

Thème 9 : ANGLES ET TRIGONOMETRIE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Donner la définition de la mesure principale, en radians d'un angle orienté.

Exercice 2

Donner l'expression de la longueur d'un arc de cercle de rayon r intercepté par un angle au centre de mesure α en radians.

Exercice 3

Recopier et compléter la phrase ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

Un quadrilatère est inscriptible si ... de ces ou

Exercice 4

1. Ecrire chacune des expressions ci-dessous en fonction de $\cos x$:

a. $\cos(-x)$; b. $\cos(\pi - x)$; c. $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$; d. $\cos(\pi + x)$; e. $\sin(\frac{\pi}{2} + x)$; f. $\cos(2\pi + x)$.

2. Ecrire chacune des expressions ci-dessous en fonction de $\sin x$:

a. $\sin(-x)$; b. $\sin(\pi - x)$; c. $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$; d. $\sin(\pi + x)$; e. $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$; f. $\sin(2\pi + x)$.

Exercices d'application

Exercice 5

Sur un cercle de centre O et de rayon 3 cm, l'arc $\widehat{AB}$ a pour longueur π cm.

Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$?

Exercice 6

Sur un cercle de centre O et de rayon π cm. L'arc $\widehat{AB}$ a pour longueur 2π cm.

Déterminer une valeur approchée à 0,1 près de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice 7

Recopier et compléter le tableau de correspondance :

Mesure en degrés	60	78	36				
Mesure en radians				$\frac{\pi}{4}$	1,5	2	$\frac{\pi}{2}$

Exercice 8

Dans chacun des cas ci-dessous ; dire si le quadrilatère ABCD est inscriptible ou non.

1. $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$; $\widehat{ADC} = \frac{2\pi}{3}$; $\widehat{BCD} = \frac{4\pi}{5}$; $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{5}$.

2. $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{4}$; $\widehat{ADC} = \frac{5\pi}{8}$; $\widehat{BCD} = \frac{\pi}{4}$; $\widehat{ABC} = \frac{7\pi}{8}$.

$$3. \widehat{BAD} = \frac{2\pi}{3} ; \widehat{ADC} = \frac{\pi}{3} ; \widehat{BCD} = \frac{\pi}{4} ; \widehat{ABC} = \frac{3\pi}{4} .$$

$$4. \widehat{BAD} = \frac{2\pi}{5} ; \widehat{ADC} = \frac{3\pi}{7} ; \widehat{BCD} = \frac{3\pi}{5} ; \widehat{ABC} = \frac{4\pi}{7} .$$

Exercice 9

Pour chacun des énoncés ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Donner le numéro de l'énoncé suivi de la bonne réponse (Ne pas utiliser une calculatrice).

N°	Enoncés	Réponses proposées		
A	Si $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ avec x dans $[-\pi ; \pi[$, alors x est égal à	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$
B	$\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7})$ est égal à	$\sin \frac{\pi}{7}$	$-\cos \frac{\pi}{7}$	$-\sin \frac{\pi}{7}$
C	$\cos \frac{7\pi}{5}$ est	négatif	nul	positif
D	La mesure principale de $\frac{7\pi}{5}$ dans est égale à	$\frac{-3\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$

Exercice 10

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points images des nombres suivants : $\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{6}$.

2. En déduire graphiquement les sinus et cosinus des nombres : $-\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; \frac{3\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{5\pi}{6} ; -\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 11

ABC est un triangle équilatéral tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$.

Donner les mesures principales de des angles $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 12

1. Représenter les angles $(\widehat{Ox, Oy})$, $(\widehat{Ox, Oz})$, $(\widehat{Ot, Oy})$, $(\widehat{Ov, Ot})$ de mesures respectives

$$\frac{\pi}{3} ; -\frac{\pi}{4} ; \frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{8} .$$

2. En déduire la mesure principale de chacun des angles $(\widehat{Oy, Oz})$ et $(\widehat{Ox, Ov})$.

Exercice 13

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 4 cm.

1. Placer un point A sur le cercle (C). Construire le point B du cercle (C) tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{4\pi}{3}$.

2. Quelle est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$?

3. Calculer la mesure de l'arc $\widehat{AB}$.

Exercice 14

1. Construire un triangle OIJ isocèle en O tel que $(\vec{OI}, \vec{OJ}) = \frac{\pi}{2}$ et un point A extérieur au triangle.
2. Construire le point B tel que $AB = 2$ et $(\vec{OJ}, \vec{AB}) = -\frac{\pi}{6}$.
3. Construire le point C tel que $CB = 2$ et $(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Calculer $(\vec{OJ}, \vec{BC})$.

