

Thème 5 : FONCTIONS NUMERIQUES D'UNE VARIABLE REELLE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

A et B sont deux ensembles donnés.

Soit x_1 et x_2 deux nombres réels distincts d'un intervalle I de l'ensemble de définition de la fonction f.

Donner pour chaque numéro d'énoncé du tableau 1 celui de l'énoncé du tableau 2 lui correspondant pour former une proposition vraie.

Tableau 1

1	Une fonction de A vers B est une correspondance qui à tout élément x de A associe
2	Une application de A vers B est une correspondance qui à tout élément x de A associe
3	L'ensemble de définition d'une fonction f est
4	La fonction f est décroissante sur l'intervalle I.
5	La fonction f est croissante sur l'intervalle I.
6	Une fonction f est dite constante sur un ensemble E.
7	Le réel $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ s'appelle
8	Si $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$, pour tout x_1 et x_2 de I alors
9	Si $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$, pour tout x_1 et x_2 de I alors
10	Si $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$, pour tout x_1 et x_2 de I alors f est

Tableau 2

a	un élément et un seul de B
b	f est décroissante sur I
c	l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ qui ont une image par f.
d	f est croissante sur I
e	f est constante sur I
f	taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2
g	au plus un élément de B
h	pour tous réels x_1 et x_2 de E, $f(x_1) = f(x_2)$
i	quel que soit x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$
j	quel que soit x_1 et x_2 de I, si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

Exercice 2

Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, (C) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Recopier et compléter les énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. f est paire si pour tout $x \in D_f$...
2. f est impaire si pour tout $x \in D_f$...
3. Lorsque f est paire alors (C) admet... symétrie.
4. Lorsque f est impaire alors (C) admet... symétrie.

Exercice 3

Soit f et g deux fonctions, I et J deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$

Pour l'énoncé ci-dessous, trois réponses sont données dont une seule est exacte la choisir.

La fonction composée de f par g est la fonction notée $g \circ f$ définie pour tout $x \in I$ par :

a. $g \circ f(x) = g(f(x))$ b. $g \circ f(x) = g \times f(x)$ c. $g \circ f(x) = f(g(x))$

Exercice 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I .

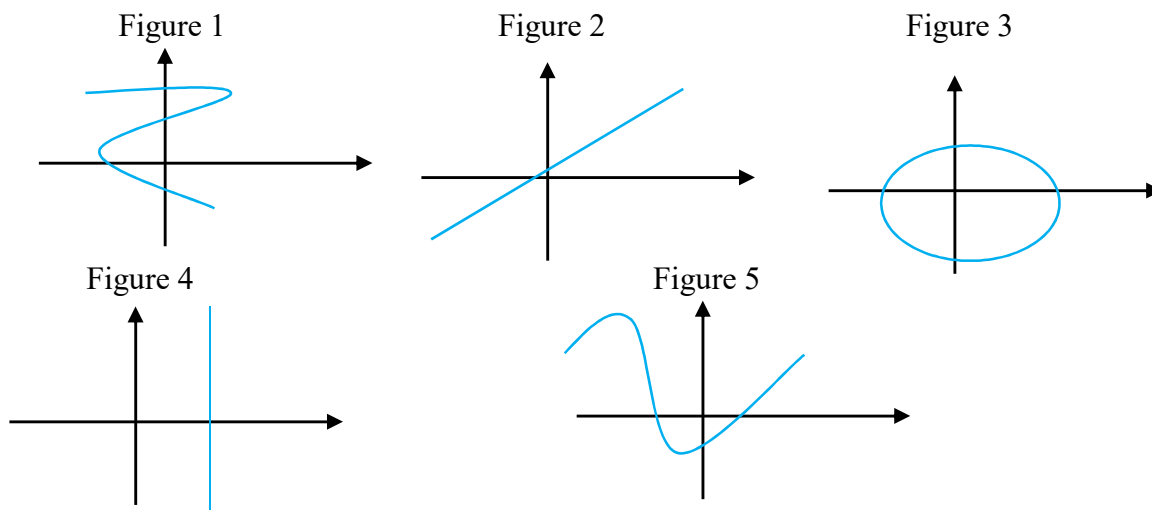
Recopier et compléter les énoncés ci-dessous en utilisant l'extrémum qui convient:

1. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$ alors $f(a)$ est...
2. Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$ alors $f(a)$ est...

Exercices d'application

Exercice 5

Parmi les figures ci-dessous, indiquer en justifiant celles qui représentent une fonction.



Exercice 6

Parmi les fonctions ci-dessous, indiquer celles qui sont des applications.

