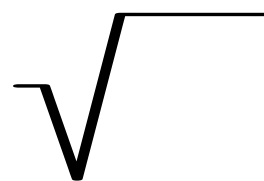
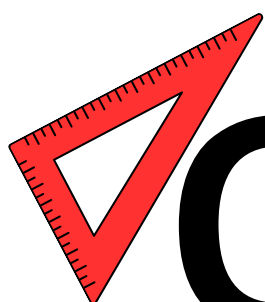
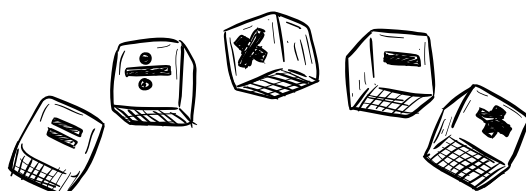
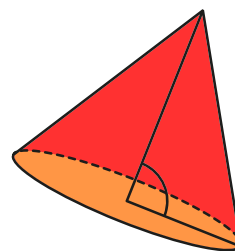
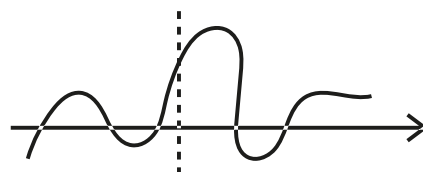
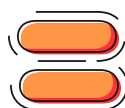
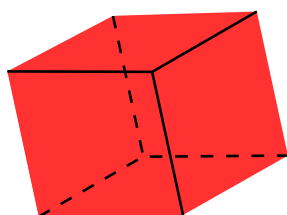
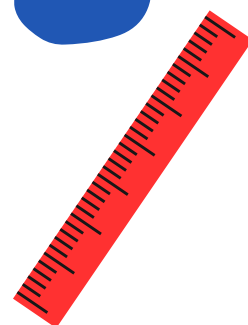
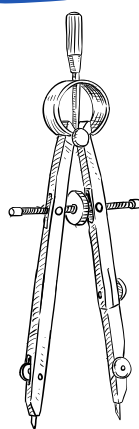


Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Cours Maths 2ndS



Auteur : Dr. Amar Fall

Telephone : 773897032

Le programme de maths de seconde S peut se diviser en deux grandes parties :

- La partie des activités numériques et
- La partie des activités géométriques.

La partie des activités numériques peut se subdiviser en 6 thèmes :

- Calcul dans $\mathbb{R}$,
- Intervalles et calcul approché,
- Equations et inéquations,
- Fonctions numériques d'une variable réelle,
- Polynômes et fractions rationnelles et
- Statistique.

La partie des activités géométriques peut être subdivisées en deux parties :

- Géométrie plane et
- Géométrie dans l'espace

La géométrie plane est subdivisée en 5 thèmes :

- Calcul vectoriel,
- repérage cartésien,
- angles orientés et trigonométries,
- produit scalaire et
- transformations.

La géométrie dans l'espace est divisée en un seul thème: la géométrie dans l'espace.

Ce programme se fait en 5 h par semaine en raison de 2 séances de 2 h et d'une séance d'une heure: Mardi : 8h-10h ; jeudi 13h 30-14h 30 et le vendredi 10h-12h à la salle 23.

Un thème peut être subdivisé en un ou plusieurs chapitres.

CHAPITRE 1 : CALCUL DANS $\mathbb{R}$

Durée : 12h=8h+4h (Cours+td)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la relation $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ avec $b \geq 0$;

- ✓ Utiliser la relation $\sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$ avec $b \geq 0$;
- ✓ Restituer la définition de la valeur absolue ;
- ✓ Utiliser la valeur absolue pour :
 - calculer une distance sur une droite ;
 - résoudre $|ax + b| = cx + d$; $|x - a| \leq b$ et $|x - a| < b$
- ✓ Interpréter les solutions des équations et inéquations ci-dessus.

Prérequis :

- ✓ Puissance d'un nombre rationnel ;
- ✓ Valeur absolue d'un nombre rationnel ;
- ✓ Racine carrée d'un nombre réel positif.

Supports didactiques :

- ✓ USAID;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

- I. Ordre dans $\mathbb{R}$**
 - 1. Rappels et compléments**
 - 2. Propriétés**
- II. Puissance d'un nombre réel**
 - 1. Définitions**
 - 2. Propriétés**
 - 3. Identités remarquables**
 - 4. Ordre et puissances**
- III. Calculs sur les radicaux**
 - 1. Définition**
 - 2. Propriétés**
 - 3. Exercice d'application**
 - 4. Ordre et racine carrée**
- IV. Valeur absolue d'un nombre réel et distance sur une droite**
 - 1. Valeur absolue**
 - a. Définition**
 - b. Propriétés**

c. Equations et inéquations avec valeur absolue

2. Distance sur une droite

a. Définition

b. Remarque

c. Exemples

d. Propriétés

Déroulement du chapitre

I. Ordre dans $\mathbb{R}$

1. Rappels et compléments

Définitions : Soit $x \in \mathbb{R}$.

- ✓ x est strictement négatif si x est strictement inférieur à 0. On note $x < 0$
- ✓ x est strictement positif si x est strictement supérieur à 0. On note $x > 0$
- ✓ x est négatif si x est strictement inférieur ou égal à 0. On note $x \leq 0$
- ✓ x est positif si x est strictement supérieur ou égal à 0. On note $x \geq 0$.

Remarque

Le carré de tout nombre réel est toujours positif c'est-à-dire $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Définitions : Soient x et $y \in \mathbb{R}$.

- ✓ x est strictement inférieur à y si $x - y < 0$. On note $x < y$.
- ✓ x est strictement supérieur à y si $x - y > 0$. On note $x > y$.
- ✓ x est inférieur à y si $x - y \leq 0$. On note $x \leq y$.
- ✓ x est supérieur à y si $x - y \geq 0$. On note $x \geq y$.
- ✓ x est égal à y si $x - y = 0$. On note $x = y$.

Exercice d'application

Démontrer que pour tous nombres réels x et y , on a : $x^2 + y^2 \geq 2xy$

Solution

On pose $X = x^2 + y^2$ et $Y = 2xy$. On doit donc montrer que $X \geq Y$. Pour cela, on peut montrer que $X - Y \geq 0$.

$$X - Y = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$= x^2 - 2xy + y^2$$

$X - Y = (x - y)^2$ or $(x - y)^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif donc $X - Y \geq 0$ d'où $X \geq Y$ par conséquent $x^2 + y^2 \geq 2xy$

Remarques

- ✓ L'inégalité $x^2 + y^2 \geq 2xy$ signifie que la somme des carrés de deux réels est supérieure au double de leur produit. Cette inégalité peut aider grandement dans la démonstration de plusieurs inégalités. Il est donc à connaître.
- ✓ Dire qu'une proposition P est équivalente à une proposition Q (on note $\Leftrightarrow$)
On lit équivaut à
signifie que si P est vraie alors Q est vraie et réciproquement si Q est vraie alors P est vraie.
Par exemple $a \leq b \Leftrightarrow (a < b \text{ ou } a = b)$
- ✓ Dire qu'une proposition P implique (ou entraîne) une proposition Q (on note : $\Rightarrow$)
On lit implique
signifie que si P est vraie alors Q est vraie. Par exemple $a < b \Rightarrow a \leq b$

2. Propriétés : Soient a, b, c et d $\in \mathbb{R}$

Propriété 1 : Soient $a \geq 0; b \geq 0$

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

Propriété 2

$$a \leq b \text{ et } b \leq a \Leftrightarrow a = b.$$

Propriété 3

$$a \leq b \text{ et } b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

Oralement: La réciproque de cette propriété n'est pas vraie, c'est-à-dire si a est inférieur à c alors on n'a pas forcément a inférieur à b et b inférieur à c.

Propriété 4

$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$. Oralement : C'est-à-dire on ne change pas une inégalité en ajoutant un même nombre réel aux deux membres de l'inégalité. En particulier $c \leq 0 \Rightarrow a + c \leq a$.

Propriété 5

$a \leq b \text{ et } c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$. Oralement : C'est-à-dire lorsqu'on a deux inégalités de même sens, on ne change pas le sens de cette inégalité en faisant la somme membre à membre. Ce

résultat est aussi valable pour plusieurs inégalités de même sens. En particulier $a \leq 0$ et $b \leq 0$
 $\Rightarrow a + b \leq 0$

Propriété 6

- $c \geq 0$ et $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$. Oralement : C'est-à-dire qu'on ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant chacun de ses membres par un même nombre positif.
- $c \leq 0$ et $a \leq b \Rightarrow ac \geq bc$. Oralement : C'est-à-dire qu'on change le sens d'une inégalité en multipliant chacun de ses membres par un même nombre réel négatif. En particulier $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$

Propriété 7 :

- Soient a, b, c et d des réels positifs. $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow ac \leq bd$. Oralement : C'est-à-dire on peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens lorsque tous les membres de ces inégalités sont positifs et dans ce cas, on ne change pas le sens des inégalités.
- Soient a, b, c , et d sont des réels négatifs. $a \leq b$ et $c \leq d \Rightarrow ac \geq bd$. Oralement : c'est-à-dire on peut multiplier membre à membre des inégalités de même sens lorsque tous les membres de ces inégalités sont négatifs et dans ce cas, on change le sens des inégalités. En particulier $a \leq 0$ et $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

Remarques

- ✓ Toutes ces propriétés restent vraies lorsqu'on remplace $\leq$ par $<$.
- ✓ $a \leq b \Leftrightarrow b \geq a$. Ainsi, on peut réécrire toutes ces propriétés en remplaçant $\leq$ par $\geq$
- ✓ $a \leq b \leq c \Leftrightarrow a \leq b$ et $b \leq c$.

Exercice d'application:

En utilisant l'inégalité $x^2 + y^2 \geq 2xy$, montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ pour tous réels a, b et c .

Solution

En appliquant $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour $x = a$ et $y = b$, on a $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

De même, on a $a^2 + c^2 \geq 2ac$ et $b^2 + c^2 \geq 2bc$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + a^2 + c^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

II. Puissance d'un nombre réel

1. Définitions

Définition 1 : Soit a un réel et n un entier naturel supérieur à 2. On appelle puissance $n^{\text{ième}}$ de a ou puissance de a d'exposant n , le nombre réel noté a^n et défini par $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}} a^n$

Par convention on a :

- Pour tout nombre réel a , $a^1 = a$
- Pour tout nombre réel non nul $a^0 = 1$.

Exemples : Calculons 2^5 et $(-0,5)^3$

- $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- $(-0,5)^3 = (-0,5) \times (-0,5) \times (-0,5) = -0,125$

Définition 2 : Soit a un réel non nul et p un entier relatif strictement négatif. On appelle puissance de a d'exposant p , le nombre réel noté a^p et défini par : $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$.

Exemples

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$
- $(0,5)^{-3} = \frac{1}{0,5^3} = \frac{1}{0,5 \times 0,5 \times 0,5} = 8$

2. Propriétés : Soient a et b des réels non nuls, m et n des entiers relatifs. On a :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Remarque : $(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ est pair} \\ -a^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Exercice d'application

Ecrire sous forme de fraction irréductible le nombre réel $A = \frac{(-3)^4 \times (-27)^7 \times (2)^{-5}}{(-8)^5 \times (3^4)^{-3}}$

3. Identités remarquables :

Soient a et b des nombres réels, on a les identités remarquables suivantes :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ et $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Oralement Ces deux identités permettent de factoriser respectivement la somme et la différence de deux cubes.

Exemples

- Développons $(1 + \sqrt{2})^3$ et $(1 - \sqrt{3})^3$.
- Factorisons $x^3 + 8$ et $x^3 - \frac{1}{8}$.

4. Ordre et puissances

- Pour tous réels a et b positifs on a : $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$. Autrement dit: Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.
- Pour tous réels a et b négatifs on a $a \leq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$. Autrement dit: Deux réels négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.
- Pour tous réels a et b non nuls et de même signe on a : $a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$. Autrement dit : deux réels non nuls de même signe sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.

Exercice d'application : Soient $a \geq 0$; $b \geq 0$

Montrer que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

III. Calculs sur les radicaux

1. Définition : Soit a un nombre réel positif

On appelle racine carrée de a , le réel positif dont le carré donne a . Il est noté $\sqrt{a}$. Ainsi par définition on a : $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$.

Exemples : La connaissance mentale des carrés des 15 premiers entiers non nuls permet de déterminer facilement les racines carrées des réels suivants :

- $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{169} = 13$; $\sqrt{196} = 14$; $\sqrt{225} = 15$

2. Propriétés

- Soit $a \geq 0$; On a $x^2 = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$
- Soient a et b sont des réels positifs, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- Soit $a \geq 0$ et $b > 0$, on a $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Soit $a \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$

3. Ordre et racine carrée

Soit $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

$a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Autrement dit : Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.

IV. Valeur absolue d'un nombre réel et distance sur une droite

1. Valeur absolue

a. Définition : Soit a un nombre réel.

On appelle valeur absolue de a , le nombre noté $|a|$ (On lit valeur absolue de a) et défini par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Exemples : $|-5,2| = 5,2$ et $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$

Exercice à faire : Trouver $|1 + \sqrt{2}|$, $|1 - \sqrt{2}|$ et $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$

b. Propriétés :

- Pour tout réel a , on a : $|a| \geq 0$
- Si a est un réel alors $\sqrt{a^2} = |a|$
- Si a est un réel et si b un réel positif alors $\sqrt{a^2 b} = |a| \times \sqrt{b}$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
- $|ab| = |a| \cdot |b|$. En particulier $|a|^2 = |a^2| = a^2$ et $|-a| = |a|$
- Si a est un réel et si b est non nul alors $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
- Soient a et b des réels. $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$
- Pour tout réel a , on a : $-|a| \leq a \leq |a|$

- Pour tous réels a et b , on a : $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (la deuxième inégalité de cette propriété est dite inégalité triangulaire.)
- $\alpha \geq 0$ et $|x| = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha$ ou $x = -\alpha$
- $\alpha \geq 0$ et $|x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$
- $|x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \alpha$ ou $x \leq -\alpha$

c. Equations et inéquations avec valeur absolue

Equations du type $|ax + b| = r$ avec a, b et r des réels et a non nul

Exemples

- $|x + 7| = 3$ est une équation du type $|ax + b| = r$ avec $a = 1; b = 7$ et $r = 3$
- $|2x - 1| = -5$ est une équation du type $|ax + b| = r$ avec $a = 2; b = -1$ et $r = -5$

Résolution d'une équation du type $|ax + b| = r$

- Si $r < 0$ alors l'équation $|ax + b| = r$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car pour tout réel x $|ax + b| \geq 0$ et $r < 0$. On écrit $S = \emptyset$. Par exemple pour l'équation $|2x - 1| = -5$, $S = \emptyset$ car $r = -5 < 0$.
- Si $r = 0$ alors l'équation devient $|ax + b| = 0$ et $|ax + b| = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$. Par exemple $|3x - 1| = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ donc $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
- Si $r > 0$ alors résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|ax + b| = r \Leftrightarrow ax + b = r$ ou $ax + b = -r$. Par exemple $|x + 7| = 3 \Leftrightarrow x + 7 = 3$ ou $x + 7 = -3 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -10$ donc $S = \{4; -10\}$.

Equations du type $|ax + b| = cx + d$ avec a, b, c et d des réels où a et c sont non nuls

Exemple

- $|x - 4| = -3x + 1$ est une équation du type $|ax + b| = cx + d$ avec $a = 1, b = -4; c = 3$ et $d = 1$

Résolution d'une équation du type $|ax + b| = cx + d$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 4| = 2x + 4$

- **1^{ère} méthode**

$$|x - 4| = 2x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \\ x - 4 = 2x + 4 \text{ ou } x - 4 = -2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = -8 \text{ ou } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

$$S = \{0\}$$

- 2^{ème} méthode (Utilisation d'un tableau de signe)

Inéquations du type $|x - a| \leq r$ où a et r sont des réels constants

Exemples

- L'inéquation $|x - 2| \leq -3$ est du type $|x - a| \leq r$ avec $a = 2$ et $r = -3$
- L'inéquation $|x + 3| \leq 1$ est du type $|x - a| \leq r$ avec $a = -3$ et $r = 1$

Méthode de résolution

- Si $r < 0$ alors l'inéquation $|x - a| \leq r$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Par exemple l'inéquation $|x - 2| \leq -3$ n'a pas de solution car $r = -3 < 0$ d'où $S = \emptyset$
- Si $r = 0$ alors l'inéquation devient $|x - a| \leq 0$ et $|x - a| \leq 0 \Leftrightarrow x - a = 0$. Par exemple $|x + 3| \leq 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ donc $S = \{-3\}$
- Si $r > 0$ alors $|x - a| \leq 0 \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r$. Par exemple $|x - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ d'où $S = [-1; 3]$

Inéquations du type $|x - a| < r$

Méthode de résolution

- Si $r \leq 0$ alors l'inéquation $|x - a| < r$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Par exemple l'inéquation $|x - 2| < -\frac{1}{2}$ n'a pas de solution car $r = -\frac{1}{2} < 0$ d'où $S = \emptyset$.
- Si $r > 0$ alors $|x - a| < 0 \Leftrightarrow -r < x - a < r$. Par exemple $|x + 6| < 3 \Leftrightarrow -3 < x + 6 < 3 \Leftrightarrow -9 < x < -3$ d'où $S =]-9; -3[$

2. Distance sur une droite

Activité

1. Tracer une droite (D) puis marquer un point O sur (D).
2. Graduer cette droite en prenant O comme origine et 1 cm comme unité.
3. Placer les points A, B, C d'abscisse respective 0,5 ; -2 et 1,6.

a. Définitions :

- On appelle droite numérique, toute droite sur laquelle, on choisit un point origine et qui est graduée selon une unité de mesure de longueur. A chaque nombre réel, on peut associer un

unique point de la droite numérique et réciproquement, à chaque point de la droite numérique, on peut associer un unique nombre réel appelé abscisse du point.

- La distance entre deux réels x et y est le réel noté $d(x; y)$ et défini par $d(x; y) = |x - y|$

b. Exemples : Calculons les distances suivantes.

- $d(4; 1) = |4 - 1| = |3| = 3$
- $d(-3; 2) = |-5| = 5$

c. Propriétés

- $d(x, y) \geq 0$ et $d(x; 0) = |x|$
- $d(x; y) = d(y; x)$
- $d(x; y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Si x est l'abscisse de A et si y est l'abscisse de B sur la droite numérique alors $AB = d(x, y) = |x - y|$

CHAPITRE 2 : CALCUL VECTORIEL

Durée : 10h (Cours+td)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Construire une combinaison linéaire de vecteurs ;
- ✓ Décomposer un vecteur à l'aide de la relation de CHASLES ;
- ✓ Passer de la relation vectorielle $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$ à la relation algébrique $AC = |\alpha|AB$;
- ✓ Utiliser les relations vectorielles pour résoudre des propriétés géométriques : distance, milieu, alignement, parallélisme...