Exercice 15

Reproduire et compléter le tableau des signes ci-dessous :

α	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\sin \alpha$					
Signe de $\cos \alpha$					
Signe de $\tan \alpha$					

Exercice 16

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en utilisant la calculatrice.

α (en radians)	-2	1,5	3	5
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\tan \alpha$				

Exercice 17

Soit un nombre réel x tel que $-\pi < x < 0$ et $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Calculer $\sin x$.

Exercice 18

Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Exercice 19

Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{12}$ sachant que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 20

1. Le réel x est un nombre de l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ et $\sin x = \frac{3}{5}$.

Calculer $\cos x$ et $\tan x$ (sans calculer x).

2. Le réel x est un nombre de l'intervalle $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$ et $\cos x = -\frac{2}{3}$.

Calculer $\sin x$ et $\tan x$ (sans calculer x).

Exercice 21

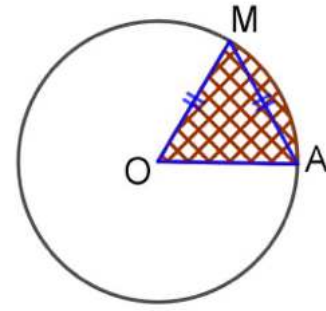
Calculer une valeur approchée de x à 10^{-2} sachant que : $\tan x = \frac{1}{3}$ et $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$.

Exercices de synthèse

Exercice 22

Soit le cercle ci-contre de centre O , de rayon 3,5 cm et passant par les points A et M.

1. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOM}$.
2. Calculer le périmètre et l'aire du domaine en quadrillage.



Exercice 23

Soit ABC un triangle et (C) le cercle circonscrit à ce triangle. Par A, on mène la tangente (tt') au cercle (C). Une droite (d) parallèle à (tt') coupe [AB] en D et [AC] en E.

1. Justifie les égalités suivantes $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$.
2. Montrer que le quadrilatère BDEC est inscriptible.

Exercice 24

Soit ABC un triangle dont tous les angles ont aigus. [AI], [BJ], [CK] sont les trois hauteurs du triangle et H est l'orthocentre.

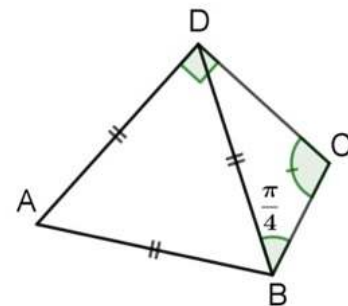
1. Montrer que le quadrilatère BKHI est inscriptible.
2. Montrer que le quadrilatère HICJ est inscriptible.

Exercice 25

Dans le plan orienté on considère la figure ci-contre:

Donner les mesures suivantes :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) ; (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}) ; (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) ; (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) ; (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) ; (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) .$$



Exercice 26

On donne $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

1. Montrer que $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
2. Utilise les relations trigonométriques pour donner les valeurs exactes de :

$$\sin\left(\frac{-\pi}{5}\right) ; \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) ; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \text{ et } \cos\frac{4\pi}{5} .$$

Exercice 27

Soit un nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Simplifier au maximum les expressions ci-dessous:

$$A = \cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x);$$

$$B = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$C = \cos(2\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - x\right);$$

$$D = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right);$$

$$E = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} - \tan\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} \cdot (\text{sachant que } x \text{ est tel que } E \text{ soit définie})$$

Exercice 28

Démontrer que :

$$\cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{6\pi}{10} + \cos \frac{4\pi}{10} = 0.$$

Exercice 29

1. Le réel x étant la mesure principale d'un angle orienté, montrer que :

a. $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$;

b. $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$;

c. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 2 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = 2 \sin^4 x - 2 \sin^2 x + 1$;

d. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$;

e. $\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = 1$;

f. $\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x) (1 - \sin x \cos x)$;

g. $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x) (1 + \sin x \cos x)$.

2. Etablir, pour x et y éléments de $]-\pi, \pi[$, les relations ci-dessous en utilisant la relation fondamentale :

a. $\sin^2 x - \sin^2 y = -\cos^2 x + \cos^2 y$;

b. $\cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$.

Exercice 30

Montrer que :

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 3 \sin^4 x - 3 \sin^2 x + 1 = 3 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 1.$$

Exercice 31

Le réel t étant la principale d'un angle orienté (avec $t \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), démontrer que :

a. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

b. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.

Exercice 32

Soit un nombre réel α tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que : $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = 2\alpha$.

H et I sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B. On pose : $a = AB$.

