Thème 8 : REPERAGE CARTESIEN

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier et compléter les phrases ci-dessous par ce qui convient :

1. Soit (D) une droite, O et I deux points distincts de (D). Pour tout point M de (D), il existe un réel unique x tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{OI}$.

Le couple (O ; $\overrightarrow{OI}$) est un … de la … . Le point O est … du … et le réel x est … de … dans le … .

2. On considère une droite (D) munie d'un repère (O ; $\overrightarrow{OI}$) , A , B et C les points d'abscisses respectives x_A , x_B et x_C :

   a. la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ relativement au repère (O ; $\overrightarrow{OI}$) est $\overline{AB}$ =…

   b. On a : $\overline{OA}$ = … , $\overline{OB}$ =… et $\overline{OC}$ = …

   c. On a : $\overline{A\ldots} + \overline{\ldots C} = \overline{AC}$.

Exercice 2

Recopier et compléter les phrases ci- dessous par ce qui convient :

1. Soit O , I , J trois points…du plan , le triplet (O , I , J) est un repère du plan et le point O est ….
2. a. Soit O un point du plan et ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) un couple de vecteurs non colinéaires du plan, on dit que le triplet (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est …, le point O est … et ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est … .

   b. Le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est dit orthogonal si … .

   c. Le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) est dit orthonormal si … .
3. Le point M a pour couple de coordonnées (x , y) dans le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) signifie que $\overrightarrow{OM}$ a pour ... dans (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) c'est à dire que $\overrightarrow{OM}$ =… .
4. Le plan étant muni d'un repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) , soit M (x , y) et O' (x_0 , y_0) dans le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

   Si M a pour couple de coordonnées (X, Y) dans le repère (O', $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) alors $\begin{cases} X = \cdots \\ Y = \cdots \end{cases}$
5. Soit $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') dans (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) deux vecteurs du plan et α un nombre réel.

   $\alpha\,\vec{u}$ (… ;…) et $\vec{u} + \vec{v}$ (… ;…).

Exercice 3

Recopier et compléter les phrases ci - dessous pour avoir une proposition vraie :

1. Soient les vecteurs $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x' , y') ; dans (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

   Le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ relativement à (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) noté det ($\vec{u}$, $\vec{v}$) est : det ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = … =… .
2. Deux vecteurs $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x' , y') dans (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) sont colinéaires si et seulement si det ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = … .

Exercices d'application

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-2 ; 1)$, $B(1 ; 3)$ et $C(4 ; 5)$.

1. a. Déterminer les couples de coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ .Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

2. Déterminer le couple de coordonnées du point D de l'axe des abscisses tel que les points A, B et D soient alignés.

Exercice 5

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : $A(-6 ; -1)$, $B(3 ; 1)$, $C(15 ; 4)$ et $D(\frac{15}{2} ; 2)$.

Dans chacun des cas ci-dessous vérifier si les points sont alignés :

1. A, B et C.
2. A, B et D.

Exercice 6

Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points : $E(-7 ; 6)$, $F(3 ; 3)$, $G(-8 ; -1)$ et $H(4 ; -5)$.

1. Vérifier si les droites (EF) et (GH) sont parallèles.
2. On considère le point $L(x ; -5)$, x étant un réel.

   Déterminer x pour que les droites (EF) et (GL) soient parallèles.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la droite (D) passant par $A(-1 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3 ; -2)$.

Les points $B(1 ; -4)$ et $C(5 ; -2)$ appartiennent-ils à (D) .

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer un vecteur directeur de (D) .

1. (D) : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$; 2. (D) : $2x + y - 5 = 0$.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une équation générale de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A(-3 ; 2)$ et $\vec{u}(2 ; -1)$;
2. $A(-2 ; 2)$ et $\vec{u}(0 ; -\frac{1}{2})$;
3. $A(1 ; -4)$ et $\vec{u}(2 ; 0)$;
4. $A = O$ et $\vec{u}(28 ; 35)$.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.

Trouver un système d'équations paramétriques de la droite (D) dans chacun des cas ci-dessous :

1. (D) passe par S $(2\,;-3)$ et admet pour un vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;2)$.
2. (D) passe par A $(2\,;1)$ et B $(3\,;-1)$.
3. (D) admet pour une équation générale : $x + y + 1 = 0$.

