

Chapitre 1 : RACINE CARRÉE

I. Définition – Notation - Lecture :

a°) Définition :

Soit m un nombre positif ou nul, on appelle racine carrée de m , le nombre positif ou nul dont le carré est égal à m lui-même.

b°) Notation :

La racine carrée d'un nombre positif m se note $\sqrt{m}$.

c°) Lecture :

La notation $\sqrt{m}$ se lit : «racine carrée de m ».

La notation $\sqrt{15}$ se lit : «racine carrée de 15 ».

Dans la notation $\sqrt{m}$, le symbole $\sqrt{}$ et le nombre m sont respectivement appelés : «le radical» et le «radicande».

Remarque :

- Compte tenu de la définition, on a : $(\sqrt{m})^2 = m$
- La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

Exemples : par définition, on a :

$$(\sqrt{2})^2 = 2 ; \quad (\sqrt{7})^2 = 7 ; \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = \frac{5}{3} ; \quad (\sqrt{\sqrt{2}})^2 = \sqrt{2} ; \quad (\sqrt{0.5})^2 = 0.5$$

$\sqrt{-3} = \text{erreur}$; -3 est un nombre négatif, donc sa racine carrée n'existe pas.

II. Nombres irrationnels, ensemble IR

Dans les classes précédentes (6^e ; 5^e ; 4^e), tu as vu :

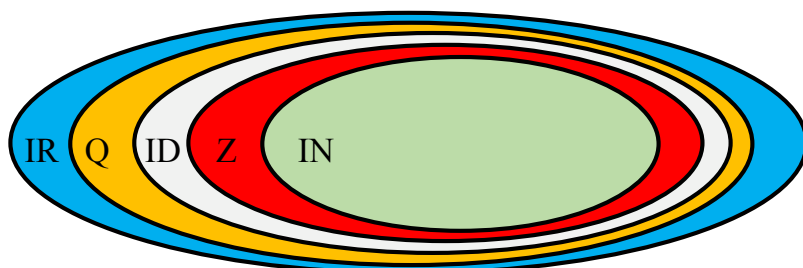
- Les nombres entiers naturels regroupés dans l'ensemble $\mathbb{N}$
- Les nombres entiers relatifs regroupés dans l'ensemble $\mathbb{Z}$
- Les nombre décimaux relatifs regroupés dans l'ensemble $\mathbb{D}$
- Les nombres rationnels regroupés dans l'ensemble $\mathbb{Q}$

Tu as aussi vu l'inclusion entre ces ensembles comme suit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Il existe des nombres qui n'appartiennent à aucun de ces ensembles. Ce sont des nombres qui n'admettent pas d'écriture fractionnaire. En mathématiques, on les appelle **nombres irrationnels**. Les nombres rationnels et les nombres irrationnels constituent l'ensemble $\mathbb{IR}$ des nombre réels. Il vient : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Exemple : $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel car il n'admet pas d'écriture fractionnaire

Remarque : Tous les nombres vus jusqu'ici sont aussi des nombres réels.



III. Propriétés

Propriété 1 : m et n étant deux nombres réels positifs ou nul, on a :

$$\sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{m \times n} \quad \text{et} \quad \sqrt{m \times n} = \sqrt{m} \times \sqrt{n}$$

Exemples :

$$\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{5 \times 2} = \sqrt{10} \quad \text{et} \quad \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{3} \times \sqrt{7}$$

Propriété 2 :

m et n étant deux nombres réels positifs tels que $n \neq 0$, on a :

$$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

Exemples : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$; $\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{\frac{7}{6}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$

IV. Calcul sur les radicaux

a) **Signe d'un réel comportant des radicaux.**

Exemple : On donne les réels suivants : $A = 2 - \sqrt{3}$ et $B = -7 + 3\sqrt{2}$.

Détermine le signe de A et celui de B.

Proposition de démarche

$$\begin{array}{ccc} A = 2 & - & \sqrt{3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (2)^2 & - & (\sqrt{3})^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 4 & - & 3 \\ \swarrow & & \searrow \\ & 1 & \end{array}$$

Comme 1 est positif, donc A est positif.

$$\begin{array}{ccc} B = -7 & + & 3\sqrt{2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ -(7)^2 & + & (3\sqrt{2})^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ -49 & + & 18 \\ \swarrow & & \searrow \\ & -31 & \end{array}$$

Comme -31 est négatif, donc B est négatif

b) **Carrés parfaits**

Définition :

On appelle carré parfait, tout entier naturel dont la racine carrée est un entier naturel.

