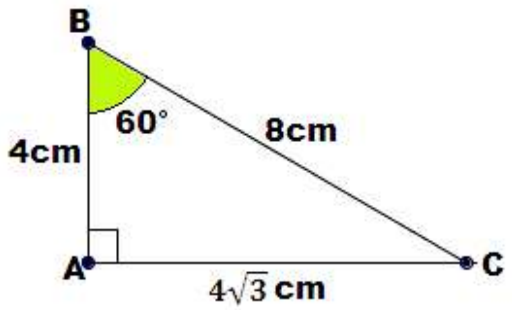
Chap 2 : TRIGONOMÉTRIE

Rappel : Un angle aigu est un angle dont la mesure non nulle est strictement inférieure à 90°.

I. Cosinus ; sinus et tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Exemple : On considère le triangle rectangle ci-dessous :



On s'intéresse à l'angle $\widehat{ABC}$ ou $\widehat{B}$ dont la mesure est de 60° .

- ✓ BC est l'hypoténuse de ce triangle ;
- ✓ AC est le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$;
- ✓ AB est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$;

En calculant à l'aide d'une machine, le cosinus de 60°, on trouve $cosinus(60°) = 0.5$

En calculant le rapport $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$, on trouve $\frac{AB}{BC} = \frac{4cm}{8cm} = 0.5$

On remarque qu'on a trouvé le même résultat. On en déduit que $cosinus(60°) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$

En calculant à l'aide d'une machine le sinus de 60°, on trouve $sinus(60°) = 0.866 \ldots$

En calculant le rapport $\frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$, on trouve $\frac{AC}{BC} = \frac{4\sqrt{3}cm}{8cm} = 0.866 \ldots$

On remarque qu'on a trouvé le même résultat. On en déduit que $sinus(60°) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

En calculant à l'aide d'une machine la tangente de 60°, on trouve $tangente(60°) = 1.732 \ldots$

En calculant le rapport $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$, on trouve $\frac{AC}{AB} = \frac{4\sqrt{3}cm}{4cm} = 1.732 \ldots$

On remarque qu'on a trouvé le même résultat. On en déduit que $tangente(60°) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

Dans un triangle ABC rectangle en A, le cosinus, le sinus et la tangente de $\widehat{B}$ notés respectivement cos ; sin et tan ont pour formules :

$$\cos\widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

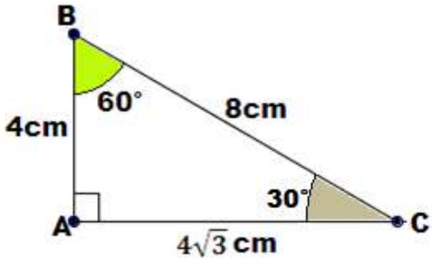
$$\sin\widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$

II. Sinus et cosinus d'angles complémentaires

Rappel : *On dit que deux angles sont complémentaires lorsque la somme de leur mesure est égale à 90°.*

Exemple :



En calculant $\hat{B}+\hat{C}$ on trouve, $\hat{B}+\hat{C}=60°+30°=90°$. On en déduit que $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont des angles complémentaires.

En calculant avec une calculatrice $cos60°$, on trouve :$cos60°=0.5$ donc $cos\hat{B}=0.5$
En calculant avec une calculatrice $sin30°$, on trouve, $sin30°=0.5$ donc $sin\hat{C}=0.5$
En calculant avec une calculatrice $cos30°$, on trouve, $cos30°=0.866\ldots$ donc $cos\hat{C}=0.866$
En calculant $sin60°$, on trouve, $sin60°=0.866\ldots sin\hat{B}=0.866\ldots$
On remarque que les angles complémentaires $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont tels que $cos\hat{B}=sin\hat{C}$ et $cos\hat{C}=sin\hat{B}$

Dans un triangle rectangle dont les angles complémentaires sont θ° et α° on a :

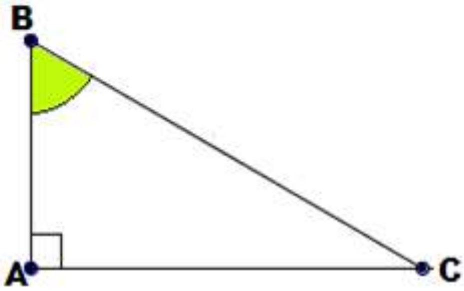
$\cos\theta°=\sin\alpha°$ et $\cos\alpha°=\sin\theta°$

III. Relations trigonométriques

Exemple : $\hat{B}$ est un angle aigu, montrons que :

$(cos\hat{B})^2+(sin\hat{B})^2=1$ et $tan\,\hat{B}=\frac{sin\hat{B}}{cos\hat{B}}$

Il vient :



$$cos\hat{B}=\frac{AB}{BC} \quad donc \quad AB=BC\times cos\hat{B}$$

$$sin\hat{B}=\frac{AC}{BC} \quad donc \quad AC=BC\times sin\hat{B}$$

D'après le théorème de Pythagore, on a : $AB^2+AC^2=BC^2$.