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère $(O;\,\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère la droite (D) dont $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est un système d'équations paramétriques. Déterminer une équation générale de la droite (D).
2. Soit (D') la droite dont une équation générale est : $-3x + 2y + 5 = 0$.
   Déterminer un système d'équations paramétriques de (D').

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère $(O;\,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la droite (D) dont $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3\,t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est un système d'équations paramétriques.

Les points A $(3\,;\,-1)$ et B $(0\,;\,5)$ appartiennent – ils à (D) ?

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère $(O;\,\vec{i},\vec{j})$.

Soit une droite (D) dont $\vec{u}\,(5\,;\,-2)$ est un vecteur directeur. Déterminer son coefficient directeur.

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère $(O;\,\vec{i},\vec{j})$.

Dans chacun des cas ci-dessous, construire la droite donnée.

1. La droite (D_1) passe par S $(2\,;-3)$ et admet pour un vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;2)$.
2. La droite (D_2) admet pour une équation générale : $2x - y + 1 = 0$.
3. La droite (D_3) a pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3\,t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
4. La droite (D_4) passe par E $(1\,;2)$ et admet pour un vecteur directeur $\vec{v}\,(2\,;0)$.

Exercices de synthèse

Exercice 15

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.

On considère un réel m et la droite (D) dont une équation générale est : $x + my + 3 = 0$.

Dans chaque cas ci-dessous, déterminer si possible le réel m pour que la condition donnée soit vérifiée.

1. $\vec{u}(3\ ;\ 2)$ est un vecteur directeur de (D).
2. A $(-2\ ;\ 3)$ appartient à (D) .
3. (D) est parallèle à la droite d'équation générale : $3x - y = 0$.
4. (D) est parallèle à l'axe des abscisses.
5. (D) est parallèle à l'axe des ordonnées.
6. (D) passe par l'origine du repère.
7. (D) passe par le point J (0; 1).

Exercice 16

1. Construire un parallélogramme ABCD et les points I , J et K tels que : I est le milieu de [AB] , J le symétrique de I par rapport à A et K le point du segment [AD] tel que $AK = \frac{AD}{3}$.
2. Déterminer les couples de coordonnées des points A , B , C , D , I , J et K dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AK})$.
3. Montrer que les points J , K et C sont alignés .

Exercice 17

1. Construire un carré ABCD de centre O tel que : I soit le milieu de [AB], J le milieu [BC] et G le point d'intersection des droites (AJ) et (CI).
2. Déterminer les couples de coordonnées des points A, B, C, D, O, I, J et G dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
3. Montrer que les points O, G et B sont alignés.

Exercice 18

Construire un triangle ABC rectangle en A.

Les points D, E et F sont tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{BC}$.

On se propose de démontrer de trois manières différentes que les points D , E et F sont alignés.

<u>Méthode 1 :</u>

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Déterminer les couples de coordonnées des points D, E et F.
2. Démontrer que ces points sont alignés.

<u>Méthode 2 :</u>

1. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points D , E et F sont alignés.

<u>Méthode 3 :</u>

On construit la parallèle à (DE) passant par C , elle coupe [AB] en un point I.

1. Démontrer que E est le milieu du segment [AI] .

2. En déduire que le point I est le milieu du segment [EB].
3. Démontrer que (CI) est parallèle à (EF).
4. En déduire que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Placer les points A $(-2 ; 4)$, B $(2 ; 2)$, C $(-5 ; 0)$ et D le point tel que $\overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.
3. Déterminer les coordonnées de D.
4. On considère la droite (Δ) d'équation générale : $6x + y - 14 = 0$.
   Vérifier que B et D appartiennent à (Δ).
5. Déterminer une équation générale de la droite (AC).
6. Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont sécantes et déterminer le couple de coordonnées de leur point d'intersection E.
7. Calculer le couple de coordonnées du point K milieu du segment [AB] et du point L milieu du segment [CD].
8. Démontrer que les points E, K et L sont alignés.

Exercice 20

1. Construire un parallélogramme ABCD.
   Place un point M à l'intérieur de ce parallélogramme.
   Les droites parallèles à (AB) et (AD) passant par M coupent les côtés en E, F, G et H tels que :
   $E \in [AD]$, $F \in [CD]$, $G \in [BC]$ et $H \in [AB]$.
2. On note $(x ; y)$ le couple de coordonnées de M dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
   Donner les coordonnées des points E, F, G et H en fonction de x et y.
3. Déterminer une condition sur x et y pour que (EF) et (GH) soient parallèles.
4. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que les droites (EF) et (GH) soient parallèles.