1. Démontrer que : $BC = 2a \sin \alpha$.

2. Démontrer que $BI = BC \cos \alpha$.

3. Démontrer que $BI = a \sin \alpha$.

4. En déduire que : $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Exercice 33

Démontrer que si ABC est un rectangle alors on a :

$$\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 1 \text{ et } \sin^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{B} + \sin^2 \hat{C} = 2.$$

Exercice 34

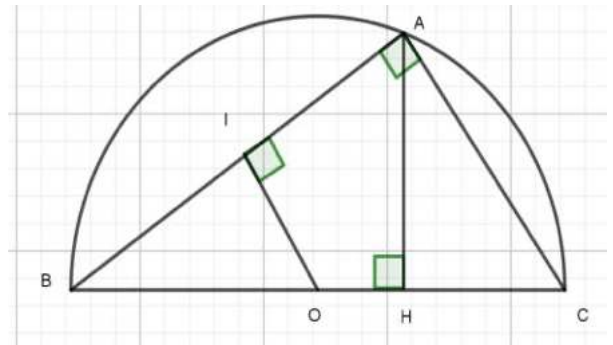
Le réel t étant la mesure principale d'un angle orienté, résoudre le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x \cos t + y \sin t = 1 \\ x \sin t - y \cos t = 1 \end{cases}$$

Exercice 35

Soit le demi-cercle ci-contre de centre O et de diamètre $BC = 2$. A est un point de ce demi-cercle tel que $\widehat{COA}$ soit aigu.

On note α est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
et H le projeté orthogonal de A sur $[AB]$ et I celui de O sur $[AB]$.



1. Démontrer que I est le milieu de $[AB]$ et que $OH = \cos 2\alpha$.

Indications : On pourra utiliser le triangle ABC rectangle en A et la propriété de la droite des milieux dans ce triangle. Pour le calcul de OH , utiliser le triangle isocèle OAC en O , montrer en suite que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = 2\alpha$ et calculer $\cos 2\alpha$ dans le triangle rectangle AOH .

2. Exprimer AB en fonction de $\cos \alpha$.

3. Démontrer que $BH = 2\cos^2 \alpha$ et $OH = 2\cos^2 \alpha - 1$. (Indication : On peut calculer $\cos \alpha$ dans les triangles rectangles ABC et ABH puis faire le produit et conclure)

4. En déduire que : $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ et $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

Application : Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$; $\cos \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 36

1. Construire un triangle rectangle ABC rectangle en A dont l'hypoténuse a pour longueur 8 cm et que

$$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{8}.$$

2. Soit H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu de $[BC]$. Calculer les mesures des angles du triangle AOH . En déduire la longueur exacte de $[OH]$ puis celles de $[AB]$ et $[AC]$.

3. Déterminer les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{8}$.

Exercice 37

L'unité de longueur est le centimètre.

$ABCD$ est un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que : $AB = 10$, $BC = 4$ et $\widehat{ABC} = 65^\circ$.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .

1. Calculer les valeurs approchées à 1 mm près des longueurs CH et CD.
2. Donner la mesure en degrés de $\widehat{ABD}$. En déduire la longueur des diagonales du trapèze ABCD.

Exercice 38

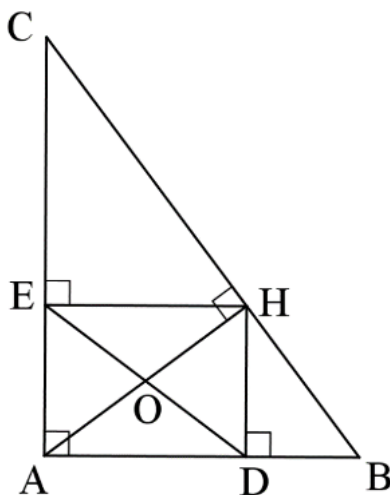
Soit ABC un triangle isocèle, de sommet principal A tel que $BC = a$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$.

Soit (BD) la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ ($D \in (AC)$). On pose $BC = a$.

1. Calculer les mesures en radians des angles $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABD}$.
2. Démontrer que $BD = AD = a$.
3. a. Démontre que $AB = 2a \cos \frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a \cos \frac{2\pi}{5}$;
b. En déduire que $\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ (1).
4. a. Démontrer que $BC = 4a \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$.
b. En déduire que $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$ (2).
5. On pose $x = \cos \frac{\pi}{5}$ et $y = \cos \frac{2\pi}{5}$.
a. En utilisant les relations (1) et (2) et l'égalité $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, calculer $x+y$;
b. En déduire $\cos \frac{\pi}{5}$ et $\cos \frac{2\pi}{5}$.

Exercice 39

On considère la figure codée ci-dessous.



Démontrer que le quadrilatère BCED est inscriptible dans un cercle.