Il vient :

$$AB^2+AC^2=BC^2$$

$$(BC\times cos\hat{B})^2+(BC\times sin\hat{B})^2=BC^2$$

$$BC^2(cos\hat{B})^2+BC^2(sin\hat{B})^2=BC^2$$

$$BC^2\left[(cos\hat{B})^2+(sin\hat{B})^2\right]=BC^2$$

$$\left[(cos\hat{B})^2+(sin\hat{B})^2\right]=\frac{BC^2}{BC^2}=1$$

$$(cos\hat{B})^2+(sin\hat{B})^2=1$$

$$tan\,\hat{B}=\frac{AC}{AB}=\frac{BC\times sin\hat{B}}{BC\times cos\hat{B}}=\frac{sin\hat{B}}{cos\hat{B}}$$

$$tan\,\hat{B}=\frac{sin\hat{B}}{cos\hat{B}}$$

Les relations $(cos\hat{B})^2+(sin\hat{B})^2=1$ et $tan\,\hat{B}=\frac{sin\hat{B}}{cos\hat{B}}$ sont des relations trigonométriques.

IV. Sinus, cosinus et tangente d'un angle de mesure 30°, 45° ou 60°.

Mesures d'angle	Cosinus	Sinus	Tangente
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

Utilisation de la calculatrice

Mettre la calculatrice en mode degré (deg ou D)

- Pour donner une valeur approchée de cos50° à 10^{-2} près ;

On tape sur le clavier de la calculatrice allumée

cos 50° =

Il s'affiche sur l'écran 0,6427876096865539

On écrit : cos50°=0,64 à 10^{-2} à près.

- Pour déterminer une valeur approchée de $\hat{A}$ lorsque cos$\hat{A}$=0,173 à 10^{-2} près ;

On tape sur le clavier de la calculatrice allumée

Shift ou inv cos 0,173 =

Il s'affiche sur l'écran 80,0377085705336

On écrit : $\hat{A}$ =80,04 à 10^{-2} à près.

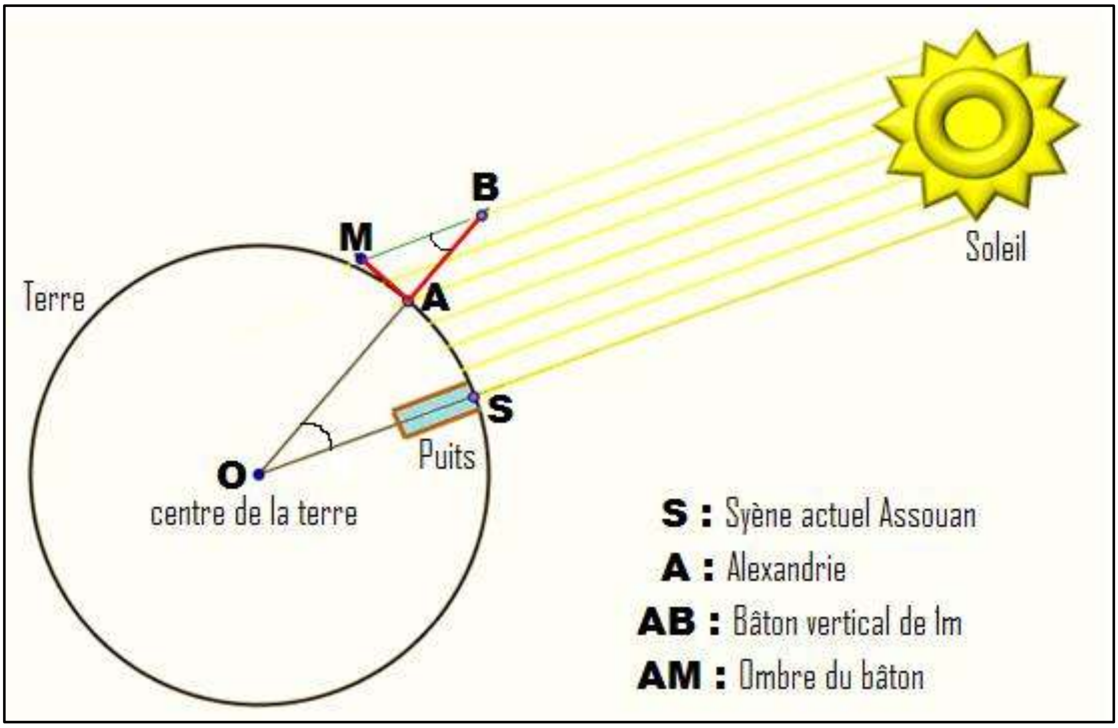
Histoire

Rayon de la terre avec Eratosthène

Eratosthène est célèbre pour la mesure de la terre et pour le procédé de détermination des nombres premiers appelé «Crible d'Eratosthène»...

Vers 275-194 av. J.C

Lors du solstice d'été, alors qu'il se trouve à Syène, Eratosthène remarque que le soleil ne laisse aucune ombre au fond d'un puits et donc qu'il est parfaitement à la verticale.
A Alexandrie, un bâton vertical de 1 mètre fait une ombre de 0,125 mètres. La distance de Syène à Alexandrie étant environ 820km, Ératosthène en déduit le rayon de la terre.
Les rayons solaires sont supposés parallèles.



Le triangle AMB est rectangle en A, il vient :

$$tan\hat{B} = \frac{AM}{AB} = \frac{0.125}{1} = 0.125 \qquad donc \qquad \hat{B} = 7.12°$$

Les droites (BM) et (SO) coupées par la sécante (OB) définissent des angles alternes internes $\widehat{ABM}$ et $\widehat{BOS}$ égaux donc $\widehat{BOS} = 7.12°$.

La distance entre A et S étant de 820km=820.000m, il vient :

$$AS = Rayon \times \frac{7.12°\pi}{180°} \quad donc \quad Rayon = \frac{180° \times AS}{7.12°\pi}$$

$$Rayon = \frac{180 \times AS}{7.12\pi}$$