Thème 12 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. En perspective cavalière, deux droites parallèles sur le dessin sont des droites parallèles dans l'espace.
2. En perspective cavalière, deux droites perpendiculaires sur le dessin sont deux droites orthogonales de l'espace.
3. En perspective cavalière, deux droites orthogonales de l'espace sont représentées par deux droites perpendiculaires.
4. En perspective cavalière, les dimensions des arêtes perpendiculaires à une face frontale sont conservées.
5. En perspective cavalière, les dimensions d'une face frontale sont conservées.
6. En perspective cavalière, un angle droit est représenté par un angle droit.
7. En perspective cavalière, deux droites parallèles dans l'espace sont représentées par deux droites parallèles.

Exercice 2

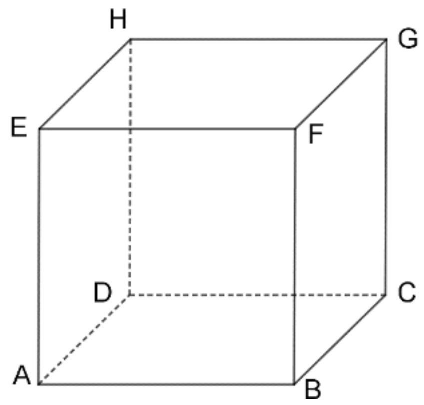
Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

1. Trois points non alignés de l'espace sont non coplanaires.
2. Deux droites sécantes de l'espace sont coplanaires.
3. Deux droites parallèles de l'espace sont non coplanaires.
4. Deux droites non perpendiculaires de l'espace sont non coplanaires.
5. L'intersection de deux plans de l'espace est un plan.
6. L'intersection d'une droite et d'un plan dans l'espace est un point.
7. Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à toute droite contenue dans ce plan.
8. Si une droite (d) est sécante à une droite contenue dans un plan (P), alors (d) n'est pas contenue dans (P).
9. Si une droite est contenue dans un plan, alors elle est parallèle à toute droite contenue dans ce plan.
10. Deux droites perpendiculaires de l'espace sont orthogonales.
11. Deux droites orthogonales de l'espace sont perpendiculaires.
12. Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à une droite contenue dans ce plan.
13. Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites contenues dans ce plan.

Exercices d'application

Exercice 3

La figure ci-contre est un cube ABCDEFGH.



1. Comparer les longueurs des segments [AC] et [BD].
2. Les droites (AC) et (BD) sont-elles perpendiculaires ?
3. Quel est le point d'intersection des droites (BC) et (DF) ?
4. Dans le plan, deux droites qui n'ont aucun point commun sont parallèles ; en va-t-il de même dans l'espace ?
5. Marquer le point I milieu de [DF]; quelle est la nature du triangle IFG ?

Exercice 4

1. Construire un parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
2. Les droites (AB) et (HG) déterminent-elles un plan? Justifier si oui, puis nommer ce plan.
3. Les droites (AB) et (CG) déterminent-elles un plan? Justifier si oui, puis nommer ce plan.
4. Citer trois droites parallèles à (FG).
5. Citer trois droites sécantes à (FG).
6. Citer trois droites non coplanaires à (FG).

Exercice 5

Construire une pyramide SABCD de sommet S à base rectangulaire, H est le pied de la hauteur.

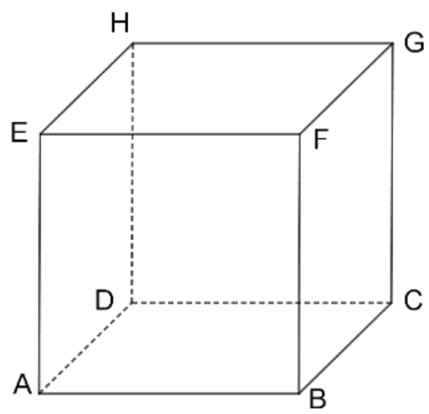
Donner les positions relatives des droites suivantes

1. (AB) et (CD) ; 2. (SA) et (BD) ; 3. (HA) et (SC) ;

4. (BH) et (DB) ; 5. (SH) et (AB) ; 6. (SH) et (AC).

Exercice 6

Le solide ABCDEFGH représenté ci-contre est un cube.



1. Déterminer les intersections des plans ci-dessous :
   a. (ABC) et (CFG)
   b. (BDF) et (EHG)
   c. (ABF) et (CHG)

2. . Justifier que les plans (EAD) et (FCB) sont parallèles.
Justifier que la droite (BD) est parallèle au plan (EFG) et que la droite (AC) est aussi parallèle au plan (EFG).

3. Deux droites parallèles à un même plan sont-elles parallèles?

Exercice 7

On considère un cube ABCDEFGH.