Prérequis :

- ✓ Translation et vecteurs

Supports didactiques :

- ✓ USAID;
- ✓ Guide pédagogique CIAM 2S ;
- ✓ Déclic Maths seconde ;
- ✓ Nouveau fractale seconde ;
- ✓ Collection fractale seconde ;
- ✓ Collection fractale seconde programme 2000 ;

- ✓ Collection perspectives ;
- ✓ CIAM 2S ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

I. Rappels et compléments

1. Définition et représentation
2. Remarque
3. Egalité de deux vecteurs
4. Propriété fondamentale
5. Relation de Chasles

II. Addition vectorielle

1. Construction de la somme à l'aide de la relation de Chasles
2. Construction de la somme à l'aide du parallélogramme
3. Différence de deux vecteurs
4. Propriétés algébriques

III. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1. Définition
2. Remarque
3. Exemple
4. Propriétés
5. Colinéarité de deux vecteurs
 - a. Définition
 - b. Remarque
 - c. Propriété

IV. Vecteurs et configurations géométriques

1. Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment
2. Caractérisation vectorielle du parallélisme de deux droites
3. Caractérisation vectorielle de l'alignement de trois points
4. Caractérisation vectorielle du parallélogramme
5. Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

Déroulement du chapitre :

Introduction orale : Du point de vue historique, il faut noter que la notion de vecteurs est issue de la mécanique avec Galilée ou peut-être déjà avec les grecs. La notion de vecteurs n'est pas une notion nouvelle en soi pour l'élève de seconde S car il l'a rencontrée pour la première fois en 4^{ème} et l'a revue en classe de 3^{ème} avec le repérage donc ici il ne s'agit pas de refaire le cours de 4^{ème} et de 3^{ème} mais il s'agit d'approfondir la notion et de l'investir dans la démonstration de certaines propriétés géométriques et dans la résolution de problème de géométrie.. Les vecteurs sont utilisés dans d'autres domaines tels que la physique et les sciences de l'ingénieur pour traduire les notions de force, de vitesse, d'accélération

I. Rappels et compléments :

Dans tout le chapitre, on choisit une unité de longueur une fois pour toute.

1. Définition et représentation : Soient A et B deux points distincts du plan

L'objet mathématique noté $\overrightarrow{AB}$ dit « vecteur A B » permet de caractériser le déplacement de A à B. Ainsi, il est défini par :

- ✓ Sa direction : c'est la droite (AB).
- ✓ Son sens : c'est le sens qui va de A vers B sur la droite (AB).
- ✓ Sa norme ou sa longueur notée $\|\overrightarrow{AB}\|$: c'est la distance entre A et B : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

A est dit origine et B est dit extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il peut se représenter comme suit :

De façon générale, on peut désigner un vecteur par une seule lettre comme $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$. Dans ce cas, on peut le représenter comme suit:...

2. Remarques

- Si A et B sont confondus ($A=B$) alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ est dit vecteur nul et est noté $\vec{0}$. Ainsi on a $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$. Le vecteur nul $\vec{0}$ n'a pas de direction, ni de sens et sa norme est égale à 0 : $\|\vec{0}\| = 0$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont la même direction, la même norme et des sens opposés. On dit qu'ils sont opposés et on note $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

3. Egalité de 2 vecteurs

Soient A, B, C et D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme c'est-à-dire $(AB) \parallel (CD)$, le sens du déplacement de A vers B sur (AB) est le même que celui de C vers D sur (CD) et $AB = CD$. Dans ce cas, on peut avoir la représentation ci-dessous....

4. Propriété fondamentale

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul et O un point donné du plan alors il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. $\overrightarrow{OM}$ est dit représentant de $\vec{u}$. Cette propriété est dite axiome d'Euclide.

Oralement : Cette propriété permet de trouver un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ en choisissant une origine ou une extrémité où l'on veut.

Exercice d'application

On considère le vecteur $\vec{u}$ et les points A et B suivants. Construire un représentant de $\vec{u}$ ayant pour origine A et un représentant de $\vec{u}$ de ayant pour extrémité B.

5. Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Cette égalité est dite relation de Chasles.

Oralement : La relation de Chasles peut être utilisée plus tard pour simplifier des expressions vectorielles ou pour décomposer un vecteur.

II. Addition vectorielle

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls. La somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u} + \vec{v}$. Il peut être construit de deux manières :

1. A l'aide de la relation de Chasles

Soit A un point quelconque donné. D'après l'axiome d'Euclide, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. De même, il existe un unique point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Ainsi $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ d'après le relation de Chasles.

Par exemple, dans la configuration suivante, construisons $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide de la relation de Chasles.

Oralement : En résumé, pour construire $\vec{u} + \vec{v}$, en utilisant la relation de Chasles, on construit le représentant de $\vec{v}$ dont l'origine est l'extrémité de $\vec{u}$. Dans ce cas, $\vec{u} + \vec{v}$ est représenté par le

vecteur dont l'origine est celle de $\vec{u}$ et dont l'extrémité est celle du représentant de $\vec{v}$ qu'on a construit. Par exemple on a :

2. A l'aide du parallélogramme

Soit A un point quelconque donné, d'après l'axiome d'Euclide, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. De même, il existe un unique point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Ainsi, on a

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que ABDC est un parallélogramme. Par exemple, dans la configuration suivante, construisons $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide du parallélogramme

3. Différence de deux vecteurs

a. **Définition :** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls.

La différence de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est un vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ et défini par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

b. Exemple de construction

Dans la configuration ci-dessous, construisons $\vec{u} - \vec{v}$.

4. **Propriétés algébriques:** Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs. On a :

- a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. On dit que l'addition des vecteurs est commutative
- b) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- c) $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$
- d) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$. On dit que l'addition des vecteurs est associative.

III. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1. **Définition :** Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est un vecteur noté $k\vec{u}$ ayant la même direction que $\vec{u}$ tel que :

- Si $k > 0$ alors $k\vec{u}$ a même sens que $\vec{u}$ et $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$ alors $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens opposés et $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$.

2. Remarques

- ✓ Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $0.\vec{u} = \vec{0}$
- ✓ Pour tout réel k, on a : $k.\vec{0} = \vec{0}$
- ✓ $1.\vec{u} = \vec{u}$ et $-1.\vec{u} = -\vec{u}$

✓ En résumé, on peut écrire que $\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

3. Exemples

Soit un segment $[AB]$ et I son milieu.

✓ $\vec{AI}$ et $\vec{AB}$ ont même direction, même sens et $AI = \frac{1}{2} \times AB$ donc on a $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

✓ $\vec{BI}$ et $\vec{AB}$ ont même direction, sont de sens opposés et $BI = \frac{1}{2} \times AB$ donc on a : $\vec{BI} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$

Exercice d'application

Soient A et B des points distincts du plan. Placer les point I, J et K tels que $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$; $\vec{AJ} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AK} = \frac{5}{3}\vec{AB}$

4. Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k', on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exercice d'application

Soient A, B et C des points. Exprimer $2\vec{AB} + \vec{AC} - 3\vec{BC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ seulement.

5. Colinéarité de deux vecteurs

a. Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

b. Remarque

Par convention, le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

c. Propriété

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si (ssi) l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- L'un au moins des deux vecteurs est nul c'est-à-dire $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
- S'il existe un réel k non nul tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

Dans un énoncé mathématique, le terme « si et seulement si » signifie équivaut à.

Exercice d'application :

Soit ABC un triangle. E et F des points $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = 3\vec{AC}$. Faire une figure puis montrer que $\vec{CE}$ et $\vec{BF}$ sont colinéaires.

IV. Vecteurs et configurations géométriques

1. Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

Soient A, B et I des points.

$$P_1) \text{ I milieu de } [AB] \Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$$

$$P_2) \text{ I milieu de } [AB] \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} \text{ pour tout point M du plan.}$$

Preuve

On va prouver P_2)

2. Caractérisation vectorielle du parallélisme de deux droites

P_1) Soient A, B, C et D des points 2 à 2 distincts.

$$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \vec{AB} \text{ et } \vec{CD} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} = k\vec{CD} \text{ ou } \vec{CD} = k\vec{AB} \text{ où } k \text{ est un réel non nul.}$$

Exercice d'application

Soit ABC un triangle, I milieu de [AB] et J milieu de [AC].

En utilisant les vecteurs, montrer que $(IJ) // (BC)$.

$$P_2) \text{ Si ABC un triangle, I milieu de } [AB] \text{ et J milieu de } [AC] \text{ alors } \vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC} \text{ (ou } \vec{BC} = 2\vec{IJ})$$

3. Caractérisation vectorielle de l'alignement de trois points

Soient A, B et C des points 2 à 2 distincts.

A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB} \text{ où } k \text{ est un réel non nul.}$$

Exercice d'application

Soit ABC un triangle. I, J et K des points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

1. Faire une figure
2. Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que I, J et K sont alignés.

4. Caractérisation vectorielle du parallélogramme

a) Rappels

Soient ABDC un quadrilatère non croisé. Les affirmations suivantes sont équivalentes.

- ✓ Les côtés opposés de ABDC sont parallèles c'est-à-dire $(AB) \parallel (CD)$ et $(AC) \parallel (BD)$.
- ✓ Les côtés opposés de ABDC ont la même longueur c'est-à-dire $AB = CD$ et $AC = BD$.
- ✓ Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ de ABDC se coupent en leur milieu.
- ✓ Deux côtés opposés de ABDC sont parallèles et ont la même longueur c'est-à-dire $(AB) \parallel (CD)$ et $AB = CD$ ou bien $(AC) \parallel (BD)$ et $AC = BD$.

Chacune de ces affirmations ci-dessus signifie que ABDC est un parallélogramme.

b) Propriétés : Soient A, B, C et D des points.

$$P_1) \text{ ABDC parallélogramme } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$$

$$P_2) \text{ ABDC parallélogramme } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

PREUVE : On va prouver P₂)

Supposons que ABDC parallélogramme et montrons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Comme ABDC parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ d'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Supposons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ et Montrons que ABDC parallélogramme.

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$ d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Par suite ABDC est un parallélogramme.

Exercice d'application

Soient IJKL un quadrilatère, A, B, C et D les milieux respectifs de [IJ], [JK], [KL] et [LI]

1. Faire une figure
2. Montrer que ABCD est un parallélogramme

5. Caractérisation vectorielle du centre de gravité d'un triangle

a) Rappel

Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et le milieu du côté opposé à ce sommet. Un triangle a trois médianes et le point d'intersection de ces trois médianes est dit centre de gravité du triangle.

b) Propriétés :

Soient ABC un triangle, I milieu de [BC], J milieu de [AB], K milieu de [AC] et G un point.

P1) G centre de gravité de ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}$. Autrement dit le centre de gravité d'un triangle est situé aux deux tiers de chaque médiane à partir de chaque sommet.

P2) G est centre de gravité de ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

CHAPITRE 3 : INTERVALLES ET CALCUL APPROCHE

Durée : 12h (Cours+td)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Déterminer pour un intervalle borné :
 - le centre et le rayon ;
 - l'inéquation associée ;
 - le système associé.
- ✓ Trouver l'encadrement d'une somme, d'une différence, d'un produit et d'un quotient.
- ✓ Déterminer pour un réel :
 - Une valeur approchée ;

- Un arrondi ;
 - Partie entière
 - Une approximation décimale.
- ✓ Utiliser une calculatrice.

Prérequis :

- ✓ Calcul dans $\mathbb{R}$

Supports didactiques :

- ✓ USAID;
- ✓ Guide pédagogique CIAM 2S ;
- ✓ Déclic Maths seconde ;
- ✓ Nouveau fractale seconde ;
- ✓ Collection fractale seconde ;
- ✓ Collection fractale seconde programme 2000 ;
- ✓ Collection perspectives ;
- ✓ XY Maths de Pape Ousmane Thiao ;
- ✓ CIAM 2S ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

- I. Intervalles de $\mathbb{R}$**
- 1. Intervalles bornés**
 - 2. Intervalles non bornés**
 - 3. Centre et rayon d'un intervalle borné**
 - 4. Intersection et réunion d'intervalles**
- II. Encadrement**
- 1. Définition**
 - 2. Encadrement et opérations**
- III. Calcul approché**
- 1. Valeur approchée**
 - 2. Arrondi**
 - 3. Partie entière**
 - 4. Notation scientifique et ordre de grandeur**

Déroulement du chapitre

I. Intervalles de $\mathbb{R}$:

1. Intervalles bornés : Soient a et b des réels tels que $a < b$

a. Définitions

- L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ ($\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$) est dit intervalle borné, fermé de $\mathbb{R}$ et est noté $[a; b]$. Oralement : On lit « intervalle a b ». Ainsi $x \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$. Il est représenté sur une droite graduée par un segment comme suit :
- L'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$ est dit intervalle borné, fermé à gauche, ouvert à droite et est noté $[a; b[$. Oralement : On lit « intervalle a b ». Ainsi $x \in [a; b[\Leftrightarrow a \leq x < b$. Il est représenté sur une droite graduée comme suit :
- L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est dit intervalle borné, ouvert à gauche, fermé à droite et est noté $]a; b]$. Ainsi $x \in]a; b] \Leftrightarrow a < x \leq b$. Il est représenté sur une droite graduée comme suit :
- L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est dit intervalle borné, ouvert et est noté $]a; b[$. Ainsi $x \in]a; b[\Leftrightarrow a < x < b$. Il est représenté sur une droite graduée comme suit :

b. Remarques

- Si $a = b$ alors $[a; b] = \{a\}$ est dit singleton.
- Si $a = b$ alors $]a; b[= \emptyset$.
- Pour les intervalles bornés ci-dessus qui sont non vides et non réduits à un singleton, a est dit borne inférieure et b est dit borne supérieure.

2. Intervalles non bornés

a. Définitions : Soit a un réel

- L'ensemble des réels x tels que $x \leq a$ est dit intervalle non borné, fermé à droite et est noté $] -\infty; a]$. Ainsi $x \in] -\infty; a] \Leftrightarrow x \leq a$. Il est représenté sur une droite graduée comme suit :
- L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est dit intervalle non borné, ouvert à droite et est noté $] -\infty; a[$. Ainsi $x \in] -\infty; a[\Leftrightarrow x < a$. Il est représenté sur une droite graduée comme suit :
- L'ensemble des réels x tels que $x \geq a$ est dit intervalle non borné, fermé à gauche et est noté $[a; +\infty[$. Ainsi $x \in [a; +\infty[\Leftrightarrow x \geq a$. Il est représenté sur une droite graduée comme suit :
- L'ensemble des réels x tels que $x > a$ est dit intervalle non borné, ouvert à gauche et est noté $]a; +\infty[$. Ainsi $x \in]a; +\infty[\Leftrightarrow x > a$. Il est représenté sur une droite graduée suit :

b. Remarques :

- L'ensemble $\mathbb{R}$ est un intervalle non borné, ouvert et est noté $]-\infty; +\infty[$. Il est représenté par la droite numérique.
- $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres réels.

3. Centre et rayon d'un intervalle borné, fermé ou ouvert

a. Définitions et exemples : Soient a et b des réels tels que $a < b$.

- Le centre de chacun des intervalles $[a; b]$ et $]a; b[$ est le réel souvent noté c et défini par $c = \frac{a+b}{2}$. Par exemple : le centre de $[2; 3]$ est $c = \frac{5}{2} = 2,5$.
- Le rayon de chacun des intervalles $[a; b]$ et $]a; b[$ est le réel positif souvent noté r et défini par $r = \frac{b-a}{2}$. Par exemple le rayon de $[2; 3]$ est $r = \frac{1}{2} = 0,5$.
- Graphiquement on a :.....

b. Remarques :

- Si $[a; b]$ est de centre c et de rayon r alors $x \in [a; b] \Leftrightarrow d(x; c) \leq r \Leftrightarrow |x - c| \leq r$
- Si $]a; b[$ est de centre c et de rayon r alors $x \in]a; b[\Leftrightarrow d(x; c) < r \Leftrightarrow |x - c| < r$

c. Exercice d'application

Ecrire chacune des appartenances suivantes en termes de distance puis en termes de valeurs absolues : $x \in [-1; 5]$ et $x \in]-7; -1[$

4. Intersection et réunion d'intervalles

a. Définitions : Soit I et J des intervalles

- L'intersection de I et J notée $I \cap J$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à I et à J. Oralement : c'est l'ensemble des éléments communs à I et à J. « on lit : I inter J ». Ainsi $x \in I \cap J \Leftrightarrow x \in I$ et $x \in J$.
- La réunion de I et J notée $I \cup J$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à I ou à J. Oralement : c'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un au moins des deux intervalles I et J. « On lit : I union J ». $x \in I \cup J \Leftrightarrow x \in I$ ou $x \in J$.

b. Exemples : Déterminons $[-3; 2] \cap]-1; 6[$ puis $[-3; 2] \cup]-1; 6[$

- **1^{ère} méthode : En utilisant la droite numérique**
- **2^{ème} méthode : En utilisant un tableau**

On dresse un tableau à 3 lignes : la 1^{ère} contient les bornes des intervalles rangés dans le bon ordre, les deux autres colonnes contiennent respectivement $[-3; 2]$ et $]-1; 6[$. Sur la ligne de $[-3; 2]$, on met le code + dans les colonnes contenant les réels de $[-3; 2]$ et le code - dans les

autres colonnes. On fait de même sur la ligne de $] -1; 6[$ en ajoutant des doubles barres au niveau des bornes ouvertes -1 et 6. Ainsi :

- ✓ L'intersection est l'union des colonnes ne contenant que des +.
- ✓ La réunion est l'union des colonnes sauf celles ne contenant que des -.

c. Remarques

- $I \cap J$ peut ne pas avoir d'éléments, dans ce cas on dit qu'il est vide et on note $I \cap J = \emptyset$.
- $I \cap \emptyset = \emptyset$ et $I \cup \emptyset = I$.

Exercice à faire : Déterminer $] -3; 7] \cap [-1; +\infty[$ et $] -3; 7] \cup [-1; +\infty[$

II. Encadrement

1. Définition et exemple

Encadrer un nombre réel x c'est trouver des réels a et b ($a < b$) tels que $a \leq x \leq b$. Les réels a et b sont respectivement dits borne inférieure et borne supérieure de l'encadrement. Le réel $b - a$ est dit amplitude de l'encadrement. On dit qu'on a encadré x à $b - a$ près.

Par exemple avec la calculatrice à 10 chiffres, on trouve $\sqrt{2} = 1,4142135623$. Ainsi on a : $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$. Cet encadrement est d'amplitude $0,01 = 10^{-2}$ ou bien on dit qu'on a encadré $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près.

Exercice à faire : Trouver un encadrement de $\sqrt{17}$ à 10^{-1} près puis à 10^{-2} près et enfin à 10^{-4} près.

2. Encadrement et opérations

a. Encadrement de $x+y$

Soit x et y tels que : $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ alors on a : $a + c \leq x + y \leq b + d$

Par exemple, sachant que $-2 \leq x \leq 3$ et $1 \leq y \leq 1,5$, trouvons un encadrement de $x + y$.

Ainsi on a : $-1 \leq x + y \leq 4,5$

b. Encadrement de $x - y$

Comme $x - y = x + (-y)$ alors pour encadrer $x - y$, on commence d'abord par encadrer $-y$ puis $x + (-y)$.

Par exemple, sachant que $1,3 \leq x \leq 2$ et $0,5 \leq y \leq 2,3$, trouvons un encadrement de $x - y$.

On a : $0,5 \leq y \leq 2,3 \Leftrightarrow -2,3 \leq -y \leq -0,5$ d'où $-1 \leq x + (-y) \leq 1,5$ et donc

$$-1 \leq x - y \leq 1,5.$$

Attention : Pour encadrer $x-y$, on ne doit pas faire la différence membre à membre des bornes inférieures et des bornes supérieures de x et de y .

c. Encadrement de xy

- **Cas où toutes les bornes des encadrements de x et de y sont positives**

Soit x et y tels que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ avec a, b, c et d des réels positifs. On a alors

$ac \leq xy \leq bd$. Par exemple sachant que $1,3 \leq x \leq 2$ et $0,5 \leq y \leq 2,3$, trouvons un encadrement de xy . Ainsi on a : $0,65 \leq xy \leq 4,6$

- **Cas où toutes les bornes des encadrements de x et de y sont négatives**

Soit x et y tels que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ avec a, b, c et d des réels négatifs. Dans ce cas, on peut se ramener à des encadrements dont toutes les bornes sont positives en encadrant $-x$, ensuite $-y$ et enfin $(-x)(-y) = xy$. Par exemple : sachant que $-2 \leq x \leq -1$ et $-5 \leq y \leq -3$, trouvons un encadrement de xy . Ainsi on a :

$-2 \leq x \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq -x \leq 2$ et $-5 \leq y \leq -3 \Leftrightarrow 3 \leq -y \leq 5$ et donc $3 \leq (-x)(-y) \leq 10$ d'où $1 \leq xy \leq 10$.

