Thème 11 : TRANSFORMATIONS

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

1. Définir une transformation du plan.
2. Citer quatre transformations du plan et préciser les éléments géométriques caractéristiques de chacune d'elles.

Exercice 2

Recopier et compléter chacune des propositions ci-dessous par ce qui convient :

On donne l'ensemble des transformations du plan suivant : $\mathcal{T}$ ={ translation, homothétie, rotation, symétrie orthogonale}. Par toute transformation f telle que f est un élément de $\mathcal{T}$ ou composée d'éléments de $\mathcal{T}$, l'image :

1. d'une droite est… ;
2. d'un segment est… ;
3. d'un cercle est… ;
4. d'un rectangle est … ;
5. d'un triangle isocèle est … ;
6. d'un triangle équilatéral est … ;
7. d'un carré est … .

Exercices d'application

Exercice 3

Soit A, B, E, F I, J, M, M′, N, O, P et R sont des points du plan. Déduire de chacune des affirmations ci-dessous une égalité vectorielle :

1. Le point B est l'image de A par l'homothétie de centre I et de rapport -2.
2. Le point P est l'image de N par l'homothétie de centre R et de rapport 3.
3. Le point M′ est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.
4. Les points I et J sont les images respectives de E et F par l'homothétie de rapport -4.

Exercice 4

Soit A, B et C trois points du plan non alignés tels que la mesure principale $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit positive et Ω un point du plan. Construire les points A', B' et C', images respectives de A , B et C par la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 5

Préciser les conditions qu'on peut tirer de chacune des affirmations ci-dessous :

1. Le point M' est l'image de M par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{6}$ ·

2. Les points E et F sont les images respectives de A et B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ·

Exercice 6

On considère dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, les points A (2 ; -1), B (1 ; 3) et C (-1 ; -2).

Déterminer l'expression analytique de chacune des transformations ci-dessous :

1. f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. f est l'homothétie de centre A et de rapport -2.
3. f est la symétrie centrale de centre C.

Exercices de synthèse

Dans les deux exercices ci-dessous 7 et 8, des affirmations sont proposées dont certaines sont exactes, dire les quelles.

Exercice 7

Soit ABC est un triangle de centre de gravité G. F est la transformation qui à tout point M associe M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

1. $\overrightarrow{GM'}= - 2\overrightarrow{GM}$.
2. Si M décrit [AC], M' décrit le segment [BD] tel que BCAD est un parallélogramme.
3. M'est l'image de M par une translation.

Exercice 8

Soit A un point donné, k est un réel.

T est une transformation qui à tout point M, associé M' tel que $\overrightarrow{AM'}= (k+2)\ \overrightarrow{AM}$.

1. Il existe une valeur de k pour laquelle tout point M a pour image A.
2. T est une homothétie sauf pour k = -2.
3. T est une translation pour une certaine valeur de k.
4. T est une symétrie centrale pour une certaine valeur de k.

Exercice 9

ABCD est un rectangle de centre O, I le milieu de [AB] et G est l'intersection de (IC) et (DB). On note h l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{2}$ ·

Construire l'image par h du rectangle ABCD.

Exercice 10

Soit A et B deux points donnés du plan, on note f la transformation du plan qui a tout point M associe M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. On note G le barycentre de (A, 2) et (B, 1).

1. Construire le point G et prouver que $\overrightarrow{GM'} = -2\overrightarrow{GM}$.
2. En déduire la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques.

Exercice 11

ABCD est un parallélogramme et I est le point tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

On note h l'homothétie de centre I qui transforme D en C.

1. a. Quel est le rapport k de cette homothétie ?
   b. Construire le point E tel que h (E) = B.
2. Soit M le milieu de [DE] et N celui de [CB]. Démontrer que les points M, N, I sont alignés.

Exercice 12

ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC] tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$. O est l'intersection de ses diagonales.

On note h l'homothétie de centre O qui transforme A en C.