Exemples : utilise une machine pour calculer

$$\sqrt{9} = 3 \text{ donc } 9 \text{ est un carré parfait}$$

$$\sqrt{5} = 2,236 \dots \text{ donc } 5 \text{ n'est pas un carré parfait}$$

$$\sqrt{4} = 2 \text{ donc } 4 \text{ est un carré parfait}$$

$$\sqrt{2,25} = 1,5 \text{ donc } 2,25 \text{ n'est pas un carré parfait}$$

c) **Multiplication de deux réels de la forme $a\sqrt{n}$ avec ($n > 0$ et a un rationnel quelconque).**

A retenir :

Soient $a\sqrt{n}$ et $b\sqrt{m}$ deux nombres réels tels que m et n strictement positifs ; a et b des nombres rationnels quelconques, il vient : $a\sqrt{n} \times b\sqrt{m} = a \times b\sqrt{n \times m}$

Exemples :

$$4\sqrt{3} \times 7\sqrt{2} = 4 \times 7\sqrt{3 \times 2} = 28\sqrt{6}$$

$$-5\sqrt{6} \times 3\sqrt{7} = -5 \times 3\sqrt{6 \times 7} = -15\sqrt{42}$$

d) Ecriture d'un réel sous la forme $a\sqrt{n}$ avec $n \in \mathbb{IN}$ et $a \in \mathbb{Q}$.

Exemple 1 : écrire $Y = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ sous la forme $a\sqrt{n}$, précisez les valeurs de a et n .

$$Y = 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (5 + 7 - 3)\sqrt{2} = 9\sqrt{2} \quad ; \quad a = 9 \quad \text{et} \quad n = 2$$

Exemple 2 : écrire $Z = 5\sqrt{12} - 2\sqrt{27}$ sous la forme $a\sqrt{n}$, précisez les valeurs de a et n .

$$\begin{aligned} Z &= 5\sqrt{12} - 2\sqrt{27} \\ &= 5\sqrt{4 \times 3} - 2\sqrt{9 \times 3} \quad ; \quad 4 \text{ et } 9 \text{ sont les carrés parfaits contenus dans 12 et 27} \\ &= 5 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3} \\ &= 5 \times 2 \times \sqrt{3} - 2 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = (10 - 6)\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad ; \quad a = 4 \quad \text{et} \quad n = 3 \end{aligned}$$

e) Ecriture d'un réel sous la forme $c + a\sqrt{n}$ avec $n \in \mathbb{IN}$ et $(a; c)^2 \in \mathbb{Q}^2$

Exemple 1 : écrire $Y = \sqrt{16} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 9\sqrt{2}$ sous la forme $c + a\sqrt{n}$; précisez c ; a et n

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{16} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 9\sqrt{2} \quad ; \quad 16 \text{ est un carré parfait.} \\ &= 4 + (7 - 3 + 9)\sqrt{2} \\ &= 4 + 13\sqrt{2} \quad ; \quad c = 4, \quad a = 13 \quad \text{et} \quad n = 2 \end{aligned}$$

Exemple 2 : écrire $Y = -\sqrt{20} + 6\sqrt{25} - 7\sqrt{45}$ sous la forme $c + a\sqrt{n}$; précisez c ; a et n

$$\begin{aligned} Y &= -\sqrt{20} + 6\sqrt{25} - 7\sqrt{45} \quad ; \quad 25 \text{ est un carré parfait.} \\ &= -\sqrt{4 \times 5} + 6 \times 5 - 7\sqrt{9 \times 5} \quad ; \quad 4 \text{ et } 9 \text{ sont les carrés parfaits contenus dans 20 et 45} \\ &= -\sqrt{4} \times \sqrt{5} + 30 - 7\sqrt{9} \times \sqrt{5} \\ &= -2 \times \sqrt{5} + 30 - 7 \times 3 \times \sqrt{5} \\ &= -2\sqrt{5} + 30 - 21\sqrt{5} \\ &= (-2 - 21)\sqrt{5} + 30 \\ &= -23\sqrt{5} + 30 \\ &= +30 - 23\sqrt{5} \quad ; \quad c = 30, \quad a = -23 \quad \text{et} \quad n = 5 \end{aligned}$$

f) Expressions conjuguées

$a + b\sqrt{c}$ est une expression conjuguée de $a - b\sqrt{c}$

$-a - b\sqrt{c}$ est une expression conjuguée de $-a + b\sqrt{c}$

Il convient juste de changer un signe $+$ en $-$ et vice versa.

Exemples :

$7 - 2\sqrt{3}$ est une expression conjuguée de $7 + 2\sqrt{3}$

$-11 + 5\sqrt{2}$ est une expression conjuguée de $-11 - 5\sqrt{2}$

g) Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient irrationnel

Il s'agit de faire en sorte qu'il n'y ait plus de radical au dénominateur. On utilisera l'expression conjuguée pour réussir cela.