- **Cas où les bornes de l'encadrement de x ou de y ne sont pas de même signe**

Dans ce cas, il n'y a pas de règle précise mais en scindant les intervalles on peut retrouver des des encadrements où les bornes sont de même signes et on peut appliquer les règles précédentes.

Par exemple : Sachant que $-2 \leq x \leq 3$ et $4 \leq y \leq 5$, trouvons un encadrement de xy

Comme les bornes de x ne sont pas de même signe, on peut scinder pour avoir des bornes de même signe. Ainsi on a : $-2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$ ou $0 \leq x \leq 3$. On a donc deux cas :

1^{er} cas : $-2 \leq x \leq 0$ et $4 \leq y \leq 5$. Dans ce cas, on a : $0 \leq -x \leq 2$ et $4 \leq y \leq 5$. Ainsi on a :

$$0 \leq -xy \leq 10 \text{ et donc } -10 \leq xy \leq 0$$

2^{ème} cas : $0 \leq x \leq 3$ et $4 \leq y \leq 5$. Ainsi on a donc $0 \leq xy \leq 15$

Par suite on a : $-10 \leq xy \leq 0$ ou $0 \leq xy \leq 15$ donc $-10 \leq xy \leq 15$

Exercice d'application

Sachant que $-2 \leq x \leq 5$ et $-6 \leq y \leq 7$, trouver un encadrement de xy

d. Encadrement du quotient $\frac{x}{y}$

Comme $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ alors on encadre $\frac{1}{y}$ puis $x \cdot \frac{1}{y}$.

Par exemple sachant que $1 \leq x \leq 2$ et $3 \leq y \leq 7$, trouvons un encadrement de $\frac{x}{y}$

On a $3 \leq y \leq 7 \Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$ et donc $\frac{1}{7} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq \frac{2}{3}$ d'où $\frac{1}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{3}$

Exercice d'application : Sachant que $-5 \leq x \leq -3$ et $-3 \leq y \leq -1$, trouver un encadrement de $\frac{x}{y}$

III. Calcul approché

1. Valeur approchée

a. Définition : Soit x un réel, α un réel strictement positif

On dit qu'un réel y est une valeur approchée (ou approximation) de x à α près (ou à la précision α) lorsque $|x - y| \leq \alpha$ c'est-à-dire lorsque $d(x; y) \leq \alpha$ ou lorsque $y - \alpha \leq x \leq y + \alpha$. Dans ce cas, on note $x \cong y$ à α près et α est dit incertitude de cette valeur approchée.

Exemple : Soit x tel que $3,5 \leq x \leq 4,2$. Trouvons une valeur approchée de x puis précisons l'incertitude de cette valeur approchée.

$3,5 \leq x \leq 4,2 \Leftrightarrow x \in [3,5; 4,2]$. Ainsi, calculons le centre c et le rayon r de $[3,5; 4,2]$

$c = 3,85$ et $r = 0,35$. Ainsi $x \in [3,5; 4,2] \Leftrightarrow$ d'où $|x - 3,85| \leq 0,35$ donc $3,85$ est une valeur approchée de x à $0,35$ près.

b. Valeur approchée par défaut et valeur approchée par excès

- On dit qu'un réel y est une valeur approchée de x à α près par défaut lorsque $y \leq x \leq y + \alpha$
- On dit qu'un réel y est une valeur approchée de x à α près par excès lorsque $y - \alpha \leq x \leq y$

c. Approximation décimale : Soit p un entier naturel non nul

- Une approximation décimale d'ordre p (ou à 10^{-p} près) par défaut de x est un nombre décimal qui à p chiffres après la virgule et qui est inférieur à x .
- Une approximation décimale d'ordre p (ou à 10^{-p} près) par excès de x est un nombre décimal qui à p chiffres après la virgule et qui est supérieur à x .

Exemple : Avec la calculatrice on a : $\sqrt{7} = 2,6457513110 \dots$

Ainsi 2,6 est une approximation décimale de $\sqrt{7}$ d'ordre 1 (ou à 10^{-1} près) par défaut car 2,6 est un nombre décimal qui a un chiffre après la virgule et $2,6 \leq \sqrt{7}$.

2,7 est une approximation décimale de $\sqrt{7}$ d'ordre 1 par excès car 2,7 est un nombre décimal qui a un chiffre après la virgule $\sqrt{7} \leq 2,7$.

Remarque :

Les approximations décimales d'ordre p par défaut et par excès de x sont respectivement des valeurs approchées à 10^{-p} près par défaut et par excès de x .

Exercice d'application : Trouver une approximation décimale de $\sqrt{7}$ d'ordre 3 par défaut et par excès.

2. Arrondi

Soit x un nombre réel dont on connaît une écriture décimale et n un entier naturel non nul.

- On arrondit par défaut à l'ordre n lorsque le $(n+1)^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule est inférieur strictement à 5 en écrivant le nombre jusqu'au $n^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule. Par exemple, avec la calculatrice, on a : $\sqrt{7} = 2,6457513110\dots$ Ainsi l'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{7}$ est 2,6 car le $2^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule de $\sqrt{7}$ est 4 qui est inférieur strictement à 5.
- On arrondit par excès à l'ordre n lorsque le $(n+1)^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule est supérieur à 5 en ajoutant 1 au $n^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule. Par exemple, l'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{7}$ est 2,65.

Remarque :

Pour arrondir un réel x à l'ordre 0, on procède comme suit :

- Si le 1^{er} chiffre après la virgule est inférieur strictement à 5 alors on arrondit en prenant le nombre avant la virgule.
- Si le premier chiffre après la virgule est supérieur ou égal à 5, alors on distingue deux cas :
 - ✓ **1^{er} cas :** Si x est positif alors on arrondit en ajoutant 1 au nombre qui est avant la virgule.
 - ✓ **2^{ème} cas :** Si x est négatif alors on arrondit en retranchant 1 au nombre qui est avant la virgule.

Exercice d'application : Donner l'arrondi d'ordre 0 et d'ordre 5 de $-\sqrt{7}$.

3. Partie entière

a. Partie entière d'un nombre réel

Activité

Pour chacun des réels x suivants trouver le plus grand entier relatif n inférieur à x et vérifier dans chaque cas que x est inférieur strictement à $n + 1$: $x = 2$; $x = 3,2$ et $x = -6,3$.

Solution

Pour $x=2$, le plus grand entier relatif n inférieur à 2 est $n=2$. Ainsi on a : $n \leq x$. On a donc $n + 1 = 3$ or d'où $n \leq x < n + 1$

Pour $x = 3,2$; on a : $n = 3$. Ainsi on a : $n \leq x$ donc $n + 1 = 4$ d'où $n \leq x < n + 1$

Pour $x = -6,3$ on a : $n = -7$. Ainsi, on a : $n \leq x$ donc $n + 1 = -6$ d'où $n \leq x < n + 1$

Exploitation de l'activité

Pour chacun des réels $x=2$; $x=3,2$ et $x=-6,3$, il existe un plus grand entier relatif n inférieur à x . Nous avons également vu que dans chaque cas, le réel x est inférieur strictement à $n+1$. Ainsi, on peut dire que dans chacun des cas, l'entier n vérifie $n \leq x < n + 1$. Cet entier relatif est dit partie entière du réel x .

Ce que nous avons fait pour les réels $x=2$; $x=3,2$ et $x=-6,3$ peut se généraliser à tous les nombres réels x .

Définition

On appelle partie entière d'un nombre réel x , le plus grand entier relatif inférieur à x . Il est noté $E(x)$, on lit : « E de x ». Autrement dit la partie entière de x est l'entier relatif noté $E(x)$ vérifiant : $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Exemples

$$E(2) = 2, E(3,2) = 3 \text{ et } E(-6,3) = -7$$

Propriétés

- Par définition, pour tout réel x , $E(x) \in \mathbb{Z}$.
- $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow E(x) = x$. Autrement dit si $x \in \mathbb{Z}$ alors $E(x) = x$ et réciproquement si $E(x) = x$ alors $x \in \mathbb{Z}$.

- Pour tout réel x , on a : $x - 1 < E(x) \leq x$. En effet on a par définition : $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Ce qui signifie que $E(x) \leq x$ et $x < E(x) + 1$. Or $x < E(x) + 1 \Rightarrow x - 1 < E(x)$. Ainsi on a : $x - 1 < E(x)$ et $E(x) \leq x$ d'où $x - 1 < E(x) \leq x$.

Oralement : De façon pratique, pour déterminer la partie entière $E(x)$ d'un réel x on peut procéder ainsi : Si le réel x est un entier relatif alors $E(x) = x$. Sinon, chercher le développement décimal de x avec une calculatrice au cas où on ne l'a pas : Si x est positif alors on prend le nombre avant la virgule dans le développement décimal de x . Si x est négatif alors on prend le nombre avant la virgule du développement décimal de x auquel on retranche 1. Par exemple $E(2002) = 2002$; $E(3,75666) = 3$; $E(-7,5666) = -8$; $E\left(\frac{1}{7}\right) = 0$; $E(-\sqrt{3}) = -2$

Exercice à faire

Déterminer la partie entière de x dans chacun des cas suivants :

$$x = 1,5 ; x = -9,8 ; x = 2019 ; x = \pi ; x = -\sqrt{7} \text{ et } x = -15$$

4. Notation scientifique et ordre de grandeur

a. Notation scientifique

Un réel non nul x est écrit en notation scientifique lorsqu'il est sous la forme $x = a \times 10^p$ avec a un nombre réel tel que $1 \leq |a| < 10$ et p un entier relatif.

Par exemple, donnons les notations scientifiques de 0,195 ; de 256,42 et de -0,0012

$$0,195 = 1,95 \times 10^{-1} ; 256,42 = 2,5642 \times 10^2 \text{ et } -0,0012 = -1,2 \times 10^{-3}$$

b. Ordre de grandeur

Soit x réel non nul dont la notation scientifique est $x = a \times 10^p$ et α , l'arrondi d'ordre 0 de a alors le nombre décimal $\alpha \times 10^p$ est dit ordre de grandeur de x .

Par exemple pour 0,195; l'écriture scientifique est $0,195 = 1,95 \times 10^{-1}$ et l'arrondi d'ordre 0 de 1,95 est 2 donc un ordre de grandeur de 0,195 est $2 \times 10^{-1} = 0,2$.

Chapitre 4 : Barycentre

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition du barycentre de deux et de trois points pondérés ;

- ✓ Construire, s'il existe, le barycentre de deux et de trois points pondérés ;
- ✓ Réduire le vecteur $\vec{V}_M = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$
- ✓ Utiliser les propriétés du barycentre de deux ou de trois points pour démontrer l'alignement de trois points, le parallélisme de deux droites.....

Prérequis :

- ✓ Calcul vectoriel

Supports didactiques :

- ✓ USAID;
- ✓ Guide pédagogique CIAM 2S ;
- ✓ Déclic Maths seconde ;
- ✓ Nouveau fractale seconde ;
- ✓ Collection fractale seconde ;
- ✓ Collection fractale seconde programme 2000 ;
- ✓ Collection perspectives ;
- ✓ XY Maths de Pape Ousmane Thiao ;
- ✓ CIAM 2S ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

- I. Barycentre de deux points pondérés**
 - 1. Théorème et définition
 - 2. Propriétés
 - 3. Construction du barycentre de 2 points
- II. Barycentre de trois points pondérés**
 - 1. Théorème et définition
 - 2. Propriétés
 - 3. Construction du barycentre de trois points
- III. Réduction d'une somme vectorielle**
 - 1. Rappels
 - 2. Réduction du vecteur $a\vec{MA} + b\vec{MB}$
 - 3. Réduction du vecteur $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$

Déroulement du chapitre

I. Barycentre de deux points pondérés

1. Théorème et définition

Soit A et B des points, α et β des réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un unique point que l'on peut noter G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Ce point G est dit barycentre du système $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ et on note $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ ou $G = \text{bary} \frac{A}{\alpha} \frac{B}{\beta}$. Les couples (A, α) et (B, β) sont dits points pondérés et les réels α et β sont dits coefficients des points pondérés.

a. Remarques

a) Si $\alpha = \beta \neq 0$ alors $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \alpha)\}$ est dit isobarycentre de A et B.

b) Si $\alpha = 0$ alors $\beta \neq 0$ et $G = \text{bar}\{(A, 0); (B, \beta)\} = B$.

c) Si $\beta = 0$ alors $\alpha \neq 0$ et $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, 0)\} = A$.

Dans toute la suite, on suppose que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

b. Exercice d'application :

Traduire les égalités vectorielles suivantes en utilisant le mot barycentre :

$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}; \quad \overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{BG} = \vec{0}; \quad -\overrightarrow{IE} + 4\overrightarrow{IF} = \vec{0} \text{ et } -2\overrightarrow{KP} - 3\overrightarrow{RK} = \vec{0}$$

2. Propriétés

P1) $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(B, \beta); (A, \alpha)\}$. Cette propriété est dite commutativité du barycentre.

Preuve :

$$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \beta \overrightarrow{GB} + \alpha \overrightarrow{GA} = \vec{0} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(B, \beta); (A, \alpha)\}.$$

P2) L'isobarycentre de A et B est le milieu de [AB] c'est-à-dire $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \alpha)\} \Leftrightarrow G$ milieu de [AB].

Preuve

$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \alpha)\} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \alpha \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \text{ car } \alpha \neq 0$ or $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [AB]$ d'où $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \alpha)\} \Leftrightarrow G \text{ milieu de } [AB]$.

$$\text{P}_3) G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \overrightarrow{BA}$$

Preuve

$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta) \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow -(\alpha + \beta) \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow -(\alpha + \beta) \overrightarrow{AG} = -\beta \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\alpha + \beta) \overrightarrow{AG} = \beta \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB} \text{ car } \alpha + \beta \neq 0$. Ainsi on a : $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB}$.

Dans la relation $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ si on écrit $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}$ et en raisonnant de la même manière que comme ci-dessus, on montre que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \overrightarrow{BA}$. Ainsi on a :

$$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \overrightarrow{BA}$$

P4) Si $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors G, A et B sont alignés et donc G appartient à la droite (AB). De plus, si α et β sont de même signe alors $G \in [AB]$ et si α et β sont de signes contraires alors $G \notin [AB]$. Si $|\alpha| > |\beta|$ alors G est plus proche de A que de B et si $|\beta| > |\alpha|$ alors G est plus proche de B que de A.

P5) Soit k un réel non nul. $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A, k \times \alpha); (B, k \times \beta)\}$. Autrement dit, on ne change pas le barycentre d'un système de deux points pondérés en multipliant (ou en divisant) chacun des coefficients des points par un même réel non nul. Cette propriété est dite homogénéité du barycentre.

Preuve

$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow k(\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}) = \vec{0} \Leftrightarrow k\alpha \overrightarrow{GA} + k\beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ or $\alpha + \beta \neq 0$ et $k \neq 0$ donc $k(\alpha + \beta) \neq 0$ d'où $k\alpha + k\beta \neq 0$ Ainsi $k\alpha \overrightarrow{GA} + k\beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A, k \times \alpha); (B, k \times \beta)\}$.

3. Construction du barycentre de deux points

Pour construire $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, on peut utiliser $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \overrightarrow{BA}$

a. Exemple

Soient A et B deux points distincts. Construisons $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$. On a $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, 2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b. Exercice d'application

Soient deux points distincts A et B. Construire $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -4)\}$

II. Barycentre de trois points pondérés

1. Théorème-définition

Soient α, β et γ des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et A, B et C des points. Il existe un unique point G tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Le point G est dit barycentre du système $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$. On note $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ ou bien ...

2. Propriétés et théorème

a. Propriété 1

L'isobarycentre de trois points non alignés A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.

Preuve

$$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \alpha \overrightarrow{GB} + \alpha \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ car } \alpha \neq 0 \text{ or } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow G \text{ centre de gravité de ABC.}$$

b. Propriété 2

$$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC} \text{ ou } \overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$$

c. Propriété 3 : Soit k un réel non nul.

$G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow G = \text{bar}\{(A, k \times \alpha); (B, k \times \beta); (C, k \times \gamma)\}$. Autrement dit, on ne change pas le barycentre d'un système de trois points pondérés en multipliant ou en divisant chacun des coefficients des points par un même réel non nul. Cette propriété est dite homogénéité du barycentre.

d. Théorème

Si G est le barycentre d'un système de 3 points pondérés alors on peut regrouper 2 points dont la somme des coefficients est non nulle et les remplacer par leur barycentre dit barycentre partiel affecté de cette somme. Cette propriété est dite associativité du barycentre.

Exemple : $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, 3)\} \Leftrightarrow G = \text{bary}\{(I, 1); (C, 3)\}$ où $I = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2)\}$. I est dit barycentre partiel.

Remarque

Si G est le barycentre de deux points pondérés alors on peut remplacer un point pondéré par un système de deux points pondérés à condition que ce point pondéré soit le barycentre de ce système et qu'il soit affecté d'un coefficient qui est égal à la somme des coefficients du système.

Exercice d'application

1. On donne $G = \text{bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 3)\}$, $I = \text{bar}\{(A, -1); (C, 3)\}$, $J = \text{bar}\{(B, 2); (C, 3)\}$ et $K = \text{bar}\{(A, -1); (B, 2)\}$
 - a. Ecrire G comme barycentre de A et J puis G comme barycentre de B et I et enfin G comme barycentre de C et K .
 - b. En déduire que les droites (BI) , (AJ) et (CK) sont concourantes en un point que l'on précisera.
2. On donne $P = \text{bar}\{(I, 2); (B, 3)\}$
 - a. Ecrire P comme barycentre des points A , B et C .
 - b. En déduire que P appartient à une médiane du triangle ABC .
3. **Construction du barycentre de trois points**

Pour construire $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, on peut utiliser l'une des trois relations suivantes : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$

a. Exemple

Soient A , B et C des points non alignés, Construisons $= \text{bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$

b. Exercice à faire

Soient A, B et C des points non alignés, Construire = $\text{bar}\{(A, 1); (B, -2); (C, 3)\}$

III. Réduction d'une somme vectorielle

1. Rappels

- Soient O un point et r un réel constant strictement positif. L'ensemble des points M du plan vérifiant $MO = r$ est le cercle de centre O et de rayon r.
- Soient A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan vérifiant $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
- Soient A, B et O trois points distincts. L'ensemble des points M du plan vérifiant $(OM) \parallel (AB)$ est la droite parallèle à (AB) passant par O.

2. Réduction du vecteur $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$

L'objectif de cette partie est de réduire le vecteur $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$.

a. 1^{er} cas : $\alpha + \beta = 0$

$\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$ donc $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \alpha \overrightarrow{MA} - \alpha \overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \alpha(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) = \alpha(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}) = \alpha \overrightarrow{BA}$. On a donc $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \alpha \overrightarrow{BA}$. Ainsi si $\alpha + \beta = 0$ alors le vecteur $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB}$ est indépendant du point M (on dit qu'il est constant).

Exercice d'application

Soit A et B deux points distincts tel que $AB = 3 \text{ cm}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$ est indépendant de M.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = MA$

b. 2^{ème} cas : $\alpha + \beta \neq 0$

Dans ce cas, le système $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ admet un barycentre. Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$. Ainsi si $\alpha + \beta \neq 0$ alors $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$ où $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.

Exercice d'application

Soient A et B deux points distincts.

