Thème 2 : INTERVALLES ET CALCUL APPROCHE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{D}$, $b \in \mathbb{D}$, $c \in \mathbb{D}$ et $\varepsilon \in]0, +\infty[$.

Recopier et compléter pour chacune des énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. Le nombre décimal a est une valeur approchée de x à ε près signifie que :
2. Le nombre décimal b est une valeur approchée par excès de x à ε près signifie que :
3. Le nombre décimal c est une valeur approchée par défaut de x à ε près signifie que :

Exercice 2

Soit a , b , c , et x des nombres réels et r un nombre réel strictement positif. Donner pour chaque numéro d'énoncé de la colonne I, le numéro de celui de la colonne II lui correspondant.

N°	I	N°	II
1	Un réel c qui vérifie $ x - c \leq r$ est	A	$\begin{cases} x < a \\ x \geq b \end{cases}$
2	Le réel $\frac{a+b}{2}$ est	B	une valeur approchée de x à r près.
3	Le système d'inéquations associé à l'intervalle $]a ; b]$ est	C	$x > a$
4	Le réel $\frac{b-a}{2}$ est	D	le centre de l'intervalle $[a ; b]$
5	$x \leq b \Leftrightarrow$	E	$x \in]-\infty, b]$
6	$x \in]a ; +\infty[\Leftrightarrow$	F	le rayon de l'intervalle $[a ; b]$
7	Le système d'inéquations associé à l'intervalle $[b ; a[$ est	G	$a \leq x \leq b$
8	$x \in [a ; b] \Leftrightarrow$	H	$\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$

Exercice 3

On donne ci-dessous des intervalles d'une part et des représentations graphiques d'intervalles d'autre part. Donner le numéro de chaque intervalle, et le numéro de la représentation graphique qui lui correspond.

1. $[a ; b]$	i.
2. $[a ; b[$	j.
3. $]a ; b]$	k.
4. $]a ; b[$	l.
5. $[a ; +\infty[$	m.
6. $]a ; +\infty[$	f.
7. $] -\infty ; b]$	g.
8. $] -\infty ; b[$	h.

Exercices d'application

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer un encadrement de $x + y$, $x - y$ et xy .

- $-3,4 \leq x \leq -3,2$ et $1 < y \leq 4$.
- $-4,2 \leq x < -3$ et $-0,61 \leq y \leq -0,4$.

Exercice 5

On donne les réels x et y tels que $4 \leq x \leq 4,6$ et $-0,5 \leq y \leq 0,3$.

- Trouver un encadrement de chacun des réels $x + y$ et $x - y$.
- a. Donner un encadrement de xy lorsque :
 - $-0,5 \leq y \leq 0$;
 - $0 \leq y \leq 0,3$
- b. En déduire un encadrement de xy .

Exercice 6

Soit a et b des nombres réels tels que : $2 \leq a \leq 3$ et $1 \leq b \leq 4$.

Trouver un encadrement de chacun des nombres suivants :

$$a + b, a - b, a \times b, (2a - 5)b, -3a + 5b - 4.$$

Exercice 7

1. Pour chacun des intervalles ci-dessous, déterminer : le centre, le rayon et le système associé.

$$\mathbf{a.} [-2 ; 4] \quad ; \quad \mathbf{b.}]-\sqrt{3} ; \sqrt{3} [\quad ; \quad \mathbf{c.} [-5,2 ; -3,4] \quad ; \quad \mathbf{d.}]\sqrt{8} ; \sqrt{32} [.$$

2. Soit x et y des réels tels que : $-1,5 \leq x \leq -1,4$ et $2,2 \leq y \leq 2,4$.

a. Déterminer un encadrement de chacun des nombres réels ci-dessous :

$$x + y, x - y \text{ et } xy .$$

b. Trouver : $E(x)$, $E(y)$ et $E(y - x)$. ($E(x)$ désigne la partie entière de x)

Exercice 8

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer le nombre A à l'aide d'une calculatrice et en déduire :

- l'arrondi d'ordre 3 de A .
- une approximation par défaut de A à 10^{-2} près,
- une approximation par excès de A à 10^{-2} près,
- la partie entière de A .

$$1. A = 2 - \sqrt{5} \quad ; \quad 2. A = \frac{\sqrt{\pi-3}}{\pi} \quad ; \quad 3. A = \frac{2\sqrt{5}}{\pi-5} \quad ; \quad 4. A = \sqrt{\frac{7}{6}} - \sqrt{\frac{8}{7}} .$$

Exercices de synthèse

Exercice 9

- Dans chacun des cas ci-dessous déterminer des encadrements de : $x + y$, $x - y$, xy , $\frac{1}{x}$, $\frac{x}{y}$.
 - $2,1 < x < 2,2$ et $3,3$ est une approximation décimale par défaut de y à $0,1$ près.
 - $-1,4$ est une approximation décimale par excès de x à $0,1$ près et $y \in]5 ; 5,1[$.
 - $|x + 4,05| \leq 0,05$ et $-0,85$ est une approximation décimale de y à $0,05$ près.
 - $E(x) = 2$ et $2,25$ est l'arrondi d'ordre 3 de y .
- Soit a et b des nombres réels de l'intervalle $]1 ; 2]$. Prouver que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$.

