République du Sénégal
Ministère de L'éducation nationale
Inspection d'académie de Rufisque
Inspection de l'éducation et de la formation de Diamniadio
Collège d'excellence franco arabe Daara Rama
Année scolaire :2023-2024

Devoir surveillé N°1 de Mathématiques du 2^{nd} semestre

Niveau : 2^{nde}SA | **Durée :** 3 heures

Exercice 1 — 3,5pts

On considère l'équation $(E) : x^2 - 8x - 2 = 0$.

On pose $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. Vérifier que $\dfrac{a}{b} = 4 - 3\sqrt{2}$. **(1pt)**
2. Vérifier que $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 8\left(\dfrac{a}{b}\right) - 2 = 0$. **(1pt)**
3. En déduire les solutions de l'équation (E) sans le discriminant Δ. **(1,5pt)**

Exercice 2 — 3,5pts

1. Déterminer l'ensemble des réels m pour que le système (S) : $\begin{cases}(m-1)x + y = 5 \\ 3x + (m-3)y = 2\end{cases}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ **(1,5pt)**
2. Résoudre le système dans les cas $m = 3$ et $m = 0$. **(1pt + 1pt)**

Exercice 3 — 6pts

On considère le polynôme $P(x)$ défini par $P(x) = x^3 + (\sqrt{3} - 2)x^2 - (3 + 2\sqrt{3})x - 3\sqrt{3}$

1. **a.** Vérifier que $P(-1) = 0$. **(0,25pt)**
   b. Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x + 1)Q(x)$. **(0,5pt)**
   c. Factoriser complètement $P(x)$ **(0,5pt)**
2. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x) = 0$. **(0,25pt)**
   b. Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$. **(0,5pt)**
   c. En déduire la résolution de l'inéquation $x^2|x| + (\sqrt{3} - 2)x^2 - (3 + 2\sqrt{3})|x| - 3\sqrt{3} \geqslant 0$ **(1pt)**
3. On considère les nombres réels a, b et c qui vérifient le système

$$(S) : \begin{cases} a + b + c = 2 - \sqrt{3} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 13 \\ abc = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

   a. Montrer que $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$; en déduire que $ab + bc + ca = -3 - 2\sqrt{3}$. **(0,5 pt + 0,5pt)**

b. Montrer que $P(a) = 0; P(b) = 0$ et $P(c) = 0$. **(3 × 0,5pt)**

c. Déduire les triplets (a, b, c) solutions du système (S). **(0,5pt)**

▷ Exercice 4 — 7pts

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les points $A(1;2), B(3;1)$, $C(2;-1)$ et $E(1;0)$.

1. a. Placer les points A, B, C et E dans ce repère. **(0,25pt + 0,25pt + 0,25pt + 0,25pt)**

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC}$. **(1pt)**

2. On considère les droites $(L), (L')$ et (L'') telles que

$(L) : 3x - 2y + 11 = 0; (L') : \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 1 + 4,5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $(L'') : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

a. Montrer que (L) et (L') sont confondues. **(0,5pt)**

b. Montrer que que (L) et (L'') sont sécantes puis déterminer les coordonnées du point P intersection de (L) et (L''). **(0,5pt + 0,5pt)**

3. a. Calculer AB, AC et BC. **(0,25pt + 0,25pt + 0,25pt)**

b. En déduire la nature du triangle ABC. **(0,25pt)**

c. En déduire que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est une base. **(0,25pt)**

4. a. Montrer que $\overrightarrow{BA} = -2\vec{i} + \vec{j}$ et $\overrightarrow{BC} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. **(0,25pt + 0,25pt)**

b. Exprimer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ **(0,25pt + 0,25pt)**.

c. Montrer que $\overrightarrow{BE} = -2\vec{i} - \vec{j}$ **(0,25pt)**.

d. En déduire les coordonnées de E dans le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ **(0,25pt)**

5. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur au triangle ABC issue de B dans le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. **(0,25pt)**

6. Déterminer l'ensemble des points M de l'axe des abscisses tels que
$\overline{ME}^2 - \overline{ME} - 6 = 0$. **(0,5pt)**

BONNE CHANCE