Matière : Mathématique	**Série d'Exercices sur Les Applications**	**Professeur** : M. Sarr
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Classe** : 1S2

Exercice 1 :

Reconnaitre une application-Notion d'injectivité et surjection

Dans chacun des cas suivants f est une relation.
Est-elle une application ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 1$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $f : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $f : \mathbb{R} \to]-1 ; 1] : x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

f) $f : [0 ; +\infty[\to [0 ; 1]$: $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2 + 3x$

h) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto (x - y, 3 + y)$

i) $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$

Exercice 3 :

Image direction -Image réciproque

Soit f l'application de $\mathbb{R} - \{ 2 \}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x - 11}{x - 2}$.

1) Soit x un réel tel que $3 \leq x \leq 8$.

a) Encadrer successivement $x - 2$, $-\dfrac{5}{x-2}$ et $f(x)$.

b) En déduire l'image directe par f de l'intervalle $[3 ; 8]$.

2) Déterminer l'image réciproque de : a) -5 ; b) 3 ; c) $]-\infty ; 1[$; d) $\mathbb{R} - \{3\}$.

Exercice 3 :

Soit la correspondance : $f : IR \rightarrow IR$

$$x \mapsto \sqrt{|1-x^2|}$$

1) Justifie que f est une application
2) Soit g la restriction de f sur :$[1\,;+\infty[$
   a) Montre que $g(x) = \sqrt{x^2-1}$
   b) Détermine l'image directe par g de $A = \{1; 2; 3\}$
   c) Détermine l'image réciproque par g de $B =]1; 4]$
   d) Montre que g est une bijection de :$[1\,;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser
   e) Donne l'écriture de g^{-1}
3) On définit la fonction h par $h(x) = \frac{x+1}{x-3}$
   a) Détermine Dgoh et Dhog.
   b) Explicite goh(x).

Exercice 4 :

1) Soit $f : IR \rightarrow IR$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

a) Montrer que $f(2-x) = f(x)$ pour tout x de IR

b) f est elle injective ? Justifier .

c) Quels sont les antécédents par f de 1 et 4 ?

d) f est-elle surjective ?

2) Soit l'application $g:]1; +\infty[\rightarrow]-\infty; 3[$ par $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$

Montrer que g est une bijection et expliciter g^{-1}

Exercice 5 :

A) Soit f et g les fonctions définies par

$$f : IR \rightarrow IR \qquad\qquad g : IR \rightarrow IR$$

$$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2} \qquad\qquad x \mapsto -2x^2+1$$

1. Montrer que pour tout $x \in IR, f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+2}$

2. Etudier la parité de f .

3. Démontrer que $\forall\, x \in IR$ on a : $\frac{1}{2} \leq f(x) < 1$.

4. Démontrer que $\forall\, x \in IR$ on a : $-1 < gof\ (x) \leq \frac{1}{2}$.

5. f est-elle injective, surjective, bijective.

B) 1) Soit h la restriction de f sur $[0;+\infty[\ \rightarrow \left[\frac{1}{2};1\right[$

a) Montrer que h est bijective
b) Donner sa bijection réciproque

Exercice 6 :

Une application f est dite involutive si elle est bijective de I vers I et $f^{-1} = f$.

Soient h et g deux fonctions numériques définies par

$$h : IR - \left\{\frac{1}{2}\right\} \rightarrow IR - \left\{\frac{1}{2}\right\} \qquad g : IR \rightarrow IR$$

$$x \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} \qquad x \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{2}$$

1. Résoudre les équations $g(x) = \frac{1}{2}$; $g(x) = 0$
2. g est-elle injective, surjective ? expliquer clairement.
3. Montrer que h est bijective.
4. En déduire que h est une application involutive.
5. Soit $K = hog$
   - **a.** Déterminer le domaine de définition de K
   - **b.** Déterminer K(x)