Exercice 10

Soit a , b et x des nombres réels .

- Démontrer que : $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow x \in [a ; b]$.
 - Interpréter l'inégalité : $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$ en terme de valeur approchée de x .
 - Compléter la phrase suivante : le ... de l'intervalle $[a ; b]$ est une ... de tout réel de l'intervalle $[a ; b]$ au ... près.
 - Dire comment déduire de l'encadrement $a \leq x \leq b$ du réel x , une valeur approchée de x .
- Démontrer que : $a < x \leq b \Leftrightarrow a < x \leq a + (b - a)$ puis que $a \leq x < b \Leftrightarrow b - (b - a) \leq x < b$.
 - Interpréter les encadrements $a < x \leq a + (b - a)$ et $b - (b - a) \leq x < b$ en terme de valeur approchée.
- Applications :
 - On donne l'encadrement $2,5 < x < 2,7$.
Déduire de cet encadrement, en précisant à chaque fois l'incertitude associée :
 - ✓ une valeur décimale approchée de x ,
 - ✓ une valeur décimale approchée par défaut de x ,
 - ✓ une valeur décimale approchée par excès de x .
 - Trouver une inéquation avec valeur absolue dont l'ensemble des solutions est :
 - $[4 ; 6]$,
 - $] -\infty ; -4] \cup [3 ; +\infty[$.

Exercice 11

- L'aire d'un trapèze de hauteur h , de grande base B et de petite base b est $S = \frac{1}{2} h(B + b)$.
 - Encadrer S sachant que : $2,3 \leq h \leq 2,4$; $7,2 \leq B \leq 7,3$ et $5,6 \leq b \leq 5,7$.
 - Trouver une valeur décimale approchée de S en précisant l'incertitude.
- L'aire A et le volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h sont données respectivement par $A = 2 \pi R(R+h)$ et $V = \pi R^2 h$.
 - Donner un encadrement de A et V sachant que : 4 est une valeur approchée de R à 2×10^{-2} près et

8 celle de r à 10^{-1} près.

b. Trouver une valeur décimale approchée de A et V en précisant l'incertitude.

Exercice 12

Soit $D = 3x^2 - 12x + 7$, x étant un nombre réel.

1. Vérifier que $D = 3(x - 2)^2 - 5$.

2. Sachant que $1 \leq x \leq 5$,

a. donner un encadrement de $3x^2$, puis de $-12x$. En déduire un encadrement de D.

b. donner un encadrement de $x-2$, puis de $3(x-2)^2$. En déduire un encadrement de D.

Exercice 13

I. Soit $A = \frac{-3x+5}{x-4}$ et x un nombre réel, $x \neq 4$.

1. Vérifier que $A = -3 - \frac{7}{x-4}$.

2. Sachant que $0 \leq x \leq 2$,

a. donner un encadrement de $-3x+5$, puis de $x - 4$. En déduire un encadrement de A.

b. donner un encadrement de $x - 4$, puis de $-\frac{7}{x-4}$. En déduire un encadrement de A.

II. Soit $B = \frac{2x+3}{x+4}$; x étant un nombre réel, $x \neq -4$.

Montrer que $\forall x \in [0 ; 1], B \in [0 ; 1]$.

Exercice 14

Soit x un réel tel que $|x| \leq \frac{1}{2}$.

1. Démontrer que : $\frac{1}{2} \leq 1-x$.

2. Démontrer que $\frac{1}{1-x} - (1+x) = \frac{x^2}{1-x}$.

3. Déduire de 1. et 2. que $1+x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1-x}$ à $2x^2$ près.

Exercice 15

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous par ce qui convient.

Intervalle	Représentation	centre	rayon	Inéquation associée	Système associé
$[-4 ; -2]$					
$[2 ; 5[$					
				$x \leq 3$	
$[... ; ...]$		2,1	3		
					$\begin{cases} x > -1 \\ x \leq 2,5 \end{cases}$
$] -1,2 ; +\infty [$					