Thème 10 : PRODUIT SCALAIRE

Exercices de restitution des connaissances

Exercice 1

Soient deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Recopier et compléter les énoncés ci-dessous par ce qui convient :

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est tel que :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots$ si tous les deux vecteurs sont non nuls.

Exercice 2

Pour tous points A , B et C tels que $A \neq B$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \ldots$.

Exercice 3

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et α un nombre réel.

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots \cdot \vec{u}$.
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \ldots$.
3. $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \ldots) \ldots = \ldots$.

Exercice 4

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. Etant donné un vecteur $\vec{u}$ on appelle carré scalaire de $\vec{u}$ le réel noté $\vec{u}^2$ tel que : $\vec{u}^2 = \ldots$.
2. On appelle norme de $\vec{u}$, noté…. , le réel défini par $\|\vec{u}\| = \ldots$.

Exercice 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α un nombre réel. Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si… .
2. $\|\alpha \vec{u}\| = \ldots$.
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \ldots \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
4. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \ldots$.
5. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \ldots$.
6. $(\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \ldots$.
7. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots$.

Exercice 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit $\vec{u}(x\ ;\ y)$ et $\vec{v}\,(x'\ ;\ y')$ deux vecteurs.

Recopier et compléter chacun des énoncés ci-dessous pour avoir une proposition vraie :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots$; 2. $\|\vec{u}\| = \ldots$.

Exercices d'application

Exercice 7

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que : BC = $\sqrt{8}$.

Calculer $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$.

Exercice 8

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux tel que : $\|\vec{u}\| = 1$; $||\vec{v}||$=2 et $(\vec{u};\vec{v}) = \frac{\pi}{3}\cdot$

   Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$; $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ et $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$.

2. On donne $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$; $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{4}\cdot$

   a. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

   b. En déduire les valeurs de $(\vec{u}+\vec{v})^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2$; $(2\vec{u}+3\vec{v})^2$ et $(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit A (2 ; 3) et B $(-5; 4)$.

Déterminer une équation générale de la médiatrice du segment [AB].

Exercice 10

Le plan est muni d'un orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit le point A (5 ; 3) et la droite (D) :$4x + 3y - 4 = 0$.

Déterminer la distance d du point A à la droite (D).

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit A (1 ; 3) et B $(-2; 4)$.

Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] .

Exercices de synthèse

Exercice 12

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Calculer $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ en fonction de a.

Exercice 13

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{19}$.

1. Développer $(\vec{u}+\vec{v})^2$. En déduire la valeur de $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

2. Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{(\vec{u};\vec{v})}$.

Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit A $(2\,;-1)$ et $\vec{n}\,(-3; 2)$.

Trouver une équation générale de la droite (D) passant A et admettant $\vec{n}$ comme un vecteur normal.

Exercice 15

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A $\binom{2}{1}$; B $\binom{5}{7}$; C $\binom{3}{-1}$ et D $\binom{5}{5}$. On note Δ l'ensemble des points M $\binom{x}{y}$ du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 27$ et Γ le cercle de diamètre [CD].

1. a. Déterminer une équation de Δ et celle de Γ.

   b. Vérifier que H $\binom{-1}{7}$ est un point de Δ et que E $\binom{1}{1}$ est un point de Γ.

   c. Construire Δ et Γ.

2. a. Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$.

   b. Interpréter graphiquement les résultats ?

3. Déterminer l'équation réduite de la tangente (D) à Γau point E puis la tracer.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les axes du repère.

Exercice 16

ABC un triangle, A' B' C' les milieux respectifs des segments, [BC], [AC] et [BA] .

Soit H l'orthocentre, G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

1. a. Démontrer que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{OA'}$.

   b. En déduire que le vecteur $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

2. Démontrer que $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CA}$.

3. Démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. En déduire que les points O, G et H sont alignés.

4. Démontrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.