Justifier votre réponse.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $i: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; $j: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$

Exercice 7

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions $f, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q$ et r de I vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

1. $f(x) = 2x^2 - 5$, $I =]-\infty, 0]$;

2. $g(x) = |4x - 3|$, $I = \mathbb{R}$;

3. $h(x) = \frac{x+1}{2x+10}$, $I = [-10; 5]$;

4. $j(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$;

7. $l(x) = \frac{x+1}{x^2+x-1}$, $I = \mathbb{R}$;

8. $m(x) = \frac{x-3}{x^2-2x}$, $I = \mathbb{R}$;

9. $n(x) = \sqrt{-x+2}$, $I = \mathbb{R}$;

10. $p(x) = \sqrt{x^2-x+4}$, $I = \mathbb{R}$;

11. $q(x) = \sqrt{|x|-1}$, $I = \mathbb{R}_+$;

$$\begin{array}{l} 5. k(x) = \frac{x+1}{x^2-8x+16}, I =]-\infty, 1]; \\ 6. i(x) = \frac{-x+1}{x^2+1}, I = \mathbb{R}; \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 12. r(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}, I = \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Exercice 8

Etudier la parité de la fonction f dans chacun des cas ci-dessous :

$$\begin{array}{lllll} 1. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & ; & 2. f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} & ; & 3. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 + 3 & ; & x \mapsto -x^3 + x & ; & x \mapsto \frac{x^2+2}{x^2-1} \\ 4. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & ; & 5. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| + 3x & ; & x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1} \end{array}$$

Exercice 9

On considère les fonctions f, g, h, i et j de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = -3x ; g(x) = x - \frac{1}{2} ; h(x) = \frac{1}{x} ; i(x) = \sqrt{x} ; j(x) = 3x^2.$$

Représenter graphiquement chacune de ces fonctions dans un repère orthonormal.

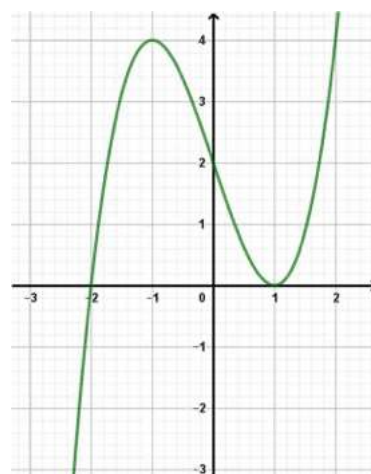
Exercice 10

Représenter graphiquement la fonction f définie sur $[-3; 2[$ par $f(x) = E(x)$, $E(x)$ désignant la partie entière de x .

Exercice 11

On considère la courbe ci-contre d'une fonction f .

- Déterminer graphiquement l'ensemble de définition D_f de f .
- Déterminer graphiquement $f(-1)$; $f(0)$ et $f(1)$.
- Résoudre graphiquement :
 - $f(x) = 0$,
 - $f(x) \leq 0$,
 - $f(x) \geq 0$,
 - $f(x) > 0$.
- Déterminer graphiquement les extrema de f .



Exercices de synthèse

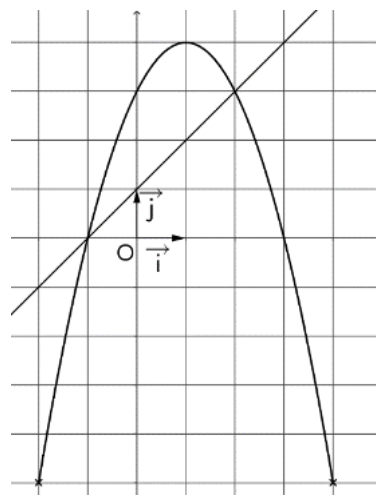
Exercice 12

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3x + 7$.

- Préciser l'ensemble de définition D_f de f .
- En utilisant les formules de changement d'origine, déterminer l'équation de la courbe de f dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ où $\Omega \left(\frac{3}{2}, \frac{19}{4} \right)$.
- Montrer que l'équation de la courbe (C_f) de f dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ est celle d'une fonction paire et donner une interprétation graphique de ce résultat.
- Dans un plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, tracer la représentation graphique de f .

Exercice 13

Dans le repère ci-contre, sont représentées la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2, 4]$ et la droite $(D) : y = x + 1$.



1. Déterminer graphiquement les images de -1 ; 0 ; et de 1 par f .
2. Résoudre graphiquement
 - a. $f(x) = 3$, b. $f(x) = 4$, c. $f(x) = -7$, d. $f(x) > 0$, e. $f(x) \leq 0$.
3. Résoudre graphiquement
 - a. $f(x) - x - 1 = 0$, b. $f(x) - 1 \geq x$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$.

On appelle (P) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Mettre $f(x)$ sous sa forme canonique et en déduire que : $f(x) - 2 = 3(x + 1)^2$.
2. Montrer que 2 est le minimum absolu de f et que ce minimum est atteint en -1.
3. Etudier le sens de variation de f .
4. Déterminer les coordonnées du point Ω tel que (P) ait pour équation dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j}) : Y = 3X^2$.
En déduire son axe de symétrie.
5. Construire la courbe (P) en utilisant le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$.