Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Cours Maths

1S2

Auteur : Dr. Amar Fall

Telephone : 773897032

Pour les chapitres de consolidation de la classe de 2^{nde} S, on fera :

<u>En algèbre</u> : **Polynômes et fractions rationnelles ; fonctions numériques d'une variable réelle.**

<u>En géométrie</u> : Angles orientés et trigonométrie ; repérage cartésien.

Le programme de $1S_2$ est divisé en quatre parties : **Analyse ; algèbre ; géométrie et organisation des données.**

L'analyse est divisée en six thèmes :

- **I. Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle**
- **II. Limites**
- **III. Continuité**
- **IV. Dérivation**
- **V. Etude de fonctions**
- **VI. Suites numériques**

L'algèbre est divisée en deux thèmes :

- **I. Applications**
- **II. Equations ; inéquations ; systèmes**

La géométrie est divisée en quatre thèmes :

- **I. L'Outil vectoriel et analytique : rappels et compléments sur les vecteurs et barycentre**
- **II. L'Outil métrique : Produit scalaire, angle orienté et trigonométrie**
- **III. L'Outil des transformations**
- **IV. Compléments de la géométrie dans l'espace**

L'organisation de données est divisée en deux thèmes

- **I. Dénombrement**
- **II. Statistique**

Ce programme est prévu pour 6h de cours par semaine, soit 3 séances de 2 h par semaine.

Notre emploi du temps est :

Lundi : 8h-10h Salle 11 ; Mercredi 10h-12h Salle 11 et Vendredi 10h-12h Salle 11

Chapitre 1 de consolidation: Polynômes et fractions rationnelles

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer le vocabulaire : polynôme, coefficients et degré ;
- ✓ Vérifier qu'un nombre réel est zéro (racine) d'un polynôme ;
- ✓ Factoriser un polynôme de degré ≤ 4 par x-a (a étant une racine du polynôme) par la méthode d'identification des coefficients, par la division euclidienne et par la méthode de Horner;
- ✓ Reconnaitre une fraction rationnelle ;
- ✓ Déterminer la condition d'existence d'une fraction rationnelle ;
- ✓ Trouver les zéros (racines) d'une fraction rationnelle ;
- ✓ Etudier le signe d'une fraction rationnelle ;
- ✓ Décomposer une fraction rationnelle par division euclidienne.

Pré requis :

- ✓ Second degré

Plan du cours :

I. Polynôme
   - ➢ Activité
   1. Définitions et théorème
   2. Egalité de deux polynômes
      a. Définition
      b. Exemple
      c. Application
   3. Somme et produit de deux polynômes
      a. Activité
      b. Propriété
   4. Racine ou zéro d'un polynôme
      a. Définition
      b. Exemple
      c. Activité

Déroulement du cours

I. Polynôme

➢ **Activité**

On pose $m(x) = (x+2)(x-2) - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 4$ et $P(x) = (x^2+2)(x^2-x+1)$

1. Montrer que $m(x)$ peut s'écrire sous la forme ax^3 où a est un réel constant à préciser.
2. Développer, réduire et ordonner $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

Solution

1. $m(x) = (x+2)(x-2) - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 4 = x^2 - 4 - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 4 = \frac{1}{2}x^3$ donc $m(x) = ax^3$ avec $a = \frac{1}{2}$
2. $P(x) = (x^2+2)(x^2-x+1) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2$

L'expression $m(x)$ qui peut s'écrire sous la forme $m(x) = ax^3$ avec $a = \frac{1}{2}$ est un monôme de la variable x et l'expression $P(x)$ qui peut s'écrire $P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2$, somme des monômes $x^4; -x^3; 3x^2; -2x; 2$ est un polynôme de la variable x.

