

Chap 2 : ÉQUATIONS - INÉQUATIONS A UNE INCONNUE DANS IR

I- Equations à une inconnue

a) Equations de types $|ax + b| = c$ avec $a \neq 0$

1^{er} cas : $c = 0$; Exemple : résoudre dans IR l'équation $|-2x + 5| = 0$

$$|-2x + 5| = 0 \text{ équivaut à } -2x + 5 = 0$$

$$-2x = -5$$

$$x = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$L'équation admet une solution unique : S = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

2^{eme} cas : $c > 0$; Exemple : résoudre dans IR l'équation $|-2x + 5| = 7$

$$|-2x + 5| = 7 \text{ équivaut à } -2x + 5 = 7 \quad \text{ou} \quad -2x + 5 = -7$$

$$-2x = 7 - 5$$

$$-2x = 2$$

$$x = \frac{2}{-2} = -1$$

$$-2x = -7 - 5$$

$$-2x = -12$$

$$x = \frac{-12}{-2} = 6$$

$$L'équation admet deux solutions uniques : S = \{-1 ; 6\}$$

3^{eme} cas : $c < 0$; Exemple : résoudre dans IR l'équation $|-2x + 5| = -9$

Comme -9 est négatif donc l'égalité $|-2x + 5| = -9$ est absurde, car la valeur absolue est toujours positive et ne peut donc pas être égale à un nombre négatif. Cette équation n'admet pas de solution. On dit aussi que la solution est l'ensemble vide. On note $S = \emptyset$.

b) Equations des types $|a'x + b'| = |c'x + d|$ avec $a' \neq 0$ et $c' \neq 0$

Exemple : résoudre dans IR l'équation $|3x + 2| = |x + 1|$

$$|3x + 2| = |x + 1| \text{ équivaut à } 3x + 2 = x + 1 \quad \text{ou} \quad 3x + 2 = -(x + 1)$$

$$3x - x = 1 - 2$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$3x + 2 = -x - 1$$

$$3x + x = -1 - 2$$

$$4x = -3$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

$$L'équation admet deux solutions : S = \left\{ -\frac{1}{2} ; -\frac{3}{4} \right\}$$

c) **Equation du type :** $ax^2 + b = 0$ avec $a \neq 0$

Exemple : résoudre dans IR les équations $x^2 - 9 = 0$ et $x^2 + 9 = 0$

Résolution directe De $x^2 - 9 = 0$	Par factorisation De $x^2 - 9 = 0$	Absurdité constatée
$x^2 - 9 = 0$ $x^2 = 9$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ $ x = 3$ $x = 3$ ou $x = -3$ $S = \{-3; 3\}$	$x^2 - 9 = 0$ $(x - 3)(x + 3) = 0$ $x - 3 = 0$ ou $x + 3 = 0$ $x = 3$ ou $x = -3$ $S = \{-3; 3\}$	$x^2 + 9 = 0$ $x^2 = -9$; absurde, car dans l'ensemble IR, le carré d'un nombre est toujours égal à un nombre positif ou nul. L'équation admet donc une solution vide. $S = \emptyset$

II- Inéquations

a) **Inéquation produit du type :** $(ax + b)(cx + d) \leq 0$

Exemple : résoudre dans IR l'inéquation $(-2x + 3)(x + 5) \leq 0$

Proposition de démarche

On pose $(-2x + 3)(x + 5) = 0$ afin de trouver les solutions $x = \frac{3}{2} = 1,5$ ou $x = -5$.

On fait un tableau des signes afin de trouver l'intervalle ou les intervalles qui représentent l'ensemble des solutions.

x	$-\infty$	-5	$1,5$	$+\infty$
$(-2x + 3)$	Signe de $-(-2)$ ici +	Signe de $-(-2)$ ici +	Signe de -2 ici -	
$(x + 5)$	Signe de $-(1)$ ici -	Signe de 1 ici +	Signe de 1 ici +	
$(-2x + 3)(x + 5)$	Signe du produit ici -	Signe du produit ici +	Signe du produit ici -	

L'inégalité " $\leq$ " suggère de considérer les intervalles des cases jaunes contenant les signes – des cases vertes. Il s'agit des intervalles $]-\infty; -5]$ et $[1,5; +\infty[$.

La solution de l'inéquation S est : $S =]-\infty; -5] \cup [1,5; +\infty[$.

NB : Il existe une autre démarche, qui consiste à adopter un raisonnement logique, basé sur le signe d'un produit de deux nombres. Ainsi, pour deux nombres quelconques a et b , il vient :

- ✓ $a \times b \leq 0$, si a et b sont de signes contraires.
- ✓ $a \times b \geq 0$ si a et b sont de mêmes signes.

Par analogie, on a, $(-2x + 3)(x + 5) \leq 0$ équivaut à deux systèmes S_1 ; S_2 (page suivante).

$$S_1: \begin{cases} -2x + 3 \geq 0 \\ x + 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x \geq -3 \\ x \leq -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1,5 \\ x \leq -5 \end{cases}$$



$$S_1 =]-\infty; -5]$$

ou

$$S_2: \begin{cases} -2x + 3 \leq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1,5 \\ x \geq -5 \end{cases}$$



$$S_2 = [1,5; +\infty[$$

La solution S de l'inéquation est l'union des solutions S_1 et S_2 . Elle se note :

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty; -5] \cup [1,5; +\infty[$$