Thème 4 : POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Indiquer si l'expression f(x) proposée dans les cas ci-dessous est un polynôme :

1. $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x + \sqrt{2}\,x - \pi$; **2.** $f(x) = x + \frac{1}{x}$; **3.** $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$;

4. $f(x) = |3x^2 + x + 4|$; **5.** $f(x) = \sqrt{3}$; **6.** $f(x) = \frac{2x+1}{3}$.

Exercice 2

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. Un polynôme est nul si … .
2. La somme de deux polynômes est un … dont le degré est … .
3. Le produit de deux polynômes est un … dont le degré est… .
4. Deux polynômes sont égaux si … .
5. Un nombre a est racine d'un polynôme P(x) si … .
6. f(x) est une fraction rationnelle signifie que f(x) est le … de deux … .

Exercices d'application

Exercice 3

On considère les polynômes suivants $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ et $g(x) = x^4 - 4$.

Déterminer les polynômes ci-dessous et préciser leur degré :

1. $2f(x) + 3g(x)$; **2.** $f(x).g(x)$; **3.** $(f(x))^2 - 5g(x)$.

Exercice 4

On considère le polynôme $p(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

1. Montrer que $p(1) = 0$ et $p(2) = 0$.
2. Factoriser p(x) en produit de facteurs du premier degré.

Exercice 5

On considère les fractions rationnelles f et g définies par $f(x) = \frac{x^2 - 3x+1}{2x-1}$ et $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$.

1. Déterminer les ensembles de définition de f et de g .
2. Montrer que f(x) + g(x) est une fraction rationnelle.
3. Par division euclidienne, montrer que f(x) peut s'écrire sous la forme

$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-1}$ où a, b et c sont des réels à déterminer.

Exercices de synthèse

Exercice 6

Soit le polynôme p(x) défini par : $p(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 2$.

1. Calculer $p(-1)$ et $p(1)$ puis factoriser $p(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: a. $p(x) = 0$; b. $p(x) < 0$
3. On donne $q(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$, où a et b sont des réels.

   Déterminer a et b pour que -1 et -2 soient des racines de $q(x)$.
4. Déterminer la condition d'existence de la fractionnelle f(x) définie par $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ puis la simplifier.

Exercice 7

Soit le polynôme p(x) défini par $p(x) = 9x^4 + 9x^3 + mx^2 - x + n$.

1. Déterminer m et n pour que p(x) soit divisible par $x^2 + x - 6$.
2. Avec les valeurs de m et n trouvées, factoriser $p(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $p(x) = 0$ puis $p\left(\frac{1}{x+2}\right) = 0$.

Exercice 8

Soit le polynôme P(x) définie par : $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 6$.

1. Déterminer les réels a et b pour que P(x) soit factorisable par $2x^2 - 5x + 3$.
2. Dans la suite on pose $a = -3$ et $b = -7$.

   a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$.

   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $\frac{P(x)}{-x^2+2} \geq 0$.

   c. Déterminer les réels α , β et γ tels que $\frac{P(x)}{-x^2+2} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma x}{-x^2+2}$.

Exercice 9

1. Soit le polynôme p(x) définie par $p(x) = 10x^3 + 29x^2 - 41x + 12$.

   a. Vérifier que $\frac{1}{2}$ est un zéro de p(x).

   b. En déduire une factorisation de p(x). Résoudre dans $\mathbb{R}$, $p(x) \leq 0$.
2. Soit $Q(x) = \frac{P(x)}{8x^3-1}$.

   a. Déterminer la condition d'existence de Q(x).

   b. Simplifier Q(x).

Exercice 10

Soit a un réel. On considère le polynôme g(x) défini par :

$g(x) = x^3 - (3 + 2a)x^2 + (6a + 2)x - 4a$.

1. Prouver que $g(2a) = 0$.
2. Ecrire g(x) sous forme d'un produit de trois polynômes du premier degré.