Exemple : écrire $Y = \frac{\sqrt{2}}{5+\sqrt{17}}$ et $W = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ sans radical au dénominateur. Il vient :

$$\begin{aligned}
 Y &= \frac{\sqrt{2}}{5 + \sqrt{17}} \times \frac{5 - \sqrt{17}}{5 - \sqrt{17}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(5 - \sqrt{17})}{(5 + \sqrt{17})(5 - \sqrt{17})} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(5 - \sqrt{17})}{(5)^2 - (\sqrt{17})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{2}(5 - \sqrt{17})}{25 - 17} = \frac{\sqrt{2}(5 - \sqrt{17})}{8}
 \end{aligned}$$

$$W = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{6}}{3}$$

h) Intervalles dans IR

Soit a et b deux réels connus et x une variable.

Si $a < x < b$, alors $x \in]a ; b[$; $]a ; b[$ est un intervalle borné ouvert en a et ouvert en b .

Si $a < x \leq b$, alors $x \in]a ; b]$; $]a ; b]$ est un intervalle borné ouvert en a et fermé en b .

Si $a \leq x < b$, alors $x \in [a ; b[$; $[a ; b[$ est un intervalle borné fermé en a et ouvert en b .

Si $a \leq x \leq b$, alors $x \in [a ; b]$; $[a ; b]$ est un intervalle borné fermé en a et en b .

Si $x > a$, alors $x \in]a ; +\infty[$; $]a ; +\infty[$ est un intervalle non borné ouvert en a .

Si $x \geq a$, alors $x \in [a ; +\infty[$; $[a ; +\infty[$ est un intervalle non borné fermé en a .

Si $x < a$, alors $x \in]-\infty ; a[$; $] -\infty ; a[$ est un intervalle non borné ouvert en a .

Si $x \leq a$, alors $x \in]-\infty ; a]$; $] -\infty ; a]$ est un intervalle non borné fermé en a .

i) Encadrement d'un nombre comportant un radical

Exemple 1 : On donne le nombre réel $A = 3\sqrt{2} + 5$.

Donner un encadrement de A à 10^{-3} sachant que : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

Proposition de démarche

Recopier l'encadrement : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

Multiplier par 3 : $3 \times 1,414 < 3 \times \sqrt{2} < 3 \times 1,415$

Ajouter 5 : $3 \times 1,414 + 5 < 3 \times \sqrt{2} + 5 < 3 \times 1,415 + 5$

Tout calcul fait : $9,242 < 3\sqrt{2} + 5 < 9,245$

Réponse attendue : $9,242 < A < 9,245$

Exemple 2 : On donne le nombre réel $B = 4 - 5\sqrt{2}$.

Donner un encadrement de B à 10^{-3} sachant que : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$.

Proposition de démarche

Recopier l'encadrement : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

Multiplier par -5 : $-5 \times 1,414 > -5 \times \sqrt{2} > -5 \times 1,415$

Ajouter 4 : $-5 \times 1,414 + 4 > 4 - 5 \times \sqrt{2} > -5 \times 1,415 + 4$

Tout calcul fait : $-3,070 > 4 - 5\sqrt{2} > -3,075$

Réponse attendue : $-3,075 < B < -3,070$

V. Racine carrée et Valeur absolue d'un réel

Propriétés : Soit a un nombre réel quelconque. Il vient : $\sqrt{(a)^2} = |a|$

- Si a est positif au départ, alors $\sqrt{(a)^2} = |a| = a$
- Si a est négatif au départ, alors $\sqrt{(a)^2} = |a| = -a$
- Si a est nul, alors $\sqrt{(a)^2} = (\sqrt{a})^2 = |a| = a = 0$

Exemple :

$$T = \sqrt{(-3 + \sqrt{5})^2} = |-3 + \sqrt{5}|. \text{ L'étude du signe de } -3 + \sqrt{5} \text{ montre qu'il est négatif.}$$

$$\text{Il vient : } T = \sqrt{(-3 + \sqrt{5})^2} = |-3 + \sqrt{5}| = -(-3 + \sqrt{5}) = +3 - \sqrt{5}$$

VI. Valeur exacte et valeur approchée d'un réel

Exemple : on donne le réel $A = \sqrt{13}$. En déterminant A avec une calculatrice, on obtient :

$$A = 3,6055512754639892931192212674705 \dots$$

Les nombres issus de A comme 3,6 ; 3,605 ; 3,6055 ; ou encore 3,60555127 sont des

valeurs approchées de A .

Le nombre réel $\sqrt{13}$ est la valeur **exacte** de A .