1. Définitions et théorème

a. Définitions et exemples

- Toute expression $m(x)$ qui peut s'écrire sous la forme $m(x) = ax^n$ où a est un réel constant non nul et n un entier naturel est dite monôme de la variable x.
  - ➢ a est dit coefficient et n est dit degré du monôme $m(x)$ et se note $d°(m) = n$ ou $\deg(m) = n$. Par exemple $m(x) = \frac{1}{2}x^3$ est un monôme de la variable x de coefficient $\frac{1}{2}$ et $d°(m) = 3$
- On appelle polynôme de la variable x, toute somme de monômes de la variable x. Par exemple $P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ est un polynôme de la variable x.

b. Remarques

- Tout monôme de la variable x est un polynôme de la variable x.
- Tout réel constant non nul a est un monôme de la variable x dit monôme constant de coefficient lui-même et de degré 0 car $a = ax^0$.
- Le réel 0 est dit monôme nul de coefficient 0 et il n'a pas de degré.
- Généralement sauf ambiguïté, on dit monôme ou polynôme seulement sans préciser la variable x et on écrit parfois m et P au lieu de $m(x)$ et $P(x)$.

c. Théorème-définition

Tout polynôme non nul $P(x)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ où $n \in \mathbb{N}$ et $a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0$ sont des réels constants avec $a_n \neq 0$. Dans ce cas, on dit que $P(x)$ est réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

- ➢ n est dit degré de P et on note $d°(P) = n$ ou $\deg(P) = n$
- ➢ Les réels constants $a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0$ sont dits coefficients de P.
- ➢ Le monôme $a_n x^n$ est dit monôme dominant et le coefficient a_n est dit coefficient dominant de P.
- ➢ Lorsque le coefficient dominant $a_n = 1$ alors on dit que P est unitaire ou normalisé.

Par exemple, pour $P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2$, on a : $d°P = 4$, ses coefficients sont $1; -1; 3; -2;$ et 2. Son monôme dominant est x^4 et donc son coefficient dominant est 1.

➢ **Remarques**

- Le polynôme nul est le polynôme dont tous ses coefficients sont nuls. Il n'a pas de degré.
- Les polynômes constants (de degré 0) sont les réels constants non nul a.

- Les polynômes de degré 1 sont de la forme $ax + b$ où $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Les polynômes de degré 2 sont les trinômes du 2nd degré $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
- Les polynômes de degré 3 sont de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$ et $b, c, d \in \mathbb{R}$.
- Les polynômes de degré sont de la forme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ où $a \neq 0$ et $b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

2. Egalité de deux polynômes

a. Définition

Deux polynômes non nuls sont égaux s'ils ont le même degré et si les coefficients des monômes semblables (monômes de même degré) sont égaux.

b. Exemple

On donne $P(x) = -2x^3 + x + 3$; Q(x)=ax³+bx²+cx+d. Déterminons a, b, c et d pour que P(x) et Q(x) soient égaux.

c. Application (Extrait Bac L 2020)

$P(x) = (-x^2 + 4)(ax^2 + bx + c)$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$;

$g(x) = -2x^4 + 7x^3 + 5x^2 - 28x + 12$. Déterminer a, b et c pour que $P(x) = g(x)$.

3. Somme et produit de deux polynômes

a. Activité

$P(x) = 3x^3 + 4x + 1$; $Q(x) = x^4 + 2x^2 - 1$ et $R(x) = -3x^3 + x^2 - 2x$

1. Calculer $P(x) + Q(x)$; $P(x) + R(x)$ et $P(x) \times Q(x)$.
2. $P(x) + Q(x)$; $P(x) + R(x)$ et $P(x) \times Q(x)$ sont-ils des polynômes ?
3. Comparer d°(P.Q) et d°(P) + $d°(Q)$

b. Propriété : Si P(x) et Q(x) sont des polynômes alors :

- P(x)+Q(x) est un polynôme appelé somme des polynômes P(x) et Q(x) et son degré est inférieur ou égal à celui du polynôme qui a le plus grand degré.
- P(x)×Q(x) est un polynôme appelé produit des polynômes P(x) et Q(x) et on a : d°(PQ) = d°(P) + $d°(Q)$

4. Racine ou zéro d'un polynôme

a. Définition

On dit qu'un réel a est une racine ou zéro d'un polynôme P(x) si $P(a) = 0$.

b. Exemple

-1 est une racine de $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ car $P(-1) = 0$

1 est racine d'un polynôme si et seulement si la somme de ses coefficients est nulle.