1. Réduire le vecteur $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}$.

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = MB$.

3. Réduction du vecteur $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$

a. 1^{er} cas : $\alpha + \beta + \gamma = 0$

$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MA} + \gamma \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$. Ainsi si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ alors $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC}$ et donc le vecteur $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M.

Exercice d'application

Soient A, B et C des points. Réduire le vecteur $2 \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3 \overrightarrow{MC}$

b. 2^{ème} cas : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

Dans ce cas, le système $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ admet un barycentre.

Soit $G = \text{bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.

$$\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})$$

$$= \alpha \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{MG} + \gamma \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC}$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} \text{ or } G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \text{ donc}$$

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ d'où } \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}. \text{ Ainsi si } \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

$$\text{alors } \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

Exercice d'application

Soient A, B et C trois points distincts.

1. Réduire le vecteur $\overrightarrow{MA} + 2 \overrightarrow{MB} - 2 \overrightarrow{MC}$

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} + 2 \overrightarrow{MB} - 2 \overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

Chapitre 5 : Equations et inéquations du second degré

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- Résoudre une équation du second degré par la méthode du discriminant.
- Résoudre des problèmes se ramenant à une équation du second degré.
- Trouver la forme canonique d'un trinôme du second degré.
- Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
- Résoudre des équations se ramenant au second degré.
- Trouver le signe d'un trinôme du second degré.
- Résoudre une inéquation du second degré.

Prérequis :

- ✓ Calcul dans $\mathbb{R}$
- ✓ Equations et inéquations du premier degré.

Supports didactiques :

- ✓ USAID ;
- ✓ CIAM 2S ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

I. Equations et trinômes du second degré

1. Problème se ramenant au second degré
2. Equation du second degré
3. Trinôme du second degré
4. Résolution d'une équation du second degré
5. Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

II. Somme et du produit des racines d'un trinôme du second degré

1. Définition
2. Remarque
3. Expression de la somme et du produit
4. Utiliser la somme ou le produit des racines pour résoudre une équation du second degré dont on connaît une solution évidente.

III. Equations se ramenant à une équation du second degré

1. Equations bicarrées
2. Equations du type $ax^2 + b|x| + c = 0$

3. Equations du type $ax + b\sqrt{x} + c = 0$

IV. Inéquations du second degré

1. Définition
2. Factorisation d'un trinôme
3. Signe d'un trinôme
4. Résolution d'une inéquation du second degré

Déroulement du cours

Introduction orale

Les équations et inéquations apparaissent dans les programmes sénégalais à partir de la 5^{ème}. Elles sont aussi revenues en 4^{ème} et en 3^{ème}.

Les équations et inéquations du second degré revêtent d'une importance capitale car de nombreux problèmes issus des mathématiques, des différentes sciences et du domaine technique conduisent à des équations ou inéquations du second degré.

Le premier témoignage connu de résolution d'une équation du second degré se trouve sur une tablette babylonienne, datant environ de 2000 avant Jésus-Christ. C'est le mathématicien arabe, **Al-Khwarizmi (788-850)** qui en a fait une étude systématique.

Vérification des prérequis :

1. Donner la définition d'une équation.

Réponse attendue : Une équation est une égalité dans laquelle figure une ou plusieurs inconnues. Dans une équation, une inconnue est désignée par une lettre.

2. Donner la définition d'une équation du premier degré d'inconnue x.

Réponse attendue : Une équation du 1^{er} degré d'inconnue x est une égalité qui peut se mettre sous la forme $ax + b = 0$ où a est un réel non nul et b un réel quelconque.

3. Donner une équation du premier degré puis la résoudre dans $\mathbb{R}$.

Réponse attendue : $2x + 3 = 0$ est une équation du premier d'inconnue x.

$$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ d'où } S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$. chacune des équations suivantes :

$$x^2 = 169; x^2 + 1 = 0; x^2 - 4 = 0; 2x^2 - 3 = 0; 3x^2 + 1 = 0; 5x^2 - 3x = 0$$

I. Equations et trinômes du second degré

1. Problème se ramenant au second degré

Un triangle ABC est rectangle en A d'hypoténuse $BC = \sqrt{10}$ tel que $AB = x$ et $AC = x + 2$ où x est un réel. Montrer qu'on a $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Solution

D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc $10 = x^2 + (x + 2)^2$

$$10 = 2x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

Pour trouver les côtés AB et AC du triangle ABC, il faudra résoudre l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$. L'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ est dite équation du 2nd degré d'inconnue x .

2. Equation du second degré

a. Définition

Une équation du second degré d'inconnue x est une équation qui peut se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a est un réel donné non nul, b et c des réels donnés. Les réels a , b et c sont dits coefficients de l'équation.

b. Exemples

- $-x^2 + 7x - 12 = 0$ est une équation du 2nd degré d'inconnue x où $a = -1$; $b = 7$ et $c = -12$
- $\frac{1}{2}y^2 + 5y - 1 = 0$ est une équation du 2nd degré d'inconnue y où $a = \frac{1}{2}$; $b = 5$ et $c = -1$.
- $3x^2 + 1 = 0$ est une équation du 2nd degré d'inconnue x où $a = 3$; $b = 0$ et $c = 1$.
- $t^2 - 2t = 0$ est une équation du 2nd degré d'inconnue t où $a = 1$; $b = -2$ et $c = 0$.

3. Trinôme du second degré

a. Définition

Un trinôme du second degré de la variable x est une expression qui peut se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c$ où a est un réel donné non nul, b et c des réels donnés. Les réels a , b et c sont dits coefficients du trinôme.

b. Exemples

- $-x^2 + 7x - 12$ est un trinôme du 2nd degré de la variable x .
- $y^2 + 2y$ est un trinôme du 2nd degré de la variable y .

c. Remarques

- Il ne faut pas confondre une équation du 2nd degré qui est une égalité contenant une inconnue et un trinôme du 2nd degré qui est une expression renfermant une variable.
- Un trinôme du 2nd degré de la variable x est souvent désigné par $f(x); g(x) \dots$. Ainsi, $f(x) = -x^2 + 7x - 12$ est un trinôme du 2nd degré.

d. Forme canonique d'un trinôme du second degré

Théorème et définition

Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut se mettre sous la forme $a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ où

$\Delta = b^2 - 4ac$. L'écriture $a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ est dite forme canonique du trinôme et le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est dit discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Cas particuliers

- Si $b = 0$ alors le trinôme devient $ax^2 + c$ et sa forme canonique est $a \left(x^2 + \frac{c}{a}\right)$.
- Si $c = 0$ alors le trinôme devient $ax^2 + bx$ et sa forme canonique est $a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right]$.
- Si $b = c = 0$ alors trinôme devient ax^2 et sa forme canonique est ax^2 .

Exemples : Donnons les formes canoniques des trinômes suivants : $5x^2 + 3x + 1$ et $-4x^2 + 1$ et $2x^2 + 3x$.

Pour $5x^2 + 3x + 1$, $\Delta = b^2 - 4ac = -11$; $5x^2 + 3x + 1 = 5 \left[\left(x + \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{100} \right]$.

Pour

Pour $2x^2 + 3x = 2 \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \right]$.

Exercice d'application : Donner la forme canonique de $-x^2 + x + 6$

4. Résolution d'une équation du second degré

a. Activité

On considère l'équation du second degré $x^2 + bx + c = 0$.

- 1) Donner la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c = 0$.
- 2) Montrer que $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$
- 3) En utilisant 2), résoudre $ax^2 + bx + c = 0$ en distinguant 3 cas : $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$.

Solution

1) $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

2) $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$
 $\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ car $a \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

3) On suppose que $\Delta < 0$. Ainsi $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$.

Et comme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ donc l'équation $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Par suite l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on écrit $S = \emptyset$.

On suppose que $\Delta = 0$. Ainsi $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ donc } -\frac{b}{2a} \text{ est solution de}$$

l'équation $ax^2+bx+c=0$. On dit que c'est une solution double. On écrit $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

On suppose que $\Delta > 0$. Ainsi $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ donc $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$. Par suite

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Donc $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est

$$S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$$

b. Résumé

Pour résoudre une équation du 2nd degré $ax^2 + bx + c = 0$, il faut d'abord calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas sont possibles :

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution et donc $S = \emptyset$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation a deux solutions identiques dites solution double notée $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et donc $S = \{x_0\}$.
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions distinctes $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. L'une est notée x_1 et l'autre x_2 et donc $S = \{x_1; x_2\}$

c. Exemples : Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $2x^2+x-1=0$

b) $9x^2-12x+4=0$

c) $3x^2-x+1=0$

Corrigé

a) $\Delta = b^2 - 4ac = 9$ donc $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$$

$$\text{D'où } S = \left\{\frac{1}{2}; -1\right\}$$

b) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ donc $\Delta = 0$ donc l'équation admet une solution double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{3}. \text{ D'où } S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

c) $\Delta = b^2 - 4ac = -11$ donc $\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution. D'où $S = \emptyset$.

d. Remarques

- Si $b = 0$ alors pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, il n'est pas nécessaire de calculer Δ mais il suffit de transposer c . Par exemple $2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$ donc $S = \emptyset$.
- Si $c = 0$ alors pour résoudre $ax^2 + bx + c = 0$, il n'est pas nécessaire de calculer Δ mais il suffit de factoriser par x . Par exemple $2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$ d'où $S = \left\{0; -\frac{1}{2}\right\}$.

e. Discriminant réduit

Propriété : Soit l'équation du 2nd degré $ax^2 + bx + c = 0$ tel que $b = 2b'$. Pour résoudre cette équation, on peut calculer $\Delta' = b'^2 - ac$ dit discriminant réduit de l'équation.

- Si $\Delta' < 0$ alors $S = \emptyset$.
- Si $\Delta' = 0$ alors l'équation a une solution double notée x_0 et $x_0 = -\frac{b'}{a}$ donc $S = \{x_0\}$.
- Si $\Delta' > 0$ alors l'équation a deux solutions distinctes $\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$.

$$\text{Donc } S = \left\{\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}; \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

$$b = -12 = 2(-6) \text{ donc } b' = -6. \text{ Par suite}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 36 - 36 = 0 \text{ d'où } x_0 = -\frac{b'}{a} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}. \text{ Par suite : } S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

5. Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit

a. Activité

On se propose de trouver deux nombres x et y connaissant leur somme $S = x + y$ et leur produit $P = xy$. Montrer que x et y sont les solutions d'une équation du second degré que l'on précisera.

Solution

$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x \\ x(S - x) = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x \\ xS - x^2 - P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x \\ x^2 - Sx + P = 0 \end{cases}$ d'où x est une éventuelle solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$. En raisonnant de la même manière, on montre que $y^2 - Sy + P = 0$. Par suite, y est une solution éventuelle de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

b. Théorème

Si deux nombres réels sont tels que leur somme S et leur produit P sont connus alors s'ils existent ils sont de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

c. Exemple

Un terrain rectangulaire a pour périmètre 14 m et pour aire 12 m^2 . Déterminer la longueur et la largeur de ce terrain.

Solution :

Soient x, y , la longueur et la largeur du terrain respectivement. On a : $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$. Ainsi, x et y sont solutions de l'équation $X^2 - 7X + 12 = 0$

$\Delta = 1$; $X_1 = 3$; $X_2 = 4$ Par suite $x = 4$ et $y = 3$.

II. Somme et produit des racines d'un trinôme du second degré

1. Définition

On dit qu'un réel α est racine (zéro) du trinôme $ax^2 + bx + c$ si α est solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (c'est-à-dire si $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$)

2. Remarques

- Si $a + b + c = 0$ alors 1 est une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si $a + c = b$ alors -1 est une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.

3. Expression de la somme et du produit des racines d'un trinôme

a. Théorème

Si un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ admet des racines alors leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$ et leur produit est égal $\frac{c}{a}$.

Preuve (exo)

b. Exemple :

Sans calculer les racines du trinôme $x^2 - x - 6$, déterminons leur somme et leur produit.

Corrigé

$\Delta = 25$ donc $x^2 - x - 6$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 . On a : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 1$ et $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -6$.

4. Utilisation de la somme ou du produit des racines d'un trinôme

a. Propriété

Pour résoudre une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ connaissant une solution, il suffit d'utiliser la somme ou le produit des racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ afin de trouver l'autre solution.

b. Corollaire

- Si 1 est solution d'une équation du 2nd degré $ax^2 + bx + c = 0$ alors l'autre solution est $-\frac{c}{a}$.
- Si -1 est solution d'une équation du 2nd degré $ax^2 + bx + c = 0$ alors l'autre solution est $-\frac{c}{a}$.

c. Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x^2 - 7x - 9 = 0$.

Solution

$a + c = 2 - 9 = -7$ donc -1 est une solution donc l'autre solution est $-\frac{c}{a} = \frac{9}{2}$. Par suite $S = \left\{-1; \frac{9}{2}\right\}$.

III. Equations se ramenant au 2nd degré

1. Équations bicarrées

a. Définition

On appelle équation bicarrée, toute équation qui peut se mettre sous la forme

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ où $a \neq 0$, b et c sont des réels donnés.

b. Exemple

$-4x^4 + x^2 + 3 = 0$ est une équation bicarrée.

c. Exemple de résolution

Activité

On considère l'équation bicarrée $-4x^4 + x^2 + 3 = 0$

1. En posant $X = x^2$, montrer que l'équation $-4x^4 + x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow -4X^2 + X + 3 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $-4X^2 + X + 3 = 0$. En déduire les solutions de $-4x^4 + x^2 + 3 = 0$.

Corrigé

1. On pose $X = x^2$. Comme $x^4 = (x^2)^2$ alors $-4x^4 + x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow -4X^2 + X + 3 = 0$.
2. $-4 + 1 + 3 = 0$ donc $X=1$ est une solution de $-4X^2 + X + 3 = 0$ donc l'autre solution est $-\frac{3}{4}$. Comme $X = x^2$ donc $x^2 = 1$ ou $x^2 = -\frac{3}{4}$. Or $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$ et $x^2 = -\frac{3}{4}$ est impossible donc l'ensemble des solutions de l'équation $-4x^4 + x^2 + 3 = 0$ est $S = \{1; -1\}$.

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 + x^2 - 6 = 0$

Corrigé

Posons $X = x^2$, on a : $x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0$. Pour $X^2 + X - 6 = 0$, $\Delta = 25$
Donc $X = 2$ et $X = -3$ sont les solutions de l'équation $X^2 + X - 6 = 0$. Comme $X = x^2$ donc $x^2 = 2$ ou $x^2 = -3$.

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

$x^2 = -3$ impossible. Donc l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

2. Équations du type $ax^2 + b|x| + c = 0$

a. Exemple

L'équation $2x^2 - 7|x| + 3 = 0$ est du type $ax^2 + b|x| + c = 0$ avec $a = 2$; $b = -7$ et $c = 3$.

b. Exemple de résolution

1. On pose $X = |x|$. Comme $x^2 = |x|^2$ donc $2x^2 - 7|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 7X + 3 = 0$.
2. Pour $2X^2 - 7X + 3 = 0$; $\Delta = 25$ Ainsi les solutions de $2X^2 - 7X + 3 = 0$ sont :
 $X = 3$ ou $X = \frac{1}{2}$. Comme $X = |x|$ donc $|x| = 3$ ou $|x| = \frac{1}{2}$. Or $|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3$ et $|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$ donc l'ensemble des solutions de l'équation $2x^2 - 7|x| + 3 = 0$ est $S = \left\{3; -3; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

c. Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + |x| - 6 = 0$

Corrigé

Posons $X = |x|$, on a : $x^2 + |x| - 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 6 = 0$. Pour $X^2 + X - 6 = 0$, $\Delta = 25$

Donc $X = 2$ et $X = -3$ sont les solutions de l'équation $X^2 + X - 6 = 0$.

Comme $X = |x|$, alors $|x| = 2$ ou $|x| = -3$

$|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$ et $|x| = -3$ impossible. Donc l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 + |x| - 6 = 0$ est $S = \{2; -2\}$.

3. Équations du type $ax + b\sqrt{x} + c = 0$

a. Exemple

L'équation $x + \sqrt{x} - 2 = 0$ est une équation du type $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ avec $a = 2; b = -7$ et $c = 3$.

b. Exemple de résolution

1. On pose $X = \sqrt{x}$. Montrer que $x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $X^2 + X - 2 = 0$. En déduire les solutions de $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

Corrigé

1. On pose $X = \sqrt{x}$ donc $x + \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 2 = 0$.
2. Pour $X^2 + X - 2 = 0$, on a $1 + 1 - 2 = 0$ donc $X = 1$ et $X = -2$ sont les solutions de $X^2 + X - 2 = 0$. Comme $X = \sqrt{x}$ donc $\sqrt{x} = 1$ ou $\sqrt{x} = -2$. Or $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ et $\sqrt{x} = -2$ impossible donc l'ensemble des solutions de l'équation $x + \sqrt{x} - 2 = 0$ est $S = \{1\}$.

c. Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x + 2\sqrt{x} + 3 = 0$

Corrigé

Posons $X = \sqrt{x}$, on a : $-x + 2\sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow -X^2 + 2X + 3 = 0$. Pour $-X^2 + 2X + 3 = 0$, on a $-1 + 3 = 2$ donc $X = -1$ et $X = 3$ sont les solutions de l'équation $-X^2 + 2X + 3 = 0$.

Comme $X = \sqrt{x}$ donc $\sqrt{x} = -1$ ou $\sqrt{x} = 3$
 $\sqrt{x} = -1$ impossible et $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $-x + 2\sqrt{x} + 3 = 0$ est $S = \{9\}$.

IV. Inéquations du second degré

1. Définition

Une inéquation du second degré est une inéquation qui peut se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c (\geq \text{ ou } > \text{ ou } \leq \text{ ou } <) 0$ avec $a \neq 0$; b et c des nombres réels donnés.

2. Factorisation d'un trinôme du second degré

a. Propriété

Pour factoriser un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, on calcule le discriminant Δ .

- Si $\Delta = 0$ alors la forme factorisée du trinôme est $a(x - x_0)^2$ où $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors la forme factorisée du trinôme est $a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta < 0$ alors on admet que le trinôme n'est pas factorisable.

b. Exemple

Factorisons le trinôme $2x^2 - 7x + 3$

Corrigé

$$\Delta = 25 \text{ donc } x_1 = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = 3 \text{ d'où}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = (2x - 1)(x - 3)$$

c. Exercice d'application

Factoriser les trinômes $9x^2 + 6x + 1$ et $x^2 + x + 1$

Corrigé

Pour $9x^2 + 6x + 1$, $\Delta = 0$ donc $x_0 = -\frac{1}{3}$ d'où

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6x + 1 &= 9\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &= (3x + 1)(3x + 1) \end{aligned}$$

Pour $x^2 + x + 1$, $\Delta = -3$ donc $x^2 + x + 1$ ne peut pas se factoriser.

3. Signe d'un trinôme du second degré

a. Propriété

Pour étudier le signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$ alors on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors on le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	•	Signe de a

- Si $\Delta > 0$ alors on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	•	•	Signe de a

b. Exemple

Étudions le signe de $2x^2 - 7x + 3$

Corrigé

$\Delta = 25$ donc $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 3$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x^2 - 7x + 3$	+	•	•	+

c. **Exercice d'application** : Étudier le signe des trinômes $-9x^2 + 6x - 1$ et $x^2 + x + 1$.

