Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Matière : Mathématique	**Généralités sur les fonctions numériques**	**Professeur** : M. AMAR FALL
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Classe** : 1S2

Exercice 1 :

Domaine de définition d'une fonction

On demande de déterminer l'ensemble de définition de f

1) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{(x-2)(x+3)}$ **2)** $f(x) = \frac{\sqrt{(1-x)(2+x)}}{x^2+x}$ **3)** $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$ **4)** $f(x)\sqrt{\sqrt{x^2+x}-2}$

5) $f(x) = x\sqrt{\left|\frac{x-1}{1-x^2}\right|}$ **6)** $f(x) = \frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$ **7)** $f(x) = \frac{2x\sqrt{x}-x}{x^2}$ **8)** $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+1}-1}$

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|1-x|}}{x^2-x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2x-3}{\sqrt{2x-1}-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **10)** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , x < 1 \\ \sqrt{\sqrt{2x^2-3x}-x} & , x \geq 1 \end{cases}$

Exercice 2 :

Parité et Périodicité d'une fonction

1) On demande d'étudier la parité de f(x)

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$ **c)** $f(x) = \frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$ **d)** $f(x) = \frac{2x\sqrt{x}-x}{x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{x-5}-\sqrt{x+5}$ **f)** $f(x) = E(x)$ **g)** $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

2) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

Calculer $f(x+4)$, $f(x+6)$, $f(x+8)$ en fonction de $f(x)$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 3 :

Prolongement et Restriction

Dans chacun des cas suivants, déterminer la restriction de la fonction f à l'intervalle I puis à l'intervalle J.

1. $f(x) = \frac{x^3}{|x|} + 1$; $I =]0; +\infty[$ et $J =]-\infty; 0[$
2. $f(x) = \frac{x-1}{|x|-1}$; $I =]0; 1[$ et $J =]-\infty; 0[$
3. $f(x) = |2x + 1| - |x - 3|$; $I = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et $J = [3; +\infty[$

Exercice 4 :

Majoration et Minoration

1. $f(x) = x^2 + 4x - 1$. Montrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = \frac{3x-7}{x+2}$. Montrer que f est majorée sur $[2; +\infty[$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$. Montrer que f est bornée sur $]5; +\infty[$

Exercice 5 :

Maximum et Minimum

1. $f(x) = x^2 + 2x - 4$.
   a. Montrons que f admet un maximum relatif en 2 sur l'intervalle $[-4; 2]$ puis préciser ce maximum.
   b. Montrer que f admet un minimum absolu en -1 et préciser ce minimum.

Exercice 6 :

Axe de Symétrie-Centre de symétrie

(O, I, J) est un repère orthonormé et f, une fonction numérique à variable réelle.

1. Montrer que la droite (Δ) est un axe de symétrie de C_f dans chacun des cas suivants :
   a. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$; $(\Delta): x = -1$
   b. $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{2x^2+8x+9}$; $(\Delta): x = -2$
2. Montrer que le point I est un centre de symétrie de C_f dans chacun des cas suivants :
   a. $f(x) = \frac{x^2-3x+3}{1-x}$; $I\binom{1}{1}$

b. $f(x) = \frac{x^3-x^2-x}{2x^2-4x+1}$; $I\binom{1}{1}$

Exercice 7 :

Soit f l'application de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$. Trouver toutes les applications affines g telles que : $gof = fog$.

Exercice 8 :

A. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x^2-x}$ **2.** $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{x+1} \; si \; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2-1} \; si \; x \geq 0 \end{cases}$ **3.** $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+x}+x-2}$;

4. $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-x-2}}{x^2+x-2}$

B. On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \sqrt{4-x}$ et $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

a) Déterminer les domaines de définition des fonctions f et g.

b) Déterminer le domaine de définition de gof

c) Calculer $gof(x)$

Exercice 9 :

Soient f, g et h des fonctions numériques définies par
$f(x) = \frac{2x^2-4x+1}{x^2-2x-15}$, $g(x) = \sqrt{x^2-4}$ et $h(x) = \frac{4x+1}{x-4}$

1) Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions

2) Montrer que $I\binom{4}{4}$ est un centre de symétrie de la courbe Ch.

3) Montrer que g est une fonction paire. Quelle interprétation pour la courbe Cg ?

4) Montrer que la droite (D) : $x = 1$ est un axe de symétrie de Cf.

5) Déterminer Dhof et donner hof(x), Déterminer Dhog et donner hog(x)

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie sur [-3 ; +∞ [par $f(x) = \frac{2x+3}{x+5}$

1) Démontrer que f(x) peut s'écrire $f(x) = 2 - \frac{7}{x+5}$.

2) Démontrer que f est croissante sur [-3 ; +∞[.

3) a. Démontrer que f admet un minimum le préciser.

b. Démontrer que f admet un majorant.

c. En déduire que f est bornée et indiquer un encadrement de f(x).

4) a) Résoudre dans [-3 ; +∞[l'équation f(x) = 0

b) En déduire le signe de f(x) dans [-3 ; +∞[.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x+1| + |x-1|$.

1) Montrer que $f(-x) = f(x)$ puis conclure sur la parité de f.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Ecrire f(x), suivant les valeurs de x, sans le symbole de la valeur absolue.

3) Etudier les variations de f sur]-∞ ; –1], [–1 ; 1] et [1 ; +∞[

4) Dresser son tableau de variation.

5) Représenter graphiquement f.

Exercice 12 :

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = x^2$.

On notera (C_f) et (C_g) leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O.\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $[-2\,;2]$

2) Remplir le tableau suivant puis construire la courbe (C_g) de la fonction g sur l'intervalle $[-2\,;2]$

x	-2	-1	0	1	2
g(x)					

3) **a)** Trouver les réels a et b tels que : $f(x) = (x - a)^2 + b$

b) En déduire une expression de f en fonction de g

c) Expliquer comment obtenir (C_f) a partir de (C_g) puis la construire dans le même repère.

4) A partir de (C_f) , expliquer comment construire les courbes des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = f(-x)$

b) $f_2(x) = f(x) + 1$

c) $f_3(x) = f(|x|)$

5) Construire dans le repère précèdent les courbes des fonctions f_1 , f_2 et f_3
(On utilisera des couleurs différentes)

Exercice 13 :

Exploitation graphique

Dans le repère ci-contre sont représentées la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2, 4]$ et la droite (D) : y = x+1.

1. Déterminer graphiquement les images de -1 ; 0 ; et de 1 par f.

2. Résoudre graphiquement

a. $f(x) = 3$, **b.** $f(x) = 4$, **c.** $f(x) = -7$, **d**. $f(x) > 0$, **e.** $f(x) \leq 0$.

3. Résoudre graphiquement

a. f(x) –x–1=0 , b. f(x) –1 ≥ x.