Exercice à faire

$P(x) = 2x^4 - x^3 + mx^2 + 1$. Déterminer le réel m pour que 1 soit racine de $P(x)$.

c. Activité

$P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ et a un réel.

1. Calculer $P(a)$.
2. Montrer que $P(x) - P(a) = (x^3 - a^3) + 3(x^2 - a^2) + (x - a)$. En déduire une factorisation de $P(x) - P(a)$.
3. Montrer que si a est une racine de $P(x)$ alors $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ où Q(x) est un polynôme que l'on précisera. Comparer $d°(Q)$ et $d°(P) - 1$.
4. Réciproquement montrer que si $P(x) = (x - a) \times Q(x)$ alors a est une racine de $P(x)$.

d. Propriété caractéristique

Un réel a est une racine d'un polynôme P(x) si et seulement si il existe un polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$ avec d°Q=d°(P)-1.

e. Remarques

- Plus généralement, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des racines de P(x) si et seulement si il existe un polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)\, Q(x)$ où d°Q=d°(P)-n
- Si P(x) est de degré n alors le nombre de racines de P(x) est inférieur ou égal à n.
- Deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n qui coïncident en n+1 valeurs distinctes sont égaux.
- Un polynôme de degré n qui admet plus de n racines distinctes est nul.

5. Méthode de factorisation d'un polynôme connaissant une racine

Factoriser un polynôme, c'est l'écrire comme un produit de facteurs de degré supérieur ou égal à 1. D'après la propriété caractéristique, la connaissance d'une racine a d'un polynôme P(x) permet d'entamer sa factorisation. Dans ce cas, il nous faut une ou des méthodes pour trouver le polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$.

a. Méthode d'identification

Exemple

On se propose de factoriser $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

Etape 1 : Chercher une racine de $P(x)$.

Pour se faire, on peut calculer dans le brouillon $P(a)$ avec $a \in \{1; -1; 2; -2; 3; -3\}$. On a :$P(1) = 0$ donc 1 est une racine.

Etape 2 : Trouver la forme du polynôme Q(x) tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$

1 est une racine donc $P(x) = (x - 1)Q(x)$ avec d°Q=d°(P)-1=2. Par suite $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Ainsi $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Etape 3 : Développer, réduire et ordonner $(x - 1)(ax^2 + bx + c)$ suivant les puissances décroissantes de x.

On a : $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$

Etape 4 : Utiliser l'égalité $x^3 - 7x + 6 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$ pour déterminer a, b et c.

On a : $a = 1$, b=1, c=-6 d'où $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$

Etape 5 : Factoriser Q(x) puis terminer la factorisation de P(x).

On a : Δ= $25, x_1 = 2; x_2 = -3$ donc $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ d'où $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$. Cette méthode est dite méthode d'identification ou méthode des coefficients indéterminés.

Exercice d'application :

Factoriser par la méthode d'identification $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$.

b. Méthode de Horner

Exemple

On se propose de factoriser $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$.

Etape 1 : Chercher une racine de $P(x)$.

Même principe que la méthode précédente :$P(-1) = 0$ donc -1 est racine.

Etape 2 : Trouver la forme du polynôme Q(x) tel que $\boldsymbol{P(x) = (x+1)Q(x)}$

$P(x) = (x+1)Q(x)$ avec d°Q=d°(P)-1=2. Par suite $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Etape 3 : Dresser un tableau dit tableau de Horner

Pour se faire, on va dresser un tableau de 3 lignes et dont le nombre de colonnes est égal à $d°(P)$+1=4 . On a :

Coefficients de P(x) dans l'ordre décroissant des puissances	2	-9 +	**-6** +	5 +
Racine -1	$\times -1$	-2 $\times -1$	11 $\times -1$	-5
Coefficients de Q(x) dans l'ordre décroissant des puissances	2	-11	5	0

Etape 4 : Déterminer les coefficients a, b et c

Les coefficients a, b et c dans cet ordre sont donnés par la dernière ligne du tableau en partant de la gauche vers la droite, on a : $a = 2; b = -11; c = 5$ d'où

$P(x) = (x+1)(2x^2 - 11x + 5)$

Etape 5 : Factorisation de Q(x) puis factorisation complète de P(x)

On a : $P(x) = (x+1)(2x-1)(x-5)$

Exercice d'application

Factoriser $P(x) = x^3 - 7x + 6$ par la méthode de Horner.

c. Méthode de la division euclidienne

Exemple

On se propose de factoriser $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$

Etape 1 : Chercher une racine de $P(x)$.