4. Résolution d'inéquations du second degré

a. Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $-2x^2 + x + 1 \geq 0$

Corrigé

1. $-2 + 1 + 1 = 0$ donc 1 est une racine et l'autre racine est $-\frac{1}{2}$. On a donc

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-2x^2 + x + 1$	-	•	•	-

2. $-2x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ donc $S = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

b. Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 + x + \frac{1}{4} > 0$

Corrigé : $\Delta = 0$ et $x_0 = -\frac{1}{2}$

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x^2 + x + \frac{1}{4}$	+	•	+

$S =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; +\infty[$

Chapitre 6: ANGLES ORIENTES ET TRIGONOMETRIE

Durée : 12h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition du radian ;
- ✓ Calculer la longueur d'un arc de cercle ;
- ✓ Convertir les degrés en radians et inversement ;
- ✓ Reconnaître sur un dessin codé un angle orienté de demi-droites ou de vecteurs ;
- ✓ Restituer le vocabulaire : mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Déterminer la mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Construire un angle orienté connaissant sa mesure principale ;
- ✓ Restituer la définition du cercle trigonométrique ;
- ✓ Restituer et utiliser la relation fondamentale $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- ✓ Restituer les relations entre les lignes trigonométriques des angles opposés, des angles complémentaires et des angles supplémentaires ;
- ✓ Déterminer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ (x étant la mesure principale d'un angle orienté) en utilisant les angles remarquables, les angles associés et la calculatrice ;
- ✓ Utiliser les configurations du cercle trigonométrique ;
- ✓ Etudier le signe du cosinus et du sinus d'un angle orienté connaissant sa mesure principale.

Prérequis :

- ✓ Angles géométriques

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 2^{nde} S ;
- ✓ Collection Spirale 2^{nde} ;
- ✓ Collection perspectives 2^{nde} ;
- ✓ USAID 2^{nde} ;
- ✓ Collection Fractale 2^{nde} ;

Plan de la leçon

I. Angle orienté

1. Rappels et compléments sur les angles géométriques (ou angles non orientés)

- a. Définition
- b. Définition et notation du radian
- c. Angle inscrit et angle au centre
- d. Quadrilatères inscrits
- 2. Orientation du plan
 - a. Orientation du cercle
 - b. Orientation du plan
 - c. Remarques
- 3. Angles orientés de deux demi-droites de même origine
- 4. Angles orientés de deux vecteurs non nuls
- II. Trigonométrie
 - 1. Cercle trigonométrique
 - a. Définition
 - b. Activité 1
 - c. Activité 2
 - 2. Cosinus, sinus et tangente d'un réel
 - a. Définition
 - b. Exemples
 - c. Lignes trigonométriques d'angles remarquables
 - d. Propriétés
 - e. Signe du cosinus et du sinus
 - f. Lignes trigonométriques d'angles associés

Déroulement du cours

Introduction orale

Imaginons, une personne étrangère qui veut prier et par manque de repère se dirige vers le sud. Si tu veux qu'il se retourne pour faire face à l'Est alors quelle consigne vous allez lui donner ?

Naturellement, tu dois lui demander de tourner d'un angle de 90° . Mais si tu te limites à ça, l'étranger peut tourner de 90° vers la droite et dans ce cas, il fera face à l'Ouest au lieu de l'Est, donc il est nécessaire de lui indiquer qu'il doit tourner de 90° vers la gauche pour faire face à l'Est. Ainsi pour cet étranger, il ne s'agit pas seulement de tourner d'un angle de 90° mais il y a aussi un sens dans lequel il doit tourner. Ce problème met en évidence l'importance des angles

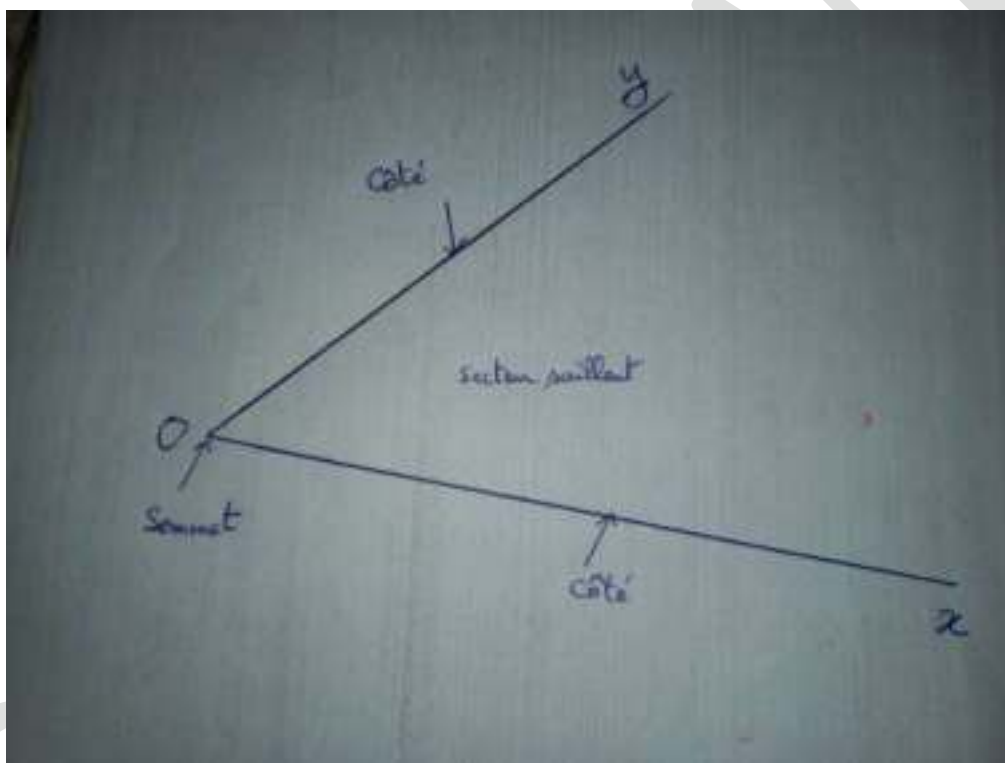
définis avec un sens d'orientation. La notion d'angles orientés s'impose et contribuera sans doute plus que les angles géométriques.

I. Angle orienté

1. Rappels et compléments sur les angles géométriques (ou angles non orientés)

a. Définition

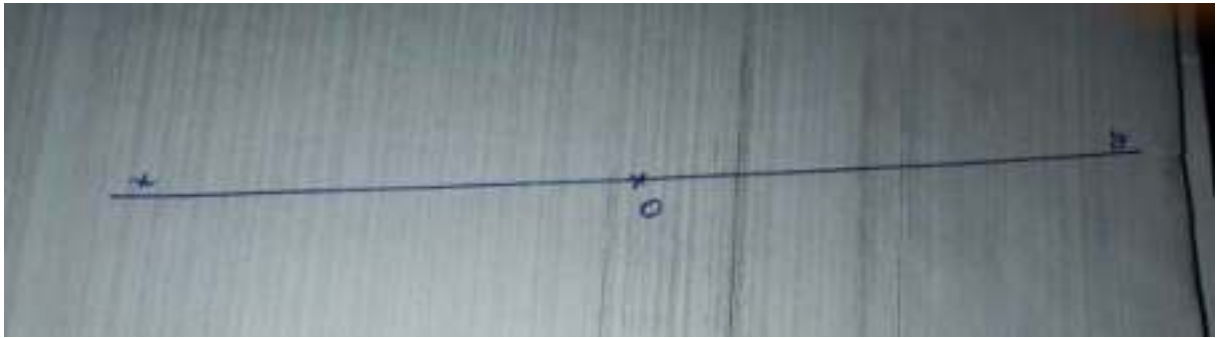
Deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine O définissent un angle noté $\widehat{xOy}$ ou $\widehat{yOx}$ dit angle géométrique ou angle non orienté. O est le sommet de l'angle ; $[Ox)$ et $[Oy)$ sont les côtés de l'angle.



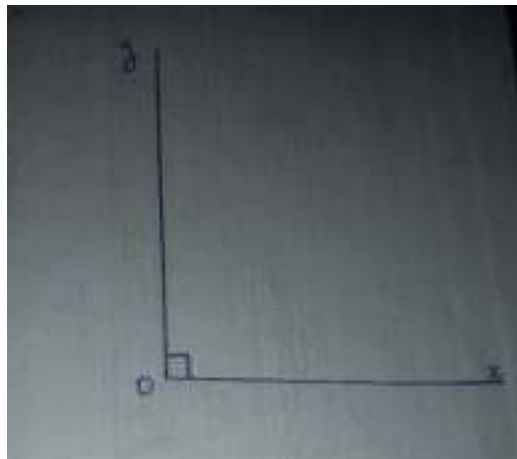
- Si les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont confondues alors l'angle $\widehat{xOy}$ est dit angle nul.



- Si les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont opposées alors l'angle $\widehat{xOy}$ est dit angle plat.



- Si les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont perpendiculaires alors l'angle $\widehat{xOy}$ est dit angle droit.



b. Définition et notation du radian

Le radian noté rad est une unité de mesure d'angles choisie de telle sorte qu'un angle plat mesure π rad.

➤ Relation entre le degré et le radian

Si x est la mesure en degrés et y la mesure en radians d'un même angle géométrique alors: $\frac{x}{y} = \frac{180}{\pi}$. Ce qui équivaut aussi à $180y = \pi x$.

➤ Tableau de conversion en radians des mesures en degrés des angles remarquables

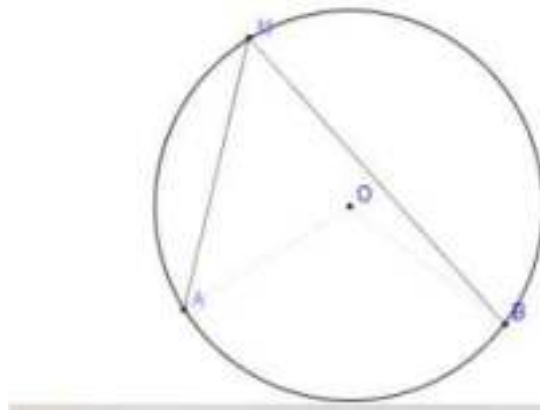
La relation $180y = \pi x$ a permis de convertir en radians les mesures en degrés ci-dessous d'angles dits angles remarquables. On obtient le tableau suivant.

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°
y	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad

NB : Généralement, dans la pratique, on confond un angle géométrique et sa mesure.

c. Angle inscrit dans un cercle et angle au centre d'un cercle.

- **Définitions** : Soit (C) un cercle de centre O passant par des points A, B et M deux à deux distincts.

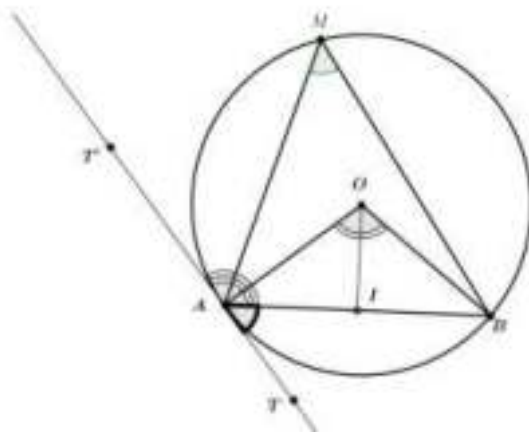


- Un angle inscrit dans (C) est un angle dont le sommet est sur (C) et ses cotés recoupent (C). Par exemple : sur la figure ci-dessus, l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans (C).
- Un angle au centre de (C) est un angle dont le sommet est le centre O de (C). Par exemple : sur la figure ci-dessus, l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre de (C).
- L'arc de cercle intercepté par un angle inscrit dans un cercle (C) est l'arc de (C) ne contenant pas son sommet.
- L'arc de cercle intercepté par un angle au centre de (C) est l'arc de ce cercle contenu dans son secteur saillant.

Par exemple, l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ et l'angle au centre $\widehat{AOB}$ interceptent le petit arc noté $\widehat{AB}$. On dit que $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ sont associés. Le grand arc est noté $\widetilde{AB}$

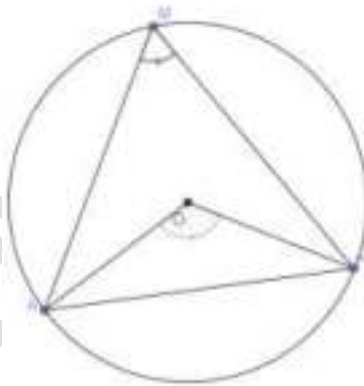
➤ **Remarque**

Si le sommet d'un angle est sur un cercle (C), l'un de ses cotés recoupe (C) tandis que l'autre côté est tangent à (C) alors on dit aussi que cet angle est un angle inscrit dans (C). Par exemple, sur la figure ci-dessus, l'angle $\widehat{TAB}$ est angle inscrit dans (C) qui intercepte l'arc $\widehat{AB}$.

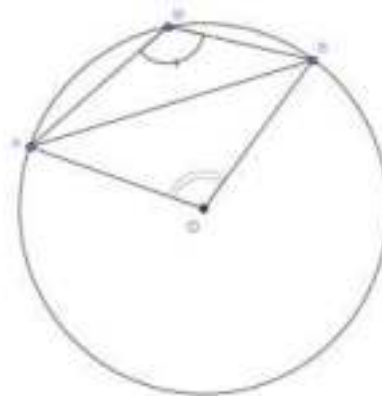


➤ Propriétés

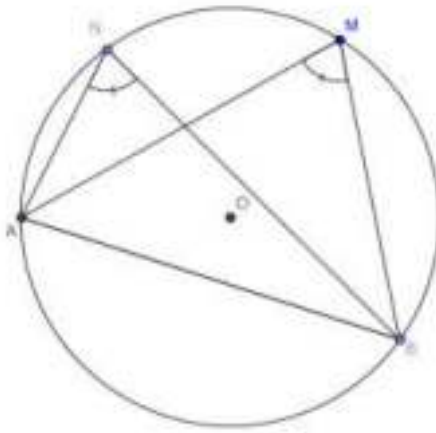
P1) Dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc de cercle alors l'angle au centre est le double de l'angle inscrit. Par exemple, sur la figure ci-dessous $\widehat{AOB} = 2 \widehat{AMB}$ (ou bien $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$).



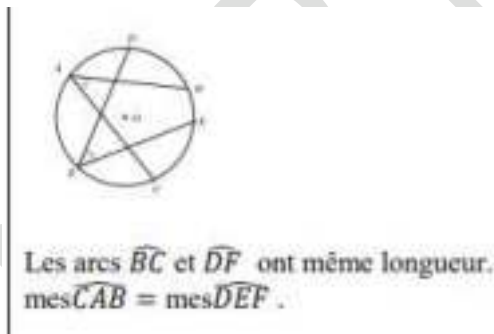
P2) Dans un cercle, si l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le grand arc $\widehat{AB}$ alors $\widehat{AOB} = 2(\pi - \widehat{AMB})$ (ou bien $\widehat{AMB} = \pi - \frac{1}{2} \widehat{AOB}$).



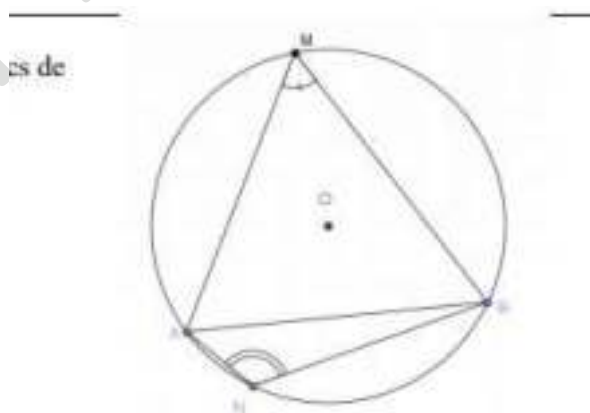
P3) Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc alors ils sont égaux. Par exemple, sur la figure ci-dessous $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.



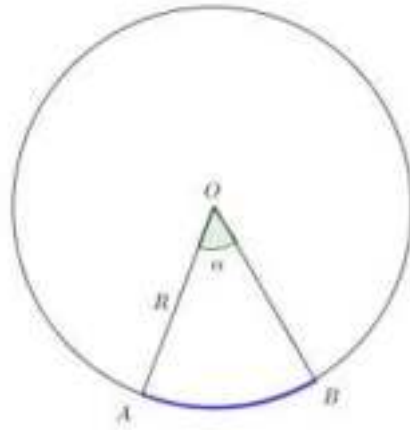
P4) Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent des arcs de même longueur alors ils sont égaux.



P5) Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent des arcs distincts de même extrémité alors ils sont supplémentaires. Par exemple, sur la figure ci-dessous $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \pi$



P6) Soit (C) un cercle de centre O, de rayon r passant par des points distincts A et B tels que $\widehat{AOB} = \alpha \text{ rad}$. Si l est la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ alors est proportionnelle à la mesure $l = r\alpha$.



➤ **Exercice d'application**

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 3 cm passant par A, B et M deux à deux distincts tel que $\widehat{AMB} = 30^\circ$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer la longueur l de l'arc $\widehat{AB}$. En déduire celle l' de l'arc $\widetilde{AB}$.

d. Quadrilatères inscrits

Définitions

D1) Un quadrilatère ABCD est dit convexe si les sommets opposés A et C n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (BD) et les sommets opposés B et D n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (AC). Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est convexe.

D2) Un quadrilatère ABCD est dit croisé si les sommets opposés A et C appartiennent au même demi-plan de frontière (BD) et les sommets opposés B et D appartiennent au même demi-plan de frontière (AC). Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est croisé.

D3) Un quadrilatère ABCD qui n'est ni convexe ni croisé est dit non convexe et non croisé. Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est non convexe et non croisé.

D4) Un quadrilatère est dit inscriptible dans un cercle si ses 4 sommets appartiennent au cercle. Par exemple, sur la figure ci-dessous, le quadrilatère ABCD est inscriptible dans le cercle (C).

Propriétés

P₁) La somme des angles d'un quadrilatère convexe est égale $2\pi \text{ rad}$ (360°)

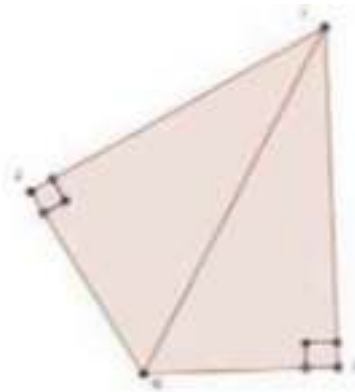
P₂) Dans quadrilatère convexe si deux angles opposés sont supplémentaires alors ce quadrilatère est inscriptible dans un cercle. En réalité, si deux de ces angles sont supplémentaires alors les deux autres le sont aussi.

P₃) Si un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle alors ses angles opposés sont deux à deux supplémentaires.

P₄) Si un quadrilatère est inscriptible dans un cercle (C) alors (C) est le cercle circonscrit à tout triangle défini par 3 sommets de ce quadrilatère.

Exercice d'application :

Soit IJKL le quadrilatère ci-dessous.

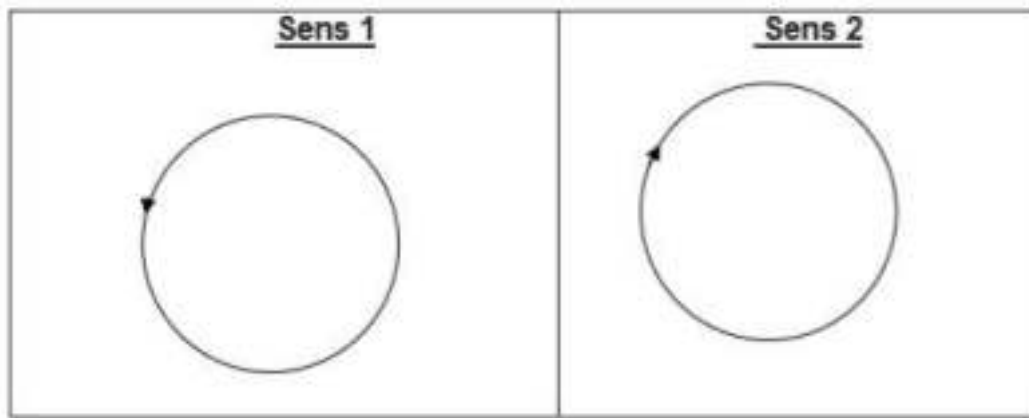


Montrer que IJKL est inscriptible dans un cercle que l'on précisera.