1. Représenter ce cube en perspective cavalière.

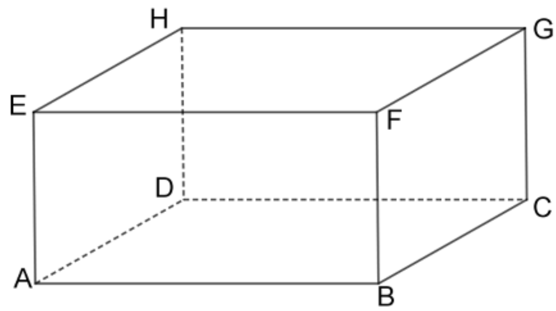
2. a. Justifier que EFCD est un parallélogramme.

   b. En déduire que la droite (FC) est parallèle au plan (EBD).

3. a. Montrer que la droite (FH) est parallèle au plan (EBD).

   b. En déduire la position relative des plans (FCH) et (EBD).

Exercice 8



On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-contre.

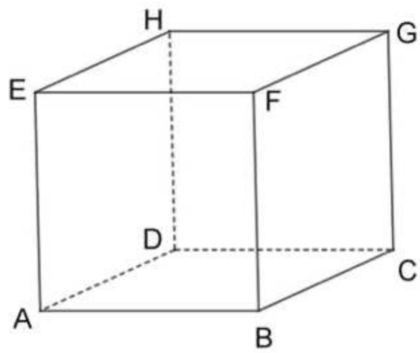
1. Démontrer que la droite (AE) est parallèle au plan (BFH).
2. Démontrer que la droite (EH) est parallèle au plan (BFG).
3. a. Démontrer que la droite (EB) est parallèle au plan (DCG).

   b. Démontrer que la droite (AF) est parallèle au plan (DCG).

   c. Deux droites sont parallèles au même plan droites sont-elles parallèles ?

4. Soit O le centre de la face ABCD et O' celui de la face EFGH.
   a. Démontrer que la droite (BF) est parallèle au plan (BFH).
   b. Démontrer que la droite (BF) est parallèle au plan (AEG).
   c. Démontrer que la droite (BF) est parallèle à la droite (OO').

Exercice 9



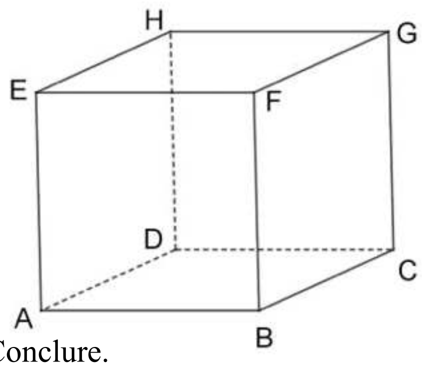
On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.

Déterminer la droite d'intersection des plans :

1. (ABF) et (BCH) ;
2. (EFG) et (ABC) ;
3. (ACE) et (BFH) ;
4. (ADE) et (BCH).

Exercice 10

On considère le cube ABCDEFGH ci-contre.



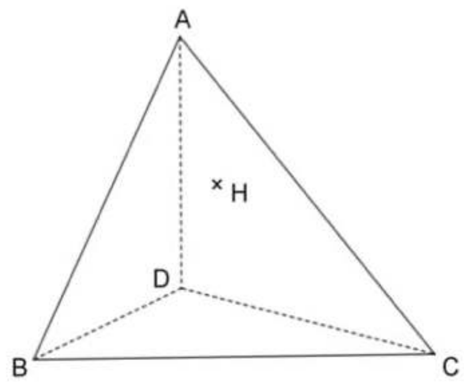
1. Montrer que les droites (EB) et (DG) ont orthogonales.
2. Montrer que les droites (HF) et (AC) sont orthogonales.
3. Montrer que les droites (AE) et (FH) sont orthogonales.
4. Montrer que les droites (AC) et (BF) sont orthogonales.
5. Montrer que la droite (HF) est orthogonale au plan (ACGE). Conclure.
6. Montrer que les droites (CH) et (AG) sont orthogonales.

Exercice 11

Soit ABCD un tétraèdre tel que la droite (AD) est orthogonale au plan BCD.

On désigne par H l'orthocentre du triangle ABC.

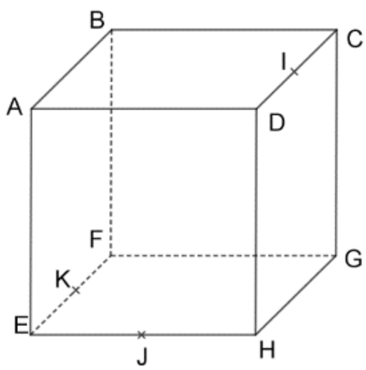
Démontrer que les droites (DH) et (BC) sont orthogonales.



