République du Sénégal
Ministère de l'éducation nationale
Inspection d'académie de Rufisque
Inspection de l'éducation et de la formation de Diamniadio
Collège d'excellence franco arabe Daara Rama
Année scolaire :2023-2024

Devoir surveillé N°3 de Mathématiques du 2^{nd} semestre

Niveau : 2^{nde}SA | **Durée :** 3 **heures**

▷ Exercice 1 — 6pts

Soit α un réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}; 0\right[$

1. On considère dans $\mathbb{R}$, l'équation suivante : $(E) : -2x^2 + (\cos\alpha)x + \cos^2\alpha = 0$.

- **a.** Montrer que dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) admet deux solutions distincts x_1 et x_2 que l'on déterminera. **(1pt)**
- **b.** On note $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$.
  Montrer que $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$. **(0,5pt)**
- **c.** En déduire $x_1^2 + x_2^2$ en fonction de $\cos\alpha$. **(1pt)**

2. On pose $A(\alpha) = \cos\alpha \sin\alpha \left(\tan\alpha + \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)$.

- **a.** Donner le signe de $\sin\alpha$. Justifier. **(0,5pt)**
- **b.** Montrer que $A(\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$. **(1pt)**
- **c.** En déduire que $A(\alpha) = 1 - 2\cos^2\alpha$. **(0,5pt)**
- **d.** On suppose que $A(\alpha) = \dfrac{4}{5}$.
  - i. Montrer que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **(1pt)**
  - ii. En déduire la valeur de $\tan\alpha$. **(0,5pt)**

▷ Exercice 2 — 7pts

On considère dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(2; -1), B(-4; -3)$ et $C(1; -3)$.

1.
- **a.** Placer les points $A; B$ et C dans ce repère. **(3 × 0,25pt)**
- **b.** Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. **(0,5pt)**
- **c.** En déduire $\cos\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$. **(0,5pt)**

2. Soit (Δ) la droite passant par le point B et orthogonale à la droite (AC).

- **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ). **(0,5pt)**
- **b.** Calculer la distance du point A à la distance (Δ). **(0,5pt)**

3. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre $[AB]$.

a. Montrer que : $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0$ est une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$. **(0,5pt)**

b. Montrer que la droite (Δ') d'équation $x - 3y + 5 = 0$ est tangente au cercle $(\mathscr{C})$. **(0,75pt)**

4. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) la médiatrice du segment $[AC]$. **(1pt)**

b. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C}')$ qui passe par les points A et C et dont le centre appartient à la droite (D') d'équation $2x - y = 0$. **(1pt)**

5. Résoudre graphiquement le système

$$S : \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant -2x - 4y + 5 \\ -2x - 4y - 20 < 0 \end{cases}$$ **(1pt)**

✍ ▷ Exercice 3 — 7pts

Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{x+1}$$ une fonction numérique.

1. a. Déterminer le domaine de définition de f. **(0,5pt)**

b. Dresser le tableau de variations de f. **(1pt)**

c. Montrer que le point $I(-1;1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_g)$. **(0,5pt)**

d. Tracer dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f. **(1pt)**

2. Soit

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -x^2 - 2x + 3$$ une fonction numérique.

a. Montrer que $g(x) = -(x+1)^2 + 4$. **(0,75pt)**

b. Montrer que la fonction g est croissante sur $]-\infty;-1]$ et décroissante sur $[-1;+\infty[$. **(1pt)**

c. Montrer que 4 est la valeur maximale de la fonction g. **(1pt)**

3. On pose $h(x) = g \circ f(x)$

a. Déterminer $D_{g\circ f}$ le domaine de définition de la fonction $g \circ f(x)$. **(0,75pt)**

b. Calculer $g \circ f(x)$. **(0,5pt)**

BONNE CHANCE