2. Orientation du plan

a. Orientation du cercle

Soit (C) un cercle donné du plan. On admet qu'il n'y a que deux sens de parcours possibles sur (C) : le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens 1) et le sens des aiguilles d'une montre (sens 2).



Orienter le cercle, c'est choisir l'un de ces deux sens de parcours et décider qu'il est le sens direct. Dans ce cas, l'autre sens sera dit sens indirect.

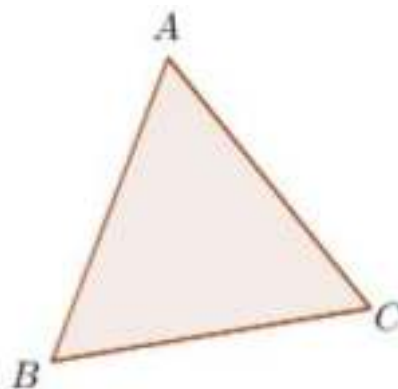
b. Orientation du plan

Orienter le plan, c'est choisir une bonne fois pour toutes :

- un point fixe O appelé origine.
- un même sens de parcours sur tous les cercles du plan et l'appeler sens direct (ou sens positif ou sens trigonométrique). Le sens contraire à celui choisi est dit sens indirect (ou sens négatif ou sens rétrograde).

c. Remarques

- Généralement, le sens contraire des aiguilles d'une montre est choisi comme sens direct et donc le sens des aiguilles d'une montre comme sens indirect. Dans toute la suite du cours, nous prenons cette convention.
- Dans le plan orienté, un triangle ABC est dit direct (respectivement indirect) si en le parcourant de A à C en passant par B , le mouvement se fait dans le sens direct (respectivement dans le sens indirect).



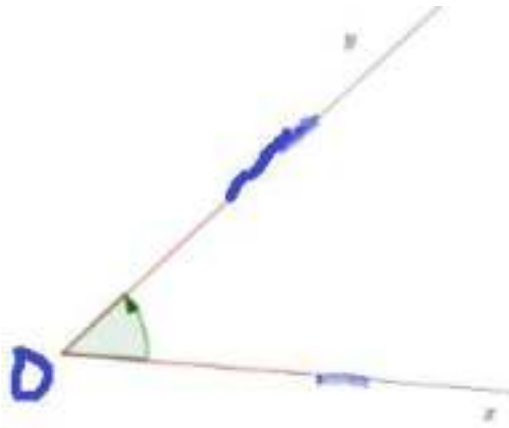
ABC est direct.

3. Angles orientés de deux demi-droites de même origine

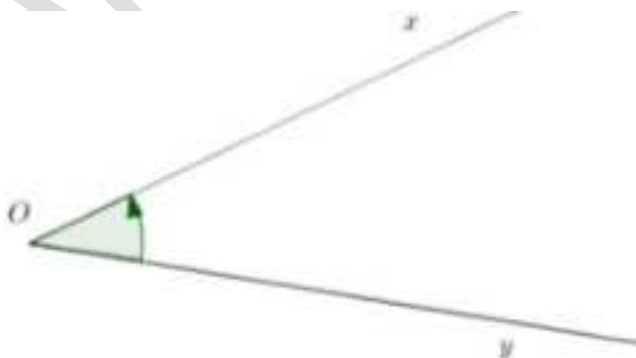
a. Définition, notation et représentation

Soient $[Ox)$ et $[Oy)$, des demi-droites de même origine O . $[Ox)$ et $[Oy)$ définissent deux angles orientés de demi-droites :

- L'angle orienté de demi-droites $([Ox);[Oy))$ noté $(\widehat{[Ox);[Oy)})$. O est son sommet, $[Ox)$ est la demi-droite origine et $[Oy)$ est la demi-droite extrémité. Il est représenté comme suit :



- L'angle orienté de demi-droites $([Oy);[Ox))$ noté $(\widehat{[Oy);[Ox)})$. O est son sommet, $[Oy)$ est la demi-droite origine et $[Ox)$ est la demi-droite extrémité. Il est représenté comme suit :



Oralement

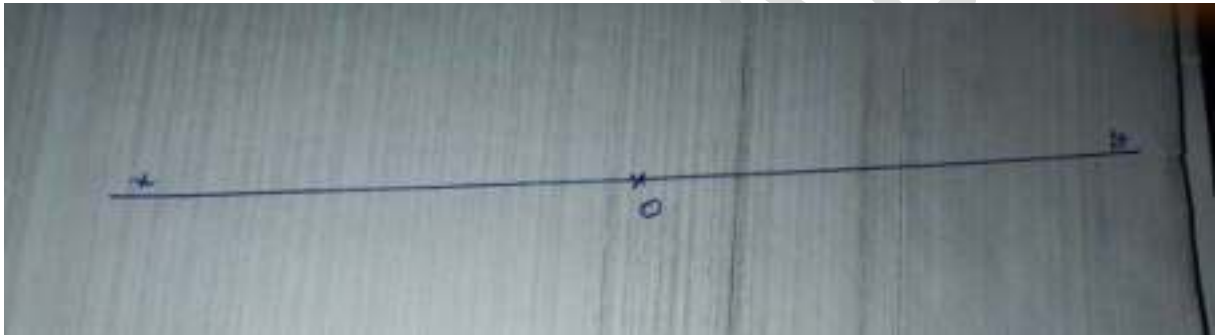
Pour représenter un angle orienté de demi-droites sur une figure, on dessine une flèche en forme d'arc dont l'origine indique la demi-droite origine et l'extrémité indique la demi-droite extrémité.

b. Remarques

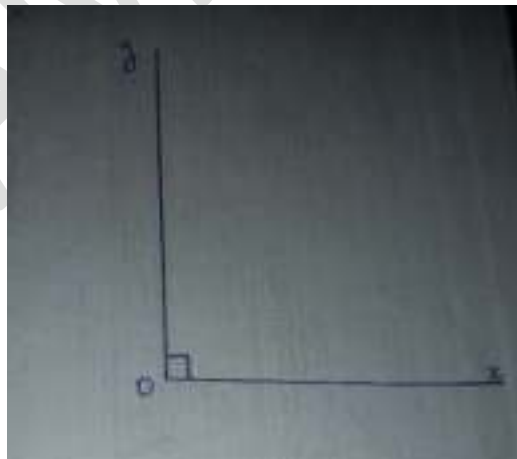
- Si $[Ox] = [Oy]$ (c'est-à-dire les deux demi-droites sont confondues) alors $(\widehat{[Ox]; [Oy]}) = (\widehat{[Oy]; [Ox]})$ et est dit angle orienté nul.



- Si $[Ox]$ et $[Oy]$ sont opposées (c'est-à-dire les demi-droites se complètent pour former une droite) alors $(\widehat{[Ox]; [Oy]}) = (\widehat{[Oy]; [Ox]})$ et est dit angle orienté plat.



- Si $[Ox]$ et $[Oy]$ sont perpendiculaires alors chacun des angles orientés $(\widehat{[Ox]; [Oy]})$ et $(\widehat{[Oy]; [Ox]})$ sont dits angles orientés droits.



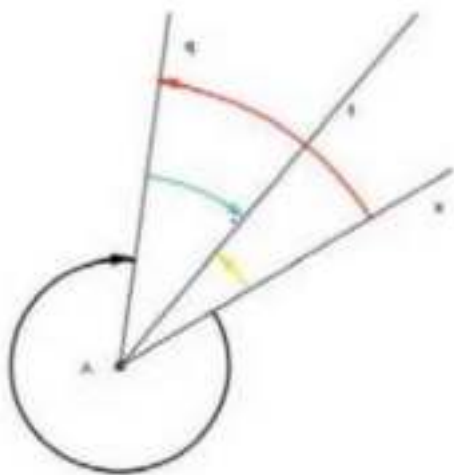
c. Exercices d'application

Exo1 :

Tracer trois demi-droites $[Ox]$, $[Oy]$ et $[Oz]$ deux à deux distinctes. Représenter sur la figure les angles orientés de demi-droites : $(\widehat{[Ox]; [Oy]})$; $(\widehat{[Oy]; [Oz]})$ et $(\widehat{[Oz]; [Ox]})$.

Exo2 :

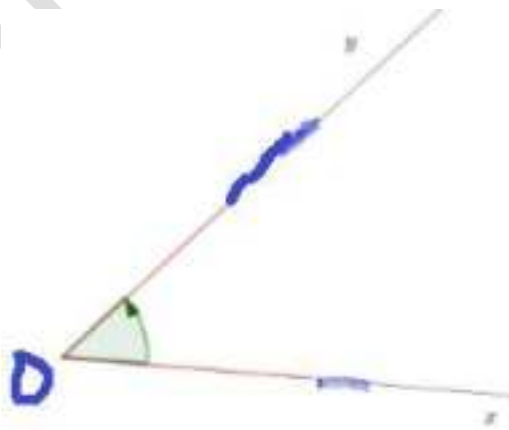
Sur la figure ci-dessous sont représentés des angles orientés de demi-droites. Noter chacun de ces angles orientés.



d. Orientation d'un angle orienté de demi-droites

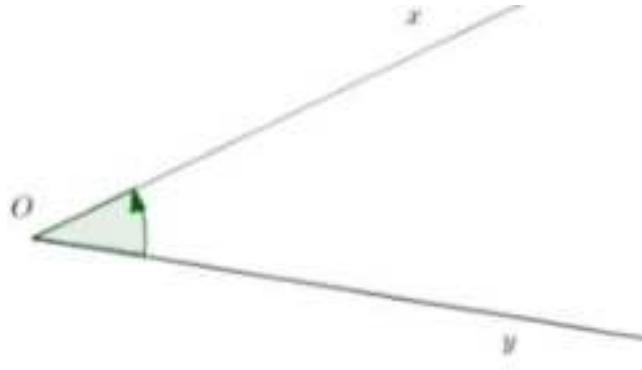
Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ non confondues et non opposées. Dans le secteur saillant de $\widehat{xOy}$.

- Si le sens du déplacement de $[Ox)$ vers $[Oy)$ s'effectue dans le sens direct alors $([Ox), [Oy))$ est un angle orienté dans le sens direct.



$([Ox), [Oy))$ est un angle orienté dans le sens direct.

- Si le sens du déplacement de $[Ox)$ vers $[Oy)$ s'effectue dans le sens indirect alors $([Ox), [Oy))$ est un angle orienté dans le sens indirect.



$(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ est un angle orienté dans le sens indirect.

e. Mesure principale

Soit $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ un angle orienté de demi-droites. La mesure principale en radians de $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ est le réel que l'on peut noter θ défini par :

- Si $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ est l'angle orienté nul alors $\theta = 0 \text{ rad}$.
- Si $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ est l'angle orienté plat alors $\theta = \pi \text{ rad}$.
- Si $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ n'est ni nul, ni plat et est orienté dans le sens direct alors $\theta = \text{mes } \widehat{xOy}$.
- Si $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ n'est ni nul, ni plat et est orienté dans le sens indirect alors $\theta = -\text{mes } \widehat{xOy}$.

f. Remarques

- Si θ est la mesure principale en radians d'un angle orienté de demi-droites alors $\theta \in]-\pi; \pi]$.
- Deux angles orientés de demi-droites sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.
- Soient $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ et $(\widehat{[O'x']}, \widehat{[O'y']})$ de mesures principales en radians θ et θ' respectivement alors :
 - ✓ $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ et $(\widehat{[O'x']}, \widehat{[O'y']})$ sont dits complémentaires si $\theta + \theta' = \pm \frac{\pi}{2}$.
 - ✓ $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ et $(\widehat{[O'x']}, \widehat{[O'y']})$ sont dits supplémentaires si $\theta + \theta' = \pm \pi$.

g. Exercices d'application

Exercice 1 :

Tracer un triangle équilatéral direct ABC puis donner les mesures principales en radians des angles orientés de demi-droites: $(\widehat{[AB]}, \widehat{[AC]})$ et $(\widehat{[CB]}, \widehat{[CA]})$.

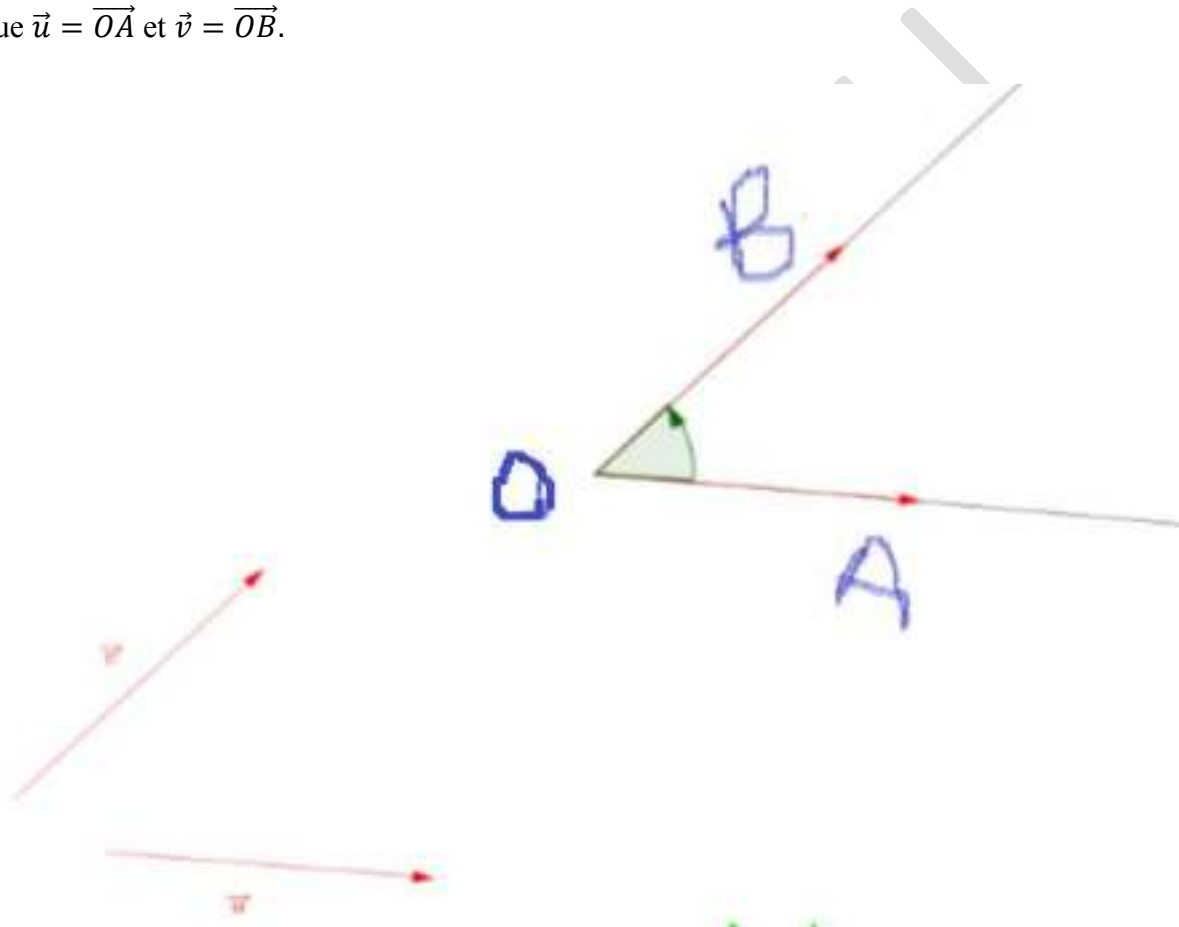
Exercice 2 :

Tracer EFG, un triangle rectangle et isocèle en E indirect puis donner les mesures principales en radians des angles orientés de demi-droites : $(\widehat{EF}, \widehat{EG})$ et $(\widehat{GF}, \widehat{GE})$.

4. Angles orientés de deux vecteurs non nuls

a. Définition, notation et représentation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls. Pour tout point O du plan, il existe des points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre est noté $(\vec{u}, \vec{v})$ et est défini par $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = ([OA], [OB])$. $(\vec{u}, \vec{v})$ se lit : « angle orienté $\vec{u} \vec{v}$ ». Dans ce cas, $([OA], [OB])$ est dit représentant de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ ou bien associé à l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

b. Remarques

- Une représentation d'un angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est celle d'un angle orienté de demi-droites avec la possibilité de choisir n'importe quel point comme sommet. Ainsi un

angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ a une infinité de représentants mais tous ses représentants sont égaux.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est dit angle orienté nul et est noté $\hat{0}$.



- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est dit angle orienté plat et est noté $\hat{\pi}$.



c. Définitions

- La mesure principale d'un angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure principale en radians d'un angle orienté de demi-droites, représentant de $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Deux angles orientés de vecteurs sont égaux s'ils ont la même mesure principale.
- Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ de mesures principales en radians θ et θ' respectivement alors :
 - a. $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont dits complémentaires si $\theta + \theta' = \pm \frac{\pi}{2}$
 - b. $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont dits supplémentaires si $\theta + \theta' = \pm \pi$.

d. Exemples

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A direct.

- La mesure principale en radians de $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est $\frac{\pi}{2}$.
- La mesure principale en radians de $(\vec{BA}, \vec{BC})$ est $-\frac{\pi}{4}$.

e. Exercice d'application

Soit ABC un triangle équilatéral direct, O est son centre de gravité et I est le milieu de $[BC]$.

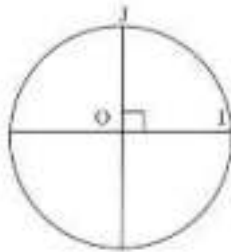
Donner les mesures principales en radians de $(\vec{IB}, \vec{IA})$, $(\vec{AB}, \vec{AI})$ et $(\vec{OB}, \vec{OA})$.

II. Trigonométrie

1. Cercle trigonométrique

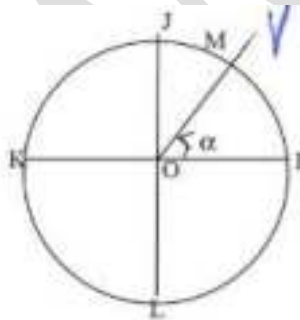
a. Définition

Dans le plan orienté où une unité de longueur est choisie et (O, I, J) est un repère orthonormé direct (c'est-à-dire $OI = OJ = 1$ et la mesure principale en radians de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est $\frac{\pi}{2}$), on appelle cercle trigonométrique, le cercle (C) de centre O et de rayon 1 sur lequel I est pris comme origine du parcours.



b. Image d'un nombre réel sur le cercle trigonométrique

Théorème et définition : Soit $\alpha \in]-\pi; \pi]$ et (C) le cercle trigonométrique. Il existe un et un seul point M de (C) tel que la mesure principale en radians de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est égale à α . Ce point M est dit image de α sur le cercle trigonométrique.



Exemples

- L'image de 0 sur le cercle trigonométrique est le point I.
- L'image de $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point J.
- L'image de $-\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point J', diamétralement opposé à J.
- L'image de π sur le cercle trigonométrique est le point I', diamétralement opposé à I.

Exercice

Construire les images M et N de $\frac{\pi}{4}$ et de $-\frac{\pi}{3}$ respectivement sur le cercle trigonométrique.

2. Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

a. Définitions

Soit x un réel appartenant à $]-\pi; \pi]$, (C) le cercle trigonométrique et M , l'image de x sur (C) .

