

Thème 7 : CALCUL VECTORIEL

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Recopier puis compléter les énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. Soit A, B et C trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \dots = \overrightarrow{AC}$.
2. Soit A et B deux points distincts du plan, α et β deux nombres réels tels que ..., on appelle barycentre des points pondérés (A ; α) et (B ; β), l'unique point G du plan tel que

Exercices d'application

Exercice 2

On considère un parallélogramme ABCD. Montrer que :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

Exercice 3

1. Tracer un triangle ABC.
2. Construire les points E, F et G tels que :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} ; & \text{b. } \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} ; & \text{c. } \overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} ; \\ \text{d. } \overrightarrow{CK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CB} ; & \text{e. } \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE} ; & \text{f. } \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} - \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}. \end{array}$$

Exercice 4

Soit A et B deux points distincts du plan tel que $AB = 4$ cm.

Dans chacun des cas ci-dessous, justifier que le système $\{ (A ; a), (B ; b) \}$ admet un barycentre puis le construire.

1. $a = 2$ et $b = 1$;
2. $a = -6$ et $b = 2$;
3. $a = 2$ et $b = -3$;
4. $a = 3$ et $b = 3$;
5. $a = -1$ et $b = -3$.

Exercices de synthèse

Exercice 5

1. Tracer un triangle ABC.
2. Construire les points A', B' et C' tels que : $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$.
3. Montrer que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Exercice 6

Soit ABCD un parallélogramme.

1. Construire les points F et E tels que : $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
2. Construire le point G tel que AEGF soit un parallélogramme.
3. Démontrer que les points A, C et G sont alignés.

Exercice 7

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

1. Démontrer que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
2. Démontrer que pour tout point M : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.
3. Y a-t-il d'autres points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$?
4. Déterminer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BD}$.

Exercice 8

Soient O, A et C trois points non alignés du plan.

1. Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{OM} = \frac{5}{12} \overrightarrow{OA} - \frac{5}{4} \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ON} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC}$.
2. Démontrer que M, N et O sont alignés.

Exercice 9

Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}$ et le point N tel que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.
2. a. Démontrer que $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.
b. Que représente le point I pour le segment [MN]?
3. a. Justifier les deux égalités suivantes : $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$.
b. En déduire la nature du quadrilatère ABNI.

Exercice 10

ABC est un triangle de centre de gravité G, le point H est le milieu de [AC].

1. Faire une figure puis placer les points I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}.$$

2. Démontrer que G est le centre de gravité du triangle IJK.
3. Démontrer que : $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BH}$
4. Démontrer que BIJG est un parallélogramme.

Exercice 11

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

1. Construire les points I et J tels que : $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère AJBC ?
- b. Exprimer $\overrightarrow{CJ}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$.
- c. Montrer que : $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.
- d. En déduire que les points C, I et J sont alignés.

Exercice 12

Soit ABC un triangle et les points M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1. Construire les points M et N.
2. Montrer que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice 13

Soit A, B et C trois points non alignés du plan, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

1. Soit M étant un point quelconque du plan, montrer que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
2. Sachant que $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AJ}$, montrer que (BC) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 14

1. Construire un carré ABCD.
2. Construire sur [DC] et à l'intérieur du carré le triangle équilatéral DCE.
3. Construire sur [BC] et à l'extérieur du carré le triangle équilatéral BCF.
4. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
5. En déduire que les points A, E et F sont alignés.

Exercice 15

1. Construire un triangle ABC rectangle en A.
2. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Montrer que les points B, C et D sont alignés

Exercice 16

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et AC = 4 cm. G est le centre de gravité du triangle, O le milieu de [BC], E le barycentre du système

$\{(A, 1); (B, 2)\}$ et F le barycentre du système $\{(A, 1); (C, -2)\}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que les points O, E et F sont alignés.
3. Montrer que pour tout point M du plan :
 - a. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
 - b. $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{ME}$.
 - c. $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{FM}$.

Exercice 17

ABC est un triangle équilatéral.

On note I et J les milieux respectifs de [BC] et [AC] .

1. Faire une figure.
2. Soit G le centre de gravité de ABC et G' est le barycentre du système $\{(A ; -1) ; (B ; 2) ; (C ; 2)\}$.
 - a. Construire G.
 - b. Quel est le barycentre I du système $\{(B ; 2) ; (C ; 2)\}$.
 - c. En déduire que $\overrightarrow{AG'} = \frac{4}{3} \overrightarrow{AI}$. Construire G'.
3. Réduire les vecteurs $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
4. Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
$$\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$