1. a. Montrer que la droite (AB) a pour image par h la droite (DC). Préciser h(B).
   b. Déterminer le rapport de l'homothétie h.
2. Soit (D) la droite parallèle à (AD), qui coupe (DB) en I.
   a. Déterminer l'image de (AD) par h.
   b. En déduire que h (D) = I.

Exercice 13

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), soit le point I (3 ; -1).
   Déterminer l'expression analytique de l'homothétie f de centre I et rapport -3.
2. Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de l'application g du plan dans lui-même définie analytiquement par $\begin{cases} x' = 2x + 2 \\ y' = 2y \end{cases}$.

Exercice 14

On considère un triangle ABC de centre de gravité G.

Soit g la transformation qui a tout point associe M' tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

Soit D le point tel que ABDC est un parallélogramme.

1. Démontrer que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$.
2. En déduire que g est une translation dont on précisera le vecteur.

Exercice 15

AOB et COB sont deux triangles rectangles isocèles en O tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}$ · On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ·

1. Construire E tel que r (D) = E.
2. En déduire que AD = BE et que les droites (AD) et (BE) sont perpendiculaires.

Exercice 16

Soit A et B deux points du plan, (C) un cercle de rayon r ne coupant pas (AB) et M un point de (C) non situé sur la droite (AB). Soit G le centre de gravité du triangle ABM.

I est le milieu de [AB] et N le symétrique de M par rapport à G.

1. Faire la figure.
2. Exprimer $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$.
3. Préciser la nature de la transformation qui transforme M en N.
4. Déterminer le lieu géométrique de N lorsque M décrit (C).

Exercice 17

On considère la transformation f qui à tout point M (x ; y) du plan associe le point M′ (x′ ; y′) tel que :

$$\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y + 2 \end{cases} .$$

1. Démontrer que f admet un point invariant I dont on précisera les coordonnés.
2. Démonter qu'il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
4. Soit (D) la droite d'équation : 2x -3y = 1.

   Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par f.

Exercice 18

Soit ABCD un losange, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ positif, I le point tel que DC= DI et $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DI}) = \frac{\pi}{2}$ ·

On note J le symétrique de I par rapport à (BD) et O le milieu de [AJ].

On désigne r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ·

1. Faire une figure.
2. Démontrer que JAD est un triangle rectangle en D.
3. Déterminer les images de A et D par r .
4. Monter que r(B) = I.
5. a. En déduire la nature du triangle IBO.

   b. Démontrer que (BD) ⊥ (IJ) et BD = IJ.

Exercice 19

Soit ABC un triangle. A , B', et C' sont les milieux respectifs des segments [BC] , [AC] , et [AB] . Soit D un point distinct des points A' , B', et C'. On désigne par I, J et K les symétriques respectifs de D par rapport à A', B', et C'.

On note : h_1 l'homothétie de centre D et de rapport $\frac{1}{2}$; h_2 l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$; h_3 l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.

1. Faire une figure.
2. a. Déterminer les images de I, J et K par h_1.
   b. Déterminer les images de A et C par h_2.
   c. Démontrer que KACI est un parallélogramme.
   d. Démontrer de même en utilisant h_3 que JABI est un parallélogramme.
3. Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Exercice 20

Soit ABC un triangle rectangle en B, M un point de [AC], E et F les projetés orthogonaux de M respectivement sur (BC) et (BA). Soit O le milieu de [EF].

Déterminer et construire l'ensemble des points O lorsque M décrit [AC].

Exercice 21

Dans un plan orienté, on donne un cercle (C) de centre O, une droite (D) extérieur à (C) et un point A fixe de (D). A tout point M de (C), on associe le point N tel que le triangle AMN soit équilatéral avec $(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{3}$.

1. Quel est le lieu géométrique (E_1) de N lorsque M décrit (C) ?
2. Quel est le lieu géométrique de (E_2) de P, projeté orthogonal de M sur (AN) ?
   Construire (E_2).