- Le cosinus de x noté $\cos x$ est l'abscisse x_M de M dans le repère (O, I, J) .
- Le sinus de x noté $\sin x$ est l'ordonnée y_M de M dans le repère (O, I, J) .
- Pour tout x distinct de $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, la tangente de x notée $\tan x$ est le réel défini par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Les valeurs de $\cos x$, de $\sin x$ et de $\tan x$ sont dites lignes trigonométriques de x .
- Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle orienté (non droit dans le cas de la tangente) est le cosinus, le sinus et la tangente respectivement de la mesure principale de cet angle orienté.

b. Exemples

- $\cos 0 = 1$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\cos \pi = -1$; $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$
- $\sin 0 = 0$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\sin \pi = 0$; $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$
- $\tan 0 = 0$; $\tan \pi = 0$; $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ n'ont pas de tangente.

c. Lignes trigonométriques d'angles remarquables

Le tableau suivant donne des lignes trigonométriques des mesures principales en radians d'angles orientés dits angles remarquables.

Mesure principale de l'angle orienté	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sinus de la mesure principale	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cosinus de la mesure principale	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Tangente de la mesure principale	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

d. Propriétés

Pour tout réel x appartenant à $]-\pi; \pi]$ on a :

P₁) $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

P₂) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Cette relation est dite relation fondamentale.

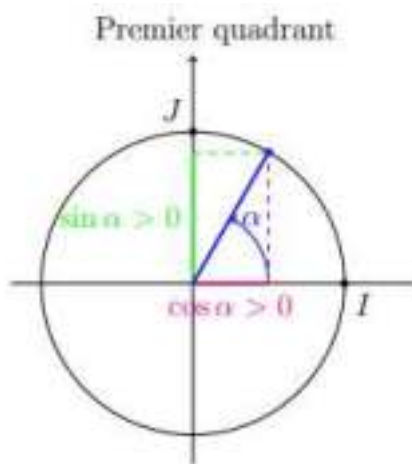
P₃) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2}$

e. Signe du cosinus et du sinus dans les quatre quadrants

Soit $x \in]-\pi; \pi[$, M son image sur le cercle trigonométrique.

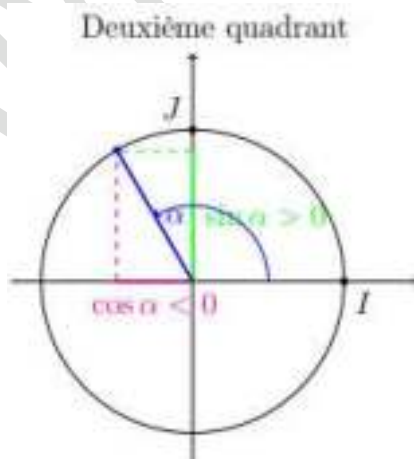
- Si $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$

Illustration graphique



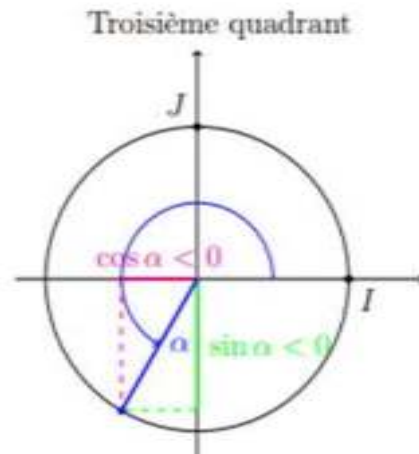
- Si $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ alors $\cos x < 0$ et $\sin x > 0$

Illustration graphique



- Si $x \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$ alors $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$

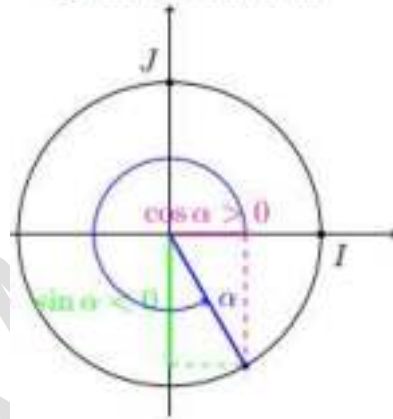
Illustration graphique



- Si $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ alors $\cos x > 0$ et $\sin x < 0$

Illustration graphique

Quatrième quadrant



f. Lignes trigonométriques d'angles associés

Soit $\alpha \in]-\pi; \pi]$, les réels $-\alpha; \frac{\pi}{2} - \alpha; \frac{\pi}{2} + \alpha; \pi - \alpha$ et $\pi + \alpha$ sont dits associés à α .

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ et $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

Illustration graphique

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$

Illustration graphique

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha}$

Illustration graphique

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ et $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$

Illustration graphique

- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ et $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

Chapitre 7 : Repérage cartésien

Durée : 12h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Connaître la définition d'un repère cartésien et de mesure algébrique.
- ✓ Retrouver et utiliser les formules de changements d'origine.
- ✓ Utiliser le déterminant pour étudier la colinéarité.
- ✓ Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un vecteur directeur et un point de cette droite.
- ✓ Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant le coefficient directeur et un point de cette droite.
- ✓ Donner un système d'équations paramétriques d'une droite.
- ✓ Reconnaître qu'un système d'équations paramétriques est celui d'une droite.
- ✓ Déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir d'un système d'équations paramétriques et inversement.

Prérequis :

- ✓ Calcul vectoriel

Supports didactiques :

- ✓ Collection nouveau fractale 2^{nde};
- ✓ Collection Fractale 2^{nde} ;
- ✓ USAID 2^{nde} ;
- ✓ Collection Hachettes Lycée 1^{ère} S et E ;
- ✓ CIAM 2^{nde}.

Plan de la leçon

I. Repérage sur une droite

1) Repère d'une droite

- a) Définition
- b) Exemple
- c) Remarques
- 2) Abscisse d'un point
 - a) Théorème et définition
 - b) Remarque
 - c) Exemples
 - d) Exercice d'application
- 3) Mesure algébrique d'un vecteur
 - a) Théorème et définition
 - b) Exemples
 - c) Propriété
 - d) Autres propriétés
- 4) Version algébrique du théorème de Thalès et de sa réciproque
 - a) Théorème de Thalès
 - b) Réciproque du théorème de Thalès
 - c) Exercice d'application

II. Repérage dans le plan

- 1) Base et repère du plan
 - a) Base du plan
 - b) Repère du plan
 - c) Coordonnées d'un vecteur dans une base
 - d) Coordonnées d'un point dans un repère
 - e) Changement de repère par translation
- 2) Colinéarité de deux vecteurs
 - a) Définition du déterminant de deux vecteurs
 - b) Théorème
 - c) Exercice d'application

III. Equations de droites

- 1) Équation générale
- 2) Equation réduite
- 3) Equations paramétriques

Déroulement du cours

I. Repérage sur une droite

1) Repère d'une droite

a) Définition

On appelle repère d'une droite (D), tout couple $(O, \vec{i})$ où O est un point de (D) et $\vec{i}$ un vecteur directeur de (D). Le point O est dit origine du repère $(O, \vec{i})$.

b) Exemple

Dans la figure ci-dessus, $(O, \vec{i})$ est un repère de la droite (D).

c) Remarques

- La donnée d'un couple (O, I) de points distincts d'une droite (D) permet de définir un repère de (D). En effet, le couple $(O, \overrightarrow{OI})$ est un repère de (D).
- Une droite (D) admet une infinité de repères.

2) Abscisse d'un point

a. Théorème et définition

Soit (D) une droite de repère $(O, \vec{i})$. Un point $M \in (D)$ si et seulement si il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x \vec{i}$. Dans ce cas, le réel x est dit abscisse de M dans le repère $(O, \vec{i})$ et est souvent noté x_M .

b) Remarque

Dans le repère $(O, \vec{i})$, l'origine O a pour abscisse 0.

c) Exemples

Dans la figure ci-dessus, donnons les abscisses de A, B et C dans le repère $(O, \vec{i})$.

d) Exercice d'application

1. On considère une droite (D) de repère $(O, \vec{i})$, A, B et C sont des points de (D) tels que $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3} \vec{i}$, $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{4} \vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{i}$. Quelles sont les abscisses de A, B et C dans le repère $(O, \vec{i})$?
2. Soit (D) une droite et A, B des points distincts de (D). Déterminer les abscisses de B, de I milieu de $[AB]$ et de $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, 1)\}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$.

3) Mesure algébrique d'un vecteur

a) Théorème et définition

Soit (D) une droite de repère $(O, \vec{l})$; A et B des points de (D). Il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{AB} = x\vec{l}$. Le réel x est dit mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ relativement à $\vec{l}$. La mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$ est noté $\overline{AB}$.

b) Exemples

Dans la figure ci-dessus :

- La mesure algébrique $\overrightarrow{AB}$ relativement à $\vec{l}$ est $\overline{AB} = 2$. En effet $\overrightarrow{AB} = 2\vec{l}$
- La mesure algébrique de $\overrightarrow{AC}$ relativement à $\vec{l}$ est $\overline{AC} = -1$. En effet $\overrightarrow{AC} = -\vec{l}$

c) Propriété

Si (D) est une droite de repère $(O, \vec{l})$, A et B des points de (D) d'abscisses respectives x_A et x_B dans $(O, \vec{l})$ alors $\overline{AB} = x_B - x_A$.

Preuve :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B \vec{l} - x_A \vec{l} = (x_B - x_A)\vec{l}$$

d) Autres propriétés

Soit (D) une droite de repère $(O, \vec{l})$, Pour tous points A, B, C appartenant à (D) et pour tout réel k , on a :

$$\text{P}_1) \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

$$\text{P}_2) \overline{AB} = \begin{cases} AB & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{l} \text{ ont meme sens} \\ -AB & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{l} \text{ sont de sens contraire} \end{cases} \text{ par conséquent } |\overline{AB}| = AB$$

$$\text{P}_3) \overline{AB} = -\overline{BA}$$

$$\text{P}_4) \overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} = k \overline{AB}$$

$$\text{P}_5) \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$\text{P}_6) \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{cases} AB \times AC & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de meme sens.} \\ -AB \times AC & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de sens contraires.} \end{cases}$$

$$\text{P}_7) \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \begin{cases} \frac{AB}{AC} & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de meme sens.} \\ -\frac{AB}{AC} & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de sens contraires.} \end{cases}$$

4) Version algébrique du théorème de Thalès et de sa réciproque

a) Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle, M un point de (AB), N un point de (AC). Si $(MN) \parallel (BC)$ alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

b) Propriété réciproque :

Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC). Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors $(MN) \parallel (BC)$.

c) Exercice d'application :

ABC est un triangle, E le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
La parallèle à (BC) passant par E coupe (AC) en F.
Démontrez que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

II. Repérage dans le plan

1) Base et repère du plan

a) Base du plan

Définition: On appelle base du plan tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.

Exemple : Dans la figure ci-dessous, $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan.

Remarques :

- Dans le plan, la donnée de trois points non alignés permet de définir une base du plan.
- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite orthogonale si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux.
- Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite orthonormée (orthonormale) si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.

b) Repère du plan

Définition : On appelle repère du plan tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point du plan et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan. Le point O est dit origine du repère. La droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{i}$ est dite axe des abscisses et est souvent notée (xx') et la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{j}$ est dite axe des ordonnées et est souvent notée (yy').

Remarques

- Dans le plan, la donnée de 3 points non alignés permet de définir un repère du plan. Ainsi si ABC est un triangle alors le triplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthogonal si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite orthogonale.
- Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée (ou orthonormale) si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite orthonormée.

c) Coordonnées d'un vecteur dans une base

Théorème et définition : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ce couple (x, y) est dit couple de coordonnées (ou simplement les coordonnées) de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $\vec{u}(x, y)$) et on lit « $\vec{u}$ de coordonnées x et y ».

Preuve :

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit O un point du plan, (D) et (D') les droites telles que $(D) = (O, \vec{i})$ et $(D') = (O, \vec{j})$.

$O \in (D) \cap (D')$ donc (D) et (D') sont sécantes en O soit confondues. Si elles sont confondues alors $\vec{i}$ et $\vec{j}$ seraient colinéaires ce qui est absurde car $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base donc (D) et (D') sont sécantes en O.

Soit M l'unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Soient P le point d'intersection de (D) avec la parallèle à (D') passant par M et Q celui de (D') avec la parallèle à (D) passant par M. Ainsi OPMQ est un parallélogramme donc

$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Comme $P \in (D) = (O, \vec{i})$ donc il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$ et $Q \in (D') = (O, \vec{j})$ donc il existe un unique $y \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$ donc il existe un unique couple (x, y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exemple : Soit ABCD un parallélogramme. Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Propriétés : Soient $\vec{u}(x, y) ; \vec{u}'(x', y')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et $k \in \mathbb{R}$. Dans $(\vec{i}, \vec{j})$, on a :

- $\vec{u} + \vec{u}' \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{u}' \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.

- $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

d) Coordonnées d'un point dans un repère

Théorème et définition : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ce couple (x, y) est dit couple de coordonnées (ou simplement coordonnées de M) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $M(x, y)$) et on lit « M de coordonnées x et y ». Le réel x est dit abscisse de M et est noté x_M et y est dit ordonnée de M et est noté y_M .

Preuve :

Comme $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère donc $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan donc d'après le théorème ci-dessus, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a un unique couple de coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Ainsi, il existe un unique (x, y) de nombres réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exercice d'application : Soit ABC un triangle, I milieu de $[BC]$ et G son centre de gravité.

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire les coordonnées de G dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Propriétés : Soient $A(x_A, y_A)$; $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ et $G(x_G, y_G)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$

$$\text{En particulier } G \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_G = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

e) Changement de repère par translation

Théorème et définition : Si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ alors $\begin{cases} X = x - x_A \\ Y = y - y_A \end{cases}$ (ou encore $\begin{cases} x = X + x_A \\ y = Y + y_A \end{cases}$). Chacun de ces deux systèmes est dit formules de changement de repère.

Preuve :

D'une part $\overrightarrow{AM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ (1)

D'autre part $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$

$$= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} - x_A\vec{i} - y_A\vec{j}$$

$$\overrightarrow{AM} = (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{cases} X = x - x_A \\ Y = y - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + x_A \\ y = Y + y_A \end{cases}$$

Exemple : Soit $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $M\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donnons les coordonnées de M dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$, on a : $\begin{cases} X = x - x_A \\ Y = y - y_A \end{cases}$ où $x_A = 1$; $y_A = 2$; $x = -1$ et $y = 3$.

Ainsi $\begin{cases} X = -1 - 1 \\ Y = 3 - 2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} X = -2 \\ Y = 1 \end{cases}$

2) Colinéarité de deux vecteurs

a) Définition du déterminant de deux vecteurs

Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre le réel $xy' - x'y$. On le note $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$. On a donc $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

b) Théorème

Soit $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul autrement dit $xy' - x'y = 0$.

c) Exercice d'application

Soit ABC un triangle, A' et B' les milieux respectifs de [BC] et [CA].

a. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

b. En déduire que (AA') et (BB') sont sécantes.

III. Equations de droites

1) Équation cartésienne (générale)

a. Théorème et définition :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Si (D) est une droite passant par $A(x_A, y_A)$ dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$ alors il existe des réels a, b et c tels que

$ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. L'égalité $ax + by + c = 0$ où $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est dite équation cartésienne ou générale de (D) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $(D): ax + by + c = 0$.

Preuve :

Soit (D) une droite passant par $A(x_A, y_A)$ dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$. Ainsi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires car ils sont tous des vecteurs directeurs de (D) donc le déterminant de $(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$ est nul. Ainsi $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$

D'où $\beta x - \alpha y + (\alpha y_A - \beta x_A) = 0$. En posant $a = \beta; b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$, on a :

$ax + by + c = 0$. Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $\alpha = \beta = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$ ce qui est absurde d'où $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Exemple : Soit ABC un triangle. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

b. Théorème

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan tels qu'il existe des réels a, b et c vérifiant $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est une droite dont $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

Preuve :

Posons $(E) = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : ax + by + c = 0 ; a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 \text{ et } c \in \mathbb{R} \right\}$

Si $a \neq 0$ alors $A_0 \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \in (E)$ et si $b \neq 0$ alors $A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix} \in (E)$ donc (E) est non vide. Soit

$M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in (E)$ fixé. On a donc $ax_0 + by_0 + c = 0$ d'où $c = -ax_0 - by_0$.

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E) ; ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0$

$$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM_0} \text{ colinéaire à } \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M \in (D) = (M_0, \vec{u})$$

$$\text{Donc } (E) \subseteq (D) = (M_0, \vec{u})$$

$(D) = (M_0, \vec{u})$ avec $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) donc si $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$ alors d'après un résultat ci-dessus, on a $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$ donc $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E)$ d'où $(D) \subseteq (E)$. Par suite $(E) = (D)$.

c. Remarque :

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, toute droite (D) admet une infinité d'équations cartésiennes car si $ax + by + c = 0$ en est une alors pour tout $\alpha \neq 0$, $\alpha ax + \alpha by + \alpha c = 0$ en est une autre.

d. Propriétés : Soit $(D): ax + by + c = 0$ et $(D'): a'x + b'y + c' = 0$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- $(D) // (D') \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.
- (D) et (D') sont sécantes si et seulement si $ab' - ba' \neq 0$. Dans ce cas, leur point d'intersection est le point dont les coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Preuve :

$(D): ax + by + c = 0 \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) et $(D'): a'x + b'y + c' = 0 \Rightarrow \vec{u'} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D') . Ainsi :

$$(D) // (D') \Leftrightarrow \vec{u} \text{ colinéaire à } \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

2) Equations réduite

a. Théorème et définition : Soit $(D): ax + by + c = 0$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$;

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -b\vec{i} + a\vec{j}$ est un vecteur directeur de (D) .

- Si $b = 0$ alors $a \neq 0$; $\vec{u} = a\vec{j}$ donc $(D) //$ à l'axe des ordonnées ($y'y$). De plus $(D): x = -\frac{c}{a}$. Cette équation est dite l'équation réduite de (D) .

- Si $b \neq 0$ alors (D) n'est pas parallèle à (y'y) et on a : (D): $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. En posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ on a : (D): $y = mx + p$. Cette équation est dite l'équation réduite de (D). m est dit coefficient directeur de (D) et p est l'ordonnée du point d'intersection de (D) avec l'axe des ordonnées et est dit l'ordonnée à l'origine de (D). On notera que $\vec{v}_m$ est aussi un vecteur directeur de (D).

b. Théorème :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan ; (D): $y = mx + p$ et (D'): $y = m'x + p'$ avec $m, m' \neq 0$.

- $(D) // (D') \Leftrightarrow m = m'$
- $(D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$

c. Remarques : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan

- Une droite (D) admet une seule équation réduite.
- Une droite (D) est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si son équation réduite est de la forme $x = k$ où k est une constante.
- Une droite (D) est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son équation réduite est de la forme $y = k$ où k est une constante. Dans ce cas, son coefficient directeur est nul.
- Une droite (D) n'est ni parallèle à l'axe des abscisses, ni parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si son équation réduite est de la forme $y = mx + p$ avec $m \neq 0$. Dans ce cas, m est son coefficient directeur et $\vec{v}_m$ est un vecteur directeur de (D).

3) Equations paramétriques

a. Théorème et définition :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère et (D) une droite passant par $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$. Le système $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ est dit système d'équations paramétriques de (D).

Preuve :

Si $M=A$ alors $\begin{cases} x = x_A + \alpha(0) \\ y = y_A + \beta(0) \end{cases}$ donc $t=0$.

Si $M \neq A$ alors $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow$
$$\begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$$

b. Exemple

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère. Donnons un système d'équations paramétriques de (D) passant par $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c. Remarques : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

- Toute droite (D) admet une infinité de systèmes d'équations paramétriques.
- Si $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ est un système d'équations paramétriques de (D) alors le point dont les coordonnées sont obtenues en remplaçant t par un même réel quelconque dans les deux équations du système est un point de (D) . Ainsi, on obtient le point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ si on pose $t = 0$. On dit que le point A est de paramètre 0.

