d'une pyramide

En détachant soigneusement les faces suivant les arêtes latérales on obtient une figure plane : c'est le patron de la pyramide SABCD.



D°) Aire d'une pyramide

L'aire A_P de la pyramide régulière SABCD est égale à la somme des aires de ses faces latérales et de sa base.

Il vient :

$$A_P = A_{SAB} + A_{SBC} + A_{SCD} + A_{SDA} + A_{ABCD}$$

$$A_P = \frac{1}{2} \times AB \times a + \frac{1}{2} \times BC \times a + \frac{1}{2} \times CD \times a + \frac{1}{2} \times DA \times a + AB \times AB$$

Or $AB = BC = CD = DA$

Donc :

$$A_P = 4 \times \left(\frac{1}{2} \times AB \times a\right) + AB \times AB$$

$A_P = \frac{4 \times AB \times a}{2} + AB \times AB$; or $4 \times AB$ et $AB \times AB$ sont respectivement le périmètre et l'aire du carré de base ABCD.

Il vient :

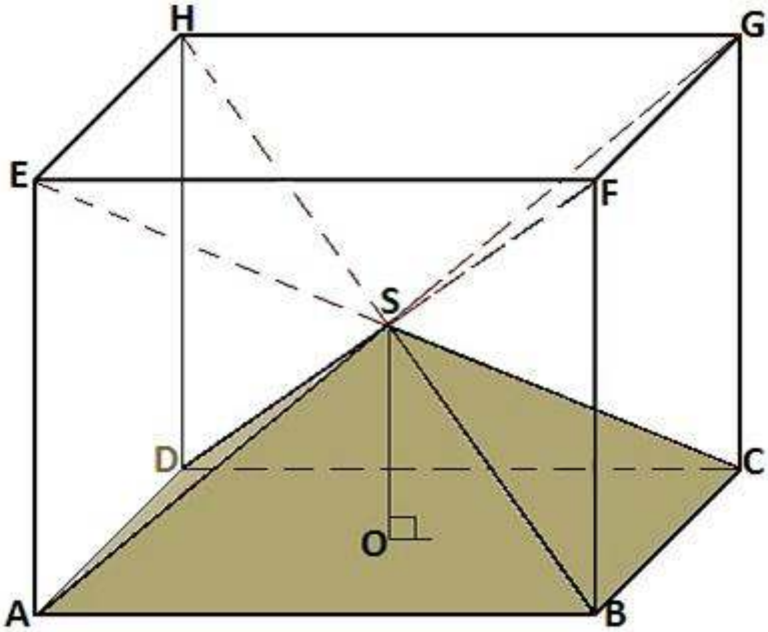
$$\boxed{A_P = \frac{P_{base} \times a}{2} + Aire(ABCD)}$$

On déduit de l'expression ci-dessus que $\frac{P_{base} \times a}{2}$ est la somme des aires des faces latérales. En d'autres termes, c'est l'aire latérale de la pyramide SABCD.

D'une manière générale, pour une pyramide régulière on a :

- ✓ Aire latérale : $A_L = \frac{périmètre\ de\ base \times apothéme}{2} = \frac{P_{base} \times a}{2}$
- ✓ Aire de base : A_{base} dépend de la forme géométrique de la base.
- ✓ Aire totale : $A_T = A_L + A_B$

E°) Volume d'une pyramide.



ABCDEFGH est un cube d'arête x. Ses diagonales intérieures se coupent au point S centre du cube. Il apparaît 6 pyramides régulières identiques et de même volume. Ce sont les pyramides : SABCD, SEFGH, SAEHD, SDHGC, SEFBA et SBFGC.

Volume de chacune des pyramides

Le volume V du cube ABCDEFGH peut être calculé de deux manières:

$V = V_{SABCD} + V_{SEFGH} + V_{SAEHD} + V_{SBFGC} + V_{SDHGC} + V_{SEFBA}$ ou $V = x^3$

Comme les pyramides ont des volumes égaux donc :

$$V = V_{SABCD} + V_{SEFGH} + V_{SAEHD} + V_{SBFGC} + V_{SDHGC} + V_{SEFBA} = 6 \times V_{SABCD}$$

Il vient par comparaison :

$$V = V \quad \text{équivaut à} \quad 6 \times V_{SABCD} = x^3$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{6} \times x^3$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times x \times x \times \frac{x}{2}$$

Or $x \times x = A_B (\text{Aire du carré de base})$ et $\frac{x}{2} = h$ (hauteur de la pyramide $SABCD$).

$$\boxed{V_{SABCD} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times A_B \times h}$$

D'une manière générale, le volume d'une pyramide est donné par la formule :

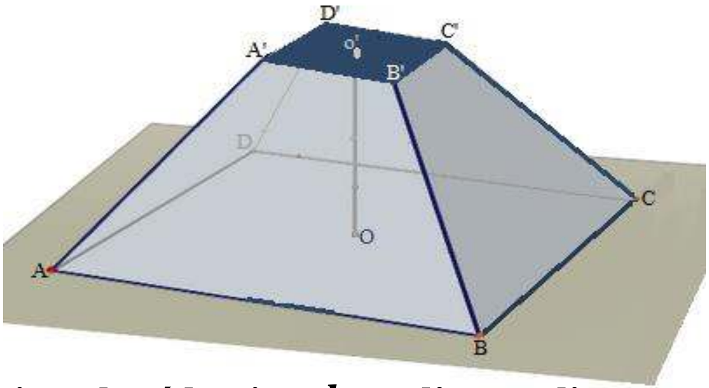
$$\boxed{V = \frac{1}{3} \times A_B \times h}$$

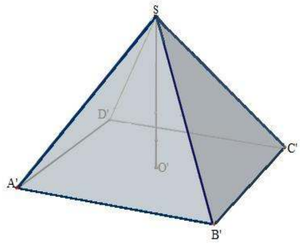
F°) Section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base-coefficient de réduction :

1. Section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base

Il s'agit de sectionner une pyramide suivant un plan parallèle au plan de sa base. Après coupure on obtient deux solides :

- ✓ Le solide ABCDA'B'C'D' appelé tronc de pyramide et
- ✓ Le solide isolé avec le sommet S appelé nouvelle pyramide de hauteur h' et de base A'B'C'D'.





2. Coefficient de réduction k ou d'agrandissement k'.

Les calculs de coefficient de réduction s'apparentent à ceux vus dans la leçon1

a. Relation entre le volume de la pyramide initiale et celui de la nouvelle pyramide.

Voir cône : $V' = k^3 \times V$

b. Relation entre l'aire de la pyramide initiale et celle de la nouvelle pyramide.

Voir cône : $k^2 = \frac{A'_L}{A_L}$; $k^2 = \frac{A'_b}{A_b}$

c. Calcul du volume V'' et de l'aire latérale A''_L du tronc de pyramide

Voir cône : $V'' = (1 - k^3) \times V$; $A'' = (1 - k^2) \times A$