Exercices de synthèse

Exercice 12

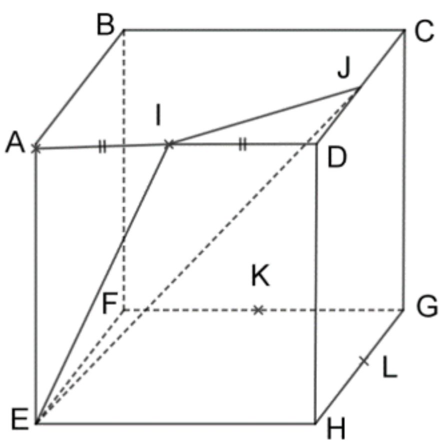
La figure représente un cube ABCDEFGH, I est le milieu de [CD], J est le milieu de [EH] et K est le milieu de [EF].



1. Quelle est l'intersection des plans (BIH) et (EFG) ?
2. Montrer que le point H appartient à l'intersection de (BIH) et (EFG).
3. Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (BIH) ? En déduire l'intersection de (BIH) et (EFG).
4. Conclure.

Exercice 13

Soit ABCDEFGH un cube, I est le milieu de [AD], J est le milieu de [CD], K est le milieu de [FG] et L est le milieu de [GH].

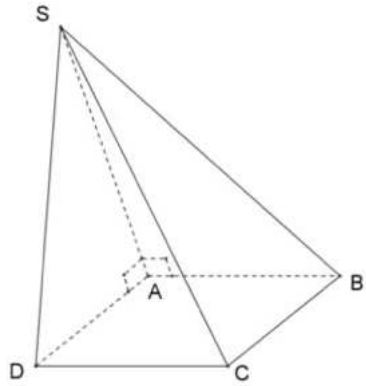


1. Vérifier que le point E appartient à l'intersection de (EIJ) et (EHG).
2. Quelle est l'intersection des plans (ABC) et (EIJ) ? En déduire l'intersection de (EIJ) et (EHG) ?
3. Montrer que les droites (IJ) et (EG) sont parallèles, puis conclure.

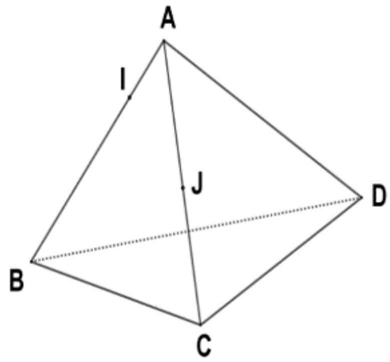
Exercice 14

L'unité est le centimètre. SABCD est une pyramide de sommet S ayant pour base le rectangle ABCD.
Les faces latérales SAB, SAD et SDC sont des triangles rectangles.
On donne AD = AS = 3 et SB = 7.

1. Montrer que SD = $3\sqrt{2}$.
2. Sachant que SC = $\sqrt{58}$, prouver que le triangle SBC est rectangle en B.

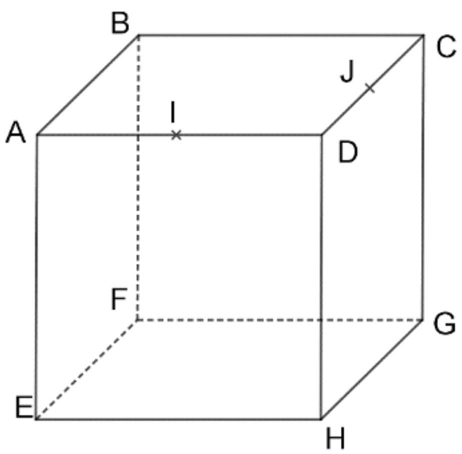


Exercice 15



1. Reproduire la figure ci-contre où ABCD est un tétraèdre.
   I est un point de [AB] et J est un point de [AC].
2. La droite (IJ) coupe le plan (BCD) en un point E. Construire le point E et justifier la construction.
3. I est toujours un point de [AB], mais cette fois J est un point de la face ACD. La droite (IJ) coupe le plan (BCD) en E. Construire le point E et justifier la construction.
4. I est un point de la face ABC et J est un point de la face ACD. La droite (IJ) coupe le plan (BCD) en E. Construire le point E et justifier la construction.

Exercice 16

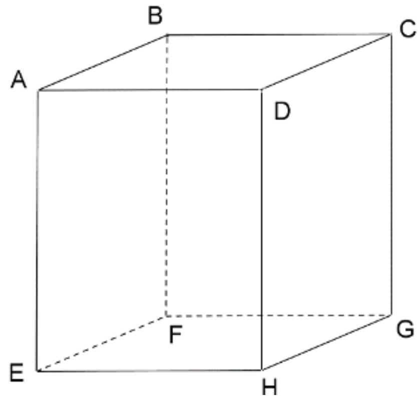


Soit ABCDEFGH un cube, I est le milieu de [AD] et J est le milieu de [CD]. Les droites (IJ) et (EG) sont-elles parallèles ?