Chapitre 8: Polynômes et fractions rationnelles

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer le vocabulaire : polynôme, coefficients et degré ;
- ✓ Vérifier qu'un nombre réel est zéro d'un polynôme ;
- ✓ Factoriser un polynôme de degré ≤ 4 par $x-a$ (a étant une racine du polynôme) par la méthode d'identification des coefficients, par la division euclidienne et par la méthode de Horner;
- ✓ Reconnaître une fraction rationnelle ;
- ✓ Déterminer la condition d'existence d'une fraction rationnelle ;
- ✓ Trouver les zéros d'une fraction rationnelle ;
- ✓ Etudier le signe d'une fraction rationnelle ;
- ✓ Décomposer une fraction rationnelle par division.

Pré requis :

- ✓ Second degré

Plan du cours :

I. Polynôme

➤ Activité

1. Monôme

2. Polynôme

3. Egalité de deux polynômes

➤ Définition

➤ Application

4. Somme et produit de deux polynômes

➤ Activité

➤ Propriété

5. Racine ou zéro d'un polynôme

➤ Définition

➤ Exemple

➤ Activité

➤ Propriété caractéristique

➤ Remarque

6. Méthode de factorisation d'un polynôme connaissant une racine

➤ Méthode d'identification

➤ Méthode de Horner

➤ Méthode de division euclidienne

➤ Exo à faire à la maison

II. Fraction rationnelle

1. Définition et exemples

2. Condition d'existence d'une fraction rationnelle

➤ Exemple

3. Zéro d'une fraction rationnelle

➤ Exemple

4. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

➤ Division euclidienne de deux polynômes

➤ Activité

➤ Définition

Déroulement du cours

I. Polynôme

➤ **Activité**

$A(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) - 3x^4 + 1$. Montrer que l'on peut écrire $A(x)$ sous la forme $A(x) = a_4x^4$ où a_4 est un réel que l'on précisera.

1. Monôme

Toute expression que l'on peut écrire sous la forme a_nx^n où a_n est un réel et n un entier naturel, est dite monôme de la variable x .

- ❖ a_n est appelé coefficient du monôme.
- ❖ Si $A(x) = a_nx^n$ avec $a_n \neq 0$ alors n est dit degré du monôme $A(x)$ et on note $d^0(A) = n$.

➤ **Exemple**

L'expression $A(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) - 3x^4 + 1$ peut s'écrire $A(x) = -2x^4$ donc $A(x)$ est un monôme de la variable x , de coefficient -2 et degré 4 .

➤ **Remarques**

- Tout réel a non nul est un monôme de coefficient a et de degré 0 dit monôme constant. En effet : $a = a \times 1 = ax^0$.
- Le réel 0 est un monôme de coefficient 0 dit monôme nul mais il n'a pas de degré.

2. Polynôme

On appelle polynôme, toute expression qui peut s'écrire comme somme de monômes.

➤ **Exemple**

L'expression $P(x) = -2x + 1 + 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}x^2$ est un polynôme car elle s'écrit comme la somme des monômes $-2x$; 1 ; $4x^3$; $-3x$ et $\frac{1}{2}x^2$.

➤ **Théorème-définition**

Tout polynôme $P(x)$ peut être réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x et ceci de façon unique.

Dans ce cas, le coefficient de chacun des monômes est un coefficient de $P(x)$ et le plus grand degré parmi tous les degrés des monômes est dit degré de $P(x)$ et est noté $d^0(P)$ ou $d^0(P(x))$

➤ **Exemple**

$P(x) = -2x + 1 + 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}x^2$ peut être réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x . Dans ce cas on a : $P(x) = 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1$

Les coefficients de $P(x)$ sont alors $4 ; \frac{1}{2} ; -5$ et 1 et le degré de $P(x)$ est $d^0(P) = 3$.

➤ **Remarque**

Le polynôme $P(x) = 0$ pour toute valeur de la variable x est dit polynôme nul.

C'est un polynôme dont tous les coefficients sont tous nuls, il n'a donc pas degré

Par exemple $P(x) = -4 + x^5 + 3x^2 + 4 - x^2 - x^5 - 2x^2$ est nul car on a : $P(x) = -4 + 4 + x^5 - x^5 + 3x^2 - x^2 - 2x^2 = 3x^2 - 3x^2 = 0$ donc $P(x) = 0$ pour toute valeur de la variable x .

3. Egalité de deux polynômes

➤ **Définition**

Deux polynômes non nuls sont égaux s'ils ont le même degré et si les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

➤ **Application**

On donne $P(x) = -x^3 + x + 2$; $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Déterminer a , b , c et d pour que $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux.

4. Somme et produit de deux polynômes

➤ **Activité**

$P(x) = 3x^3 + 4x + 1$; $Q(x) = x^4 + 2x^2 - 1$ et $R(x) = -3x^3 + x^2 - 2x$

- Calculer $P(x) + Q(x)$; $P(x) + R(x)$ et $P(x) \times Q(x)$.
- $P(x) + Q(x)$; $P(x) + R(x)$ et $P(x) \times Q(x)$ sont-ils des polynômes ?
- Compare $d^0(P(x) \times Q(x))$ et $d^0(P(x)) + d^0(Q(x))$

➤ **Propriété**

- Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes alors $P(x) + Q(x)$ est un polynôme appelé somme des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ et son degré est inférieur ou égal à celui du polynôme qui a le plus grand degré.
- Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes alors $P(x) \times Q(x)$ est un polynôme appelé produit des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ et on a : $d^0(P(x) \times Q(x)) = d^0(P(x)) + d^0(Q(x))$

5. Racine ou zéro d'un polynôme

➤ Définition

On dit qu'un réel a est une racine ou zéro d'un polynôme $P(x)$ si $P(a) = 0$.

➤ Exemple

-1 est une racine de $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$, car $P(-1) = 0$

➤ Activité

$P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ et α un réel.

1. Calculer $P(\alpha)$.
2. Montrer que $P(x) - P(\alpha) = (x^3 - \alpha^3) + 3(x^2 - \alpha^2) + (x - \alpha)$. En déduire une factorisation de $P(x) - P(\alpha)$.
3. Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme que l'on précisera. Comparer les degrés de $P(x)$ et celui de $Q(x)$.
4. Réciproquement montrer que si $P(x) = (x - \alpha) \times Q(x)$ alors α est une racine de $P(x)$.

➤ Propriété caractéristique

Un réel a est une racine d'un polynôme $P(x)$ si et seulement si il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$ avec $d^0 Q = d^0(P) - 1$.

➤ Remarque

- Si $P(x)$ est de degré n alors le nombre de racines de $P(x)$ est inférieur ou égal à n .

6. Méthode de factorisation d'un polynôme connaissant une racine

➤ Méthode d'identification

Exemple

Soit $P(x) = x^3 - 7x + 6$

1. Vérifier que 1 est racine de $P(x)$, en déduire que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
2. Développer et réduire suivant les puissances décroissantes de x , l'expression

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

3. En utilisant l'égalité $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$, détermine a, b et c
4. Factorise complètement $P(x)$.

➤ Méthode de Horner

Exemple

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5.$$

Vérifier que -1 est racine de P(x). En déduire que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

Pour déterminer a, b et c, nous allons voir une 2^{ème} méthode dite méthode de Horner. Pour cela nous allons dresser un tableau de 4 colonnes et de 3 lignes.

Coefficients de P(x) dans l'ordre décroissant des puissances	2 ↓	-9 ↓ ⁺	-6 ↓ ⁺	5 ↓ ⁺
Racine -1	× -1 ↗	-2 × -1 ↗	11 × -1 ↗	-5
Coefficients de Q(x) dans l'ordre décroissant des puissances	2	-11	5	0

Donc $Q(x) = 2x^2 - 11x + 5$. Par suite $P(x) = (x + 1)(2x^2 - 11x + 5)$. On remarque que $2x^2 - 11x + 5 = (2x - 1)(x - 5)$. Par suite la factorisation complète est

$$P(x) = (x + 1)(2x - 1)(x - 5).$$

➤ Méthode de division euclidienne

Exemple

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5, \text{ on vérifie que } -1 \text{ est racine donc } P(x) = (x+1)Q(x).$$

Pour déterminer Q(x), on peut effectuer la division euclidienne de P(x) par x+1

II. Fraction rationnelle

1. Définition et exemple

- Une fraction rationnelle est le quotient d'un polynôme par un autre polynôme non nul
- $\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 3}$ est une fraction rationnelle car il est le quotient du polynôme $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ par le polynôme non nul $x^2 + 3$.

2. Condition d'existence d'une fraction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ une fraction rationnelle.

$f(x)$ existe si et seulement si $q(x) \neq 0$. L'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe est appelé **ensemble ou domaine de définition** de la fraction rationnelle. On le note D_f .

➤ **Exemple**

$$f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}. \text{ Déterminer l'ensemble de définition de } f.$$

3. Zéro d'une fraction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ une fraction rationnelle. Un réel a est un **zéro** de f si a appartient à D_f et si a est une racine de P .

4. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

➤ **Division euclidienne de deux polynômes**

• **Exemple 1**

Effectuons la division euclidienne de $2x^3 - 3x^2 + 7x - 6$ par $2x^2 - x + 6$.

• **Exemple 2**

Effectuons la division euclidienne de $2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$ par $x + 2$.

➤ **Propriété**

Si on effectue la division euclidienne d'un polynôme $A(x)$ par un polynôme non nul $B(x)$ alors il existe des polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$; $d^0(R) < d^0(B)$.

$Q(x)$ et $R(x)$ sont respectivement appelés quotient et reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.

➤ **Remarque**

Si $R(x)$ est le polynôme nul alors on dit que $B(x)$ divise $A(x)$. Ainsi on peut dire que $2x^2 - x + 6$ divise $2x^3 - 3x^2 + 7x - 6$.

➤ **Activité**

1. Effectuer la division euclidienne de $x^3 - 5x^2 + 10$ par $x^2 + 4$.

2. Déduis-en que $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 10}{x^2 + 4}$ peut se mettre sous la forme : $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{x^2 + 4}$.

3. Comparer le degré de $r(x)$ et celui de $x^2 + 4$.

➤ **Définition**

Décomposer une fraction rationnelle $\frac{g(x)}{h(x)}$, c'est trouver deux polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tel que : $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$ où $q(x)$ et $r(x)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $g(x)$ par $h(x)$ et $d^0(r) < d^0(h)$.

Chapitre 7 : Systèmes d'équations et d'inéquations du 1^{er} degré à deux inconnues.

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- Résoudre un système de deux ou trois équations du 1^{er} degré à deux inconnues.
- Interpréter géométriquement les systèmes à deux ou trois équations du 1^{er} degré à deux inconnues.
- Résoudre graphiquement un système de deux ou trois inéquations du 1^{er} degré à deux inconnues.
- Résoudre des problèmes concrets se ramenant à des systèmes d'équations ou d'inéquations du 1^{er} degré à deux inconnues.

Prérequis :

- Résoudre les systèmes de deux équations du 1^{er} degré à deux inconnues par les méthodes déjà vues en classe de troisième.
- Représentation graphique d'une droite dans le plan.
- Régionnement du plan.

Supports didactiques :

- ✓ USAID ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

I. Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

1. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

- a. Définitions et exemples
- b. Résolution par la méthode de Cramer
- c. Interprétation graphique

2. Systèmes de trois équations linéaires à deux inconnues

- a. Exemple
- b. Résolution
- c. Interprétation graphique

II. Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

1. Systèmes de deux inéquations linéaires à deux inconnues

- a. Définitions
- b. Régionnement du plan
- c. Exemple de résolution

2. Systèmes de trois inéquations linéaires à deux inconnues

- a. Exemple
- b. Exemple de résolution

Déroulement du cours

Introduction orale :

La résolution des systèmes de deux équations et de deux inéquations du 1^{er} degré à deux inconnues a été déjà abordée en 3^{ème}.

En classe de seconde S, la résolution des systèmes d'équations et d'inéquations du 1^{er} degré est approfondie et la méthode de Cramer est introduite pour la résolution des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Vérification des prérequis :

- 2. Résoudre par la méthode substitution le système suivant
$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -5x - 3y = 1 \end{cases}$$
- 3. Résoudre par la méthode d'addition le système suivant
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y = -3 \end{cases}$$

4. Résoudre par la méthode de comparaison système suivant $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$
5. On donne $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$. Vérifier si les couples suivants sont solutions ou non du système : $(1; 2)$; $(0; \frac{3}{2})$ et $(1; 1)$

I. Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

1. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

a. Définitions et exemples

- On appelle équation linéaire à deux inconnues x et y , toute équation qui peut se mettre sous la forme $ax + by = c$ où a et b sont des réels non nuls et c un réel quelconque. Par exemple $2x + 5y = -1$ est une équation linéaire à deux inconnues x et y avec $a = 2$, $b = 5$ et $c = -1$.
- On appelle système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y , tout système qui peut se mettre sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, a', b' sont des réels non nuls, c et c' des réels quelconques. Par exemple le système $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y .
- Résoudre un système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, c'est trouver s'ils existent tous les couples de réels $(x; y)$ qui vérifient à la fois les deux équations du système.

b. Résolution par la méthode de Cramer

Soit (S) le système suivant : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

- On appelle déterminant de (S), le réel noté $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ et défini par $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.
- On appelle déterminant suivant x , le réel noté $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ et défini par $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$.
- On appelle déterminant suivant y , le réel noté $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ et défini par $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$.
- (S) est un système de Cramer si son déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est non nul.

➤ Pour résoudre (S) par la méthode de Cramer, on calcule d'abord le déterminant Δ .

1^{er} cas : Si (S) est un système de Cramer c'est-à-dire si $\Delta \neq 0$ alors le couple $(\alpha; \beta)$ tel que : $\alpha = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ et $\beta = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ est l'unique solution de (S).

Exemple : Résolvons par la méthode de Cramer le système suivant : $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -5x - 3y = 1 \end{cases}$

2^{ème} cas : Si $\Delta = 0$ alors (S) n'est pas un système de Cramer et dans ce cas, il admet une infinité de solutions ou bien il n'a pas de solution. Pour le résoudre, il est conseillé d'utiliser les méthodes traditionnelles.

Exemples

Résolvons les systèmes suivants : $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y = -3 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

c. Interprétation graphique

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, toute droite (D) peut être décrite comme étant l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ vérifiant une égalité de la forme $ax + by + c = 0$ où a et b sont des réels non tous nuls et c un réel quelconque. L'égalité $ax + by + c = 0$ est dite équation cartésienne de la droite (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Ainsi dans le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, les équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont des équations cartésiennes de deux droites (D) et (D') respectivement dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Résoudre graphiquement le système (S) : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ consiste donc à chercher s'il existe, l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ appartenant à la fois à ces deux droites (D) et (D') c'est-à-dire à déterminer s'il existe les coordonnées du point ou des points d'intersection de (D) et (D').

(S).

- (S) n'a pas de solution $\Leftrightarrow$ (D) : $ax + by = c$ et (D') : $a'x + b'y = c'$ sont strictement parallèles.
- (S) a une unique solution $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow$ (D) : $ax + by = c$ et (D') : $a'x + b'y = c'$ sont sécantes en $A(\alpha; \beta)$.

- (S) a une infinité de solutions $\Leftrightarrow$ les droites (D) : $ax + by = c$ et (D') : $a'x + b'y = c'$ sont confondues.

Exemples

Réolvons et interprétons chacun des systèmes suivants : $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -5x - 3y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -3x + 6y = -3 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

2. Systèmes de trois équations linéaires à deux inconnues

a. Exemple

Le système $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x + y = 4 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$ est un système de trois équations linéaires à deux inconnues x et y .

b. Résolution

Pour résoudre un système (S) de trois équations linéaires à deux inconnues, on choisit un sous-système quelconque (S') de deux équations de (S) puis on le résout.

1^{er} cas : Si (S') n'a pas de solution alors (S) n'a pas de solution.

2^{ème} cas : Si (S') a une infinité de solutions alors les deux équations de (S') sont identiques et dans ce cas (S) se ramène à un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

3^{ème} cas : Si (S') a une unique solution $(\alpha; \beta)$ alors il faut vérifier si cette solution $(\alpha; \beta)$ est solution ou non de l'autre équation de (S).

- Si oui alors $(\alpha; \beta)$ est l'unique solution de (S).
- Sinon, (S) n'a pas de solution.

Exemples : Résolvons les systèmes suivants

1. $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -4x + 2y = 3 \\ x - \frac{1}{2}y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 3 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$

4.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - 5y = -6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

c. Interprétation graphique

Résoudre graphiquement le système (S) :
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \\ a''x + b''y = c'' \end{cases}$$
 consiste donc à chercher s'il existe,

l'ensemble des points $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ appartenant à la fois aux trois droites : (D) : $ax + by = c$; (D') : $a'x + b'y = c'$ et (D'') : $a''x + b''y = c''$ c'est-à-dire à déterminer s'il existe les coordonnées du point ou des points d'intersection de (D), (D') et (D'').

- (S) admet une unique solution $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow$ (D), (D') et (D'') sont concourantes au point $A(\alpha; \beta)$.
- (S) admet une infinité de solutions $\Leftrightarrow$ (D), (D') et (D'') sont confondues.
- (S) n'a pas de solution $\Leftrightarrow$ (D), (D') et (D'') ne sont pas concourantes et ne sont pas toutes confondues.

Exemple

Réolvons puis interprétons graphiquement le système :
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 3 \\ 2x + 3y = 17 \end{cases}$$

II. Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues

2. Systèmes de deux inéquations linéaires à deux inconnues

a. Définitions et exemples

- Une inéquation linéaire à deux inconnues x et y est toute inéquation qui peut se mettre sous la forme $ax + by + c (<, \leq, >, \geq) 0$ où a et b sont des réels non nuls et c un réel quelconque. Par exemple $x - 2y + 3 > 0$ est une inéquation linéaire à deux inconnues x et y .
- Un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues x et y est un système formé de deux inéquations linéaires à deux inconnues x et y . Par exemple $\begin{cases} x - 2y + 3 > 0 \\ 2x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$ est un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues x et y .

b. Régionnement du plan

- Toute droite (D): $ax + by + c = 0$ divise le plan en deux demi-plans de frontière (D) : L'un des demi-plans a pour équation $ax + by + c < 0$ et l'autre demi-plan a pour équation $ax + by + c > 0$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation linéaire $ax + by + c(<, >)0$ est l'un des demi-plans de frontière la droite (D): $ax + by + c = 0$. Dans le cas où l'inégalité est large, la frontière (D) est également prise dans l'ensemble des solutions.
- Par exemple résoudre le système $\begin{cases} x - 2y + 3 > 0 \\ 2x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$ revient à déterminer l'intersection des deux demi-plans de frontières (D): $x - 2y + 3 = 0$ et (D'): $2x + y - 1 = 0$ respectivement.

c. Exemple de résolution

- **Exemple 1 :** Résolvons graphiquement l'inéquation $x - 2y + 3 > 0$
- **Exemple 2:** Résolvons graphiquement $\begin{cases} x - 2y + 3 > 0 \\ 2x + y - 1 \leq 0 \end{cases}$

3. Systèmes de trois inéquations linéaires à deux inconnues

a. Exemple

$$\begin{cases} -x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases} \text{ est un système de trois inéquations à deux inconnues } x \text{ et } y.$$

b. Résolution graphique

Résolvons graphiquement le système $\begin{cases} -x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - y - 4 < 0 \\ x - 2y - 1 > 0 \end{cases}$

DRAMARFALL