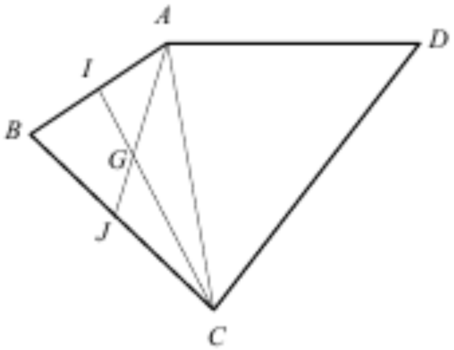
Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Matière : Mathématique	**Exercices sur Barycentre et Produit Scalaire**	**Professeur** : M. AMAR FALL
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Classe** : 1S2

Exercice 1 :



Sur la figure ci-dessus, ABCD est un quadrilatère, I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC] et G est le centre de gravité du triangle ABC.

On considère les points L et K tels que : $\mathrm{L} = \mathrm{bary}\{(\mathrm{A}, 1); (\mathrm{D}, 3)\}$ et $\mathrm{K} = \mathrm{bary}\{(\mathrm{C}, 1); (\mathrm{D}, 3)\}$..

1. Reproduire la figure sur ta copie puis placer les points L et K.
2. Soit H tel que : $\mathrm{H} = \mathrm{bary}\{(\mathrm{A}, 1); (\mathrm{B}, 1); (\mathrm{C}, 1); (\mathrm{D}, 3)\}$.
   - **a.** Montrer que H est le barycentre de G et D affectés de coefficients à préciser.
   - **b.** Montrer que H est le barycentre de J et L affectés de coefficients à préciser.
   - **c.** Montrer que H est le barycentre de I et K affectés de coefficients à préciser.
3. Déduire de la question 2 que les droites (GD), (JL) et (IK) sont concourantes en un point que l'on précisera.

Exercice 2 :

ABCD est un trapèze rectangle en C et D, E un point de [DC]; $AD = 3; DE = 1; BC = 4$

1. **a)** Calculer $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EC}$

   b) Montrer que :

$$\left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$$

c) Calculer en déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 9$

2. a) Calculer EA et EB puis $\cos\widehat{AEB}$

b) En déduire que $AB = \sqrt{17}$

c) Calculer $\cos(\widehat{ACB})$

3. a) Montrer que $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

b) Calculer alors $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$

c) En déduire que les droites (CA) et (BE) sont orthogonales

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $3cm$. I est le milieu de $[AB]$ et K le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$.

1. Faire une figure.

2. a) Calculer KA et KB.

b) En déduire que $CK = \sqrt{7}$.

3. Soit $\Delta = \{M \in P \ tel \ que \ MA^2 - MB^2 = 9\}$

a) Déterminer et construire Δ.

b) Vérifier que $B \in \Delta$.

c) Δ coupe (AC) en D. Montrer que : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 9$.

4. Pour tout point M du plan, on pose : $f(M) = 2MA^2 + MB^2$.

a) Montrer que $f(M) = 2MK^2 + 6$

b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $f(M) = 18$.

c) Vérifier que $B \in (E)$.

Exercice 4 :

On donne un triangle ABC.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan, le vecteur $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est constant. En déduire l'ensemble des points M tels que : : $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AM} = 0$

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{BC}$.

3. Déterminer l'ensemble des points M, tels que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$ et $(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

4. Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 4\ cm$.Déterminer et construire :

a) la ligne de niveau 3 de $M \longmapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$.

b) L'ensemble des points M qui vérifient les deux conditions : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$ et $M \longmapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4$.

c) $D = \{M \in P / 2 < \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq 5\}$.

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a, I le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à (BC).

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2. Quelle est la nature de $ABCD$?

3. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de a.

4. Pour tout point M du plan, montrer que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MI^2 - \frac{a^2}{2} = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} + \frac{a^2}{2}$

5. En déduire l'ensemble E des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{a^2}{2}$ et l 'ensemble F des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MA^2$.

Bonne dégustation scientifique !