1. Montrer que les droites (AC) et (EG) sont parallèles.
2. Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
3. En déduire que les droites (IJ) et (EG) sont parallèles.

Exercice 17

Soit ABCDEFGH un cube. On appelle I le milieu de [AB] et J le point de [AE] tel que $AJ = \frac{AE}{3}$.



On veut construire l'intersection du plan (FIJ) avec le cube.

1. Reproduire la figure ci-contre.
2. Quelles sont les intersections du plan (FIJ) avec les faces ADFE et ABHE ?
3. Que peut-on dire de l'intersection de (FIJ) avec la face DFGC ? Tracer la droite (FK) qui est cette intersection, K étant un point de [CG].
4. Tracer la droite (KL) intersection de (FIJ) avec la face BCGH, L étant un point de [BC].
5. Terminer la construction de l'intersection de (FIJ) avec le cube.
6. On veut déterminer la position de K sur [CG]. Pour cela considérons le point M milieu de [CD] et le point N de [FD] tel que $DN = \frac{DF}{3}$.
7. Les droites (IJ) et (MN) sont parallèles, donc (MN) est parallèle à (FK).
   Représenter la face DCGF en vraie grandeur, ainsi que les points M, N et K.
   La droite (FK) coupe (DC) en P. Que peut-on en déduire sur la position de K ?

Exercice 18

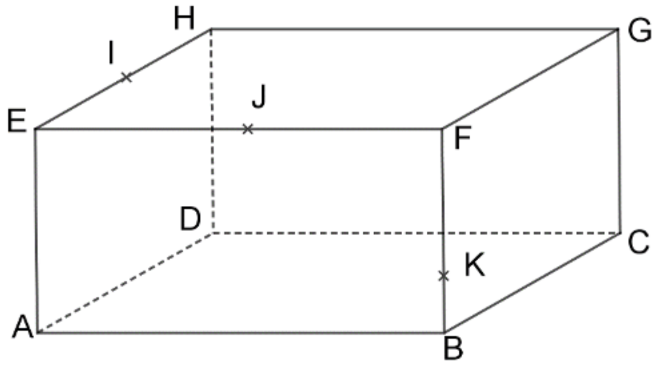
Soit ABCDE est une pyramide de sommet A, de base BCDE un parallélogramme de centre O et de hauteur [AO]. I est le milieu du segment [AB] et J celui du segment [AC].

1. Représenter cette pyramide en perspective cavalière et y placer les points I et J.
2. Préciser, en justifiant, l'intersection :
   a. des plans (ABC) et (ACD) ;
   b. des plans (ABD) et (AEC) ;
   c. de la droite (AO) et du plan (BED) ;
   d. des droites (DI) et (AO).
3. Démontrer que la droite (IJ) et le plan (BCD) sont parallèles.
4. Démontrer que la droite (IJ) et la droite (ED) sont parallèles.
5. En déduire l'intersection des plans (ABC) et (EID).

Exercice 19

Soit ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. Les points I, J et K sont placés ci-dessus.

Le but de l'exercice est de tracer la section de ABCDEFGH par le plan (IJK).



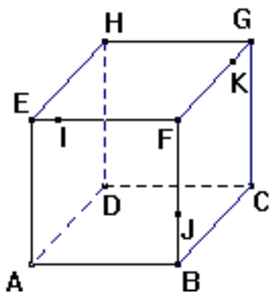
1. Reproduire la figure ci-dessus
2. Tracer le segment intersection du plan (IJK) avec la face EFGH.
3. Tracer le segment intersection du plan (IJK) avec la face ABFE.
4. a. Justifier que les droites (IJ) et (FG) sont sécantes. Notons L le point d'intersection.

   b. Déterminer la droite intersection des plans (IJK) et (BCG). Trace alors le segment intersection du plan (IJK) avec la face BCGF.
5. Quelle est la position des plans (ABC) et (EFG) ? Trace alors le segment intersection du plan (IJK) avec la face ABCD.
6. Construire la section de ABCDEFGH par le plan (IJK).

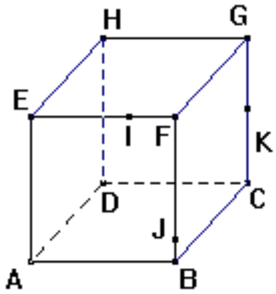
Exercice 20

Reproduis la figure puis construis l'intersection du plan (IJK) avec le cube ABCDEFGH dans chacun des cas ci-dessous.

1. Les points I, J, K sont situés sur les arêtes.



2. Les points I, J, K sont situés sur les arêtes.



Exercice 21

1. Reproduis la figure ci-contre où I∈(ABC), J∈(ACD) et K∈[CD].
2. Construis en justifiant, l'intersection du plan (IJK) avec le tétraèdre ABCD.