===

République du Sénégal
Ministère de l'éducation nationale
Inspection d'académie de Rufisque
Inspection de l'éducation et de la formation de Diamniadio
Collège d'excellence franco arabe Daara Rama
Année scolaire :2023-2024

Composition de Mathématiques du 2$^{\text{nd}}$ semestre

Niveau : 2$^{\text{nde}}$SA — **Durée :** 3 heures

===

NB : Cette épreuve comporte trois (3) exercices et un annexe (à rendre) avec des figures.

▷ Exercice 1 — 7pts

On considère

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 + \frac{1}{x^2}$$ une fonction numérique.

1. **a.** Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f. **(0,5pt)**

   b. Etudier la parité de la fonction f. **(0,5pt)**

2. Soit a et b deux éléments de D_f.

   a. Montrer que $f(a) - f(b) = (a^2 - b^2)\left(1 - \frac{1}{a^2b^2}\right)$. **(0,75pt)**

   b. Montrer que si $a \in [1; +\infty[$ et $b \in [1; +\infty[$ tel que $a < b$ alors $f(a) - f(b) < 0$. **(0,75pt)**

   c. En déduire la variation de f sur $[1; +\infty[$. **(0,5pt)**

3. **a.** Montrer que pour tout $x \in D_f; f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$. **(0,5pt)**

   b. Montrer que si $a \in]0; 1]$ et $b \in]0; 1]$ tel que $a < b$ alors $f\left(\frac{1}{a}\right) > f\left(\frac{1}{b}\right)$. **(1pt)**

   c. En déduire d'après la question **3.a** que f est strictement décroissante sur $]0; 1]$ **(0,5pt)**

4. En utilisant la parité de la fonction f ; donner les variations de f sur $]-\infty; -1]$ et sur $[-1; 0[$. **(0,5pt)**

5. Dresser le tableau de variations de f. **(0,5pt)**

6. On donne le tracé (C_f) de la courbe représentative de la fonction f dans l'annexe (**figure 1**).

   a. Compléter le tracé de la courbe (C_f) sur $]-\infty; 0[$ **(0,5pt)**

   b. Déterminer graphiquement le signe de la fonction f sur le domaine de définition D_f. **(0,5pt)**

✍ ▷ **Exercice 2** **6pts**

Partie A

ABC est un triangle rectangle en A. Le point H est le pied de la hauteur issue de A. I et J sont respectivement les projetés orthogonaux de H sur les droites (AB) et (AC). (AH) et (IJ) se coupent en O. (Voir **figure 2 Annexe**, qu'on complétera au fur et à mesure)

1. Quelle est la nature du quadrilatère $AIHJ$? **(0,5pt)**

2. La parallèle à (IJ) passant par A coupe (HI) en P et (HJ) en Q.
On considère l'homothétie h de centre H qui transforme J en Q.

- **a.** Quelle est l'image de (IJ) par h ? **(0,5pt)**
- **b.** Déterminer $h(I)$ et montrer que $h(O) = A$. **(1pt)**
- **c.** Quel est le rapport de l'homothétie h ? **(0,5pt)**
- **d.** En déduire que I et J sont les milieux respectifs de $[PH]$ et $[HQ]$. **(0,5pt)**

3. Soit $S_A(Q) = P$; écrire S_A comme composée de deux transformations à déterminer. **(0,5pt)**

Partie B

On considère la transformation f qui à tout point $M(x; y)$ du plan associe le point $M'(x'; y')$ tel que $\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$

1. Démontrer que f admet un point invariant I dont on précisera les coordonnées. **(0,5pt)**

2. Démontrer qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$. **(0,5pt)**

3. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f. **(0,5pt)**

4. Soit (D) la droite d'équation $3x - 4y = 5$. Détermine une équation de la droite (D') image de (D) par f. **(1pt)**

✍ ▷ **Exercice 3** **7pts**

1. Représenter un cube $ABCDEFGH$ de 7cm d'arête en perspective cavalière avec $k = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 60°$. **(1pt)**

2. Dans la suite, on considère le cube $ABCDEFGH$ (Voir **figure 3 Annexe**) avec I milieu de $[AB]$, J milieu de $[EF]$; $K \in [BC]$; $M \in [DH]$ tel que $HM = \frac{2}{3}HD$ et $L \in [GH]$

- **a.** Quelle est la position relative des droites (LM) et (DG) ? **(0,5pt)**
- **b.** Quelle est la position relative des droites (IJ) et (DH) ? **(0,5pt)**
- **c.** Montrer que les points A, E, C et G sont coplanaires. **(0,5pt)**
- **d.** Montrer que la droite (CG) est parallèle au plan (MIJ). **(1pt)**
- **e.** Montrer que la droite (AF) est sécante au plan (DIJ). **(1pt)**
- **f.** Etudier la position relative des plans (FCG) et (AEB). **(1pt)**
- **g.** Montrer que les plans (MIJ) et (MBF) sont sécants suivant la droite (DH). **(1pt)**
- **h.** Montrer que les droites (AE) et (FG) sont orthogonales. **(0,5pt)**

NDEWENDEUL : Construire la section du cube par le plan (KLM). **(1,5pt)**

BONNE CHANCE