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (D) est la droite passant par A $(0 ; \frac{1}{2})$ et admettant $\vec{u}\,(-4 ; 3)$ comme vecteur directeur.

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de (D).
2. En déduire les couples de coordonnées des points d'intersection de (D) avec les axes du repère.
3. Déterminer une équation générale de (D) en utilisant deux méthodes différentes.

Exercice 22

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A $(1 ; 1)$ et B $(2 ; 0)$.

1. a. Déterminer un vecteur directeur de la droite (AB).
   b. En déduire une équation générale de la droite (AB).

2. a. Déterminer un système d'équations paramétriques de (AB).
   b. En déduire si les points C $(3\ ;-1)$ et D $(2\ ;0)$ appartiennent à (AB) ?
3. Soit (D) la droite dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

   a. Déterminer les couples de coordonnées des points d'intersection de (D) avec les axes du repère.
   b. Montrer que (D) et (AB) sont sécantes.
   c. Soit K le point d'intersection de (D) et (AB). Déterminer le couple de coordonnées de K, en utilisant trois méthodes différentes :
      Méthode 1 : utiliser les systèmes d'équations paramétriques des deux droites.
      Méthode 2 : utiliser les équations générales des deux droites.
      Méthode 3 : utiliser une équation générale de (AB) et un système d'équations paramétriques de (D).
4. Déterminer le couple coordonnées du point G barycentre des points pondérés $(A\ ,1)\ ;(B\ ,2)$ et $(K\ ,3)$.

Exercice 23

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points :
A $(1\ ;3)$, B $(-5\ ;-1)$ et C $(-2\ ;-5)$.

1. Soit G le barycentre du système $\{(A\ ,1), (B\ ,-3)\ ,(C\ ,-2)\}$. Justifier l'existence de G puis déterminer ses coordonnées.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).
3. Déterminer les couples de coordonnées des points d'intersection de la droite (AB) avec les axes du repère.
4. Soit $\vec{u}\,(\frac{3}{2}\,;2)$ et $\vec{v}\,(-1;\,1)$ dans $(O\ ;\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$.
   a. Montrer que $(A\ ;\vec{u}\ ,\vec{v})$ est un repère du plan.
   b. Exprimer $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   c. Déterminer les couples de coordonnées des points A et B dans le repère $(A\ ;\vec{u}\ ,\vec{v})$.

Exercice 24

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère les points $A(-1\ ;\ -1)$ et $B\ (0\ ;\ -2)$.

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).
2. Les points C $(-2\ ;0)$ et D $(1\ ;1)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?
3. En utilisant la question 1. , montrer que la droite (AB) a pour une équation générale : $x + y + 2 = 0$.
4. Déterminer les couples de coordonnées des points d'intersection de (AB) avec les axes du repère.
5. Soit (D) la droite dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que les droites (AB) et (D) sont sécantes.

b. Déterminer le couple de coordonnées du point d'intersection H de (AB) et (D).

Exercice 25

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit (D) la droite dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = k \\ y = 3k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

et (D') la droite dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que (D) et (D') sont sécantes.
2. Trouver le couple de coordonnées du point d'intersection des droites (D) et (D') en utilisant les systèmes d'équations paramétriques des deux droites.

Exercice 26

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère les points A (1 ; 4) et B (4 ; 1).

1. Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 1). Calculer le couple de coordonnées de G.
2. On considère le point H tel que G soit le barycentre des points pondérés (H, 2) et (O, 1).

   a. Calculer les coordonnées de H.

   b. Démontrer que les droites (AH) et (OB) sont parallèles.

Exercice 27

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points

$A(2; -2\sqrt{3})$, $B(2; 2\sqrt{3})$ et $C(8; 0)$.

1. Soit I le milieu du segment [AB]. Montrer que pour tout point M du plan :

   $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

   $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.

3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

   $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \|$.

Exercice 28

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté a, DIC et CJB sont des triangles équilatéraux.

Choisir un repère du plan et démontrer que les points A, I et J sont alignés.