$P(-1) = 0$ donc -1 est une racine.

Etape 2 : Effectuer la division euclidienne de $2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$ par $x + 1$

On a : $P(x) = (x+1)Q(x)$ donc $Q(x) = \frac{P(x)}{x+1} = \frac{2x^3-9x^2-6x+5}{x+1}$.

$Q(x)$ est le quotient de cette division euclidienne. On a donc $2x^2 - 11x + 5$ et $P(x) = (x + 1)(2x^2 - 11x + 5)$

Etape 3 : factoriser Q(x) puis terminer la factorisation de P(x)

On a : $P(x) = (x+1)(2x-1)(x-5)$

Exercice d'application

Factoriser $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x - 2$ par la division euclidienne

II. Fraction rationnelle

1. Définition et exemple

Une fraction rationnelle $f(x)$ est un quotient qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes avec $Q(x)$ différent du polynôme nul. Par exemple, $f(x) = \frac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+3}$ est une fraction rationnelle.

2. Condition d'existence d'une fraction rationnelle

a. Définition et notation

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle. $f(x)$ existe si et seulement si $Q(x) \neq 0$. L'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe est appelé **ensemble ou domaine de définition** de la fraction rationnelle. On le note D_f .

b. Exemple

$f(x) = \frac{3x^3-4x^2-x+2}{x^2-x-2}$. Déterminons l'ensemble de définition de f.

3. Racine (zéro) d'une fraction rationnelle

a. Définition :

Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle. Un réel a est une racine de f si $P(a) = 0$ et $Q(a) \neq 0$

b. Exemple :

Déterminons toutes les racines de $f(x) = \frac{2x^3-3x^2-x-2}{x^2-x-2}$

4. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

a. Division euclidienne de deux polynômes

- **Exemple 1**

Effectuons la division euclidienne de $2x^3-3x^2+7x-6$ par $2x^2-x+6$.

- **Exemple 2**

Effectuons la division euclidienne de $2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$ par x+2.

b. Propriété

Si on effectue la division euclidienne d'un polynôme A(x) par un polynôme non nul B(x) alors on trouve des polynômes Q(x) et R(x) tels que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ avec $R(x) = 0$ ou d°(R)<d°(B). Q(x) et R(x) sont respectivement appelés quotient et reste de la division euclidienne de A(x) par B(x).

c. Remarque

Si R(x) est le polynôme nul alors on dit que B(x) divise A(x). Ainsi on peut dire que $2x^2-x+6$ divise $2x^3-3x^2+7x-6$.

d. Théorème-Définition

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle, q(x) et r(x) sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P(x) par Q(x) alors $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$ avec d°(r)<d°(Q). L'écriture $f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$ est dite décomposition en éléments simples de $f(x)$.

Preuve :...

Exemple

Décomposons en éléments simples $f(x) = \frac{2x^3 - 9x^2 - 6x + 5}{x+2}$

Chapitre 2 de consolidation: ANGLES ORIENTES ET LA TRIGONOMETRIE

Durée : 7h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition du radian ;
- ✓ Calculer la longueur d'un arc de cercle ;
- ✓ Convertir les degrés en radians et inversement ;
- ✓ Reconnaitre sur un dessin codé un angle orienté de demi-droites ou de vecteurs ;
- ✓ Restituer le vocabulaire : mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Déterminer la mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Construire un angle orienté connaissant sa mesure principale ;
- ✓ Restituer la définition du cercle trigonométrique ;
- ✓ Restituer et utiliser la relation fondamentale $cos^2x + sin^2x = 1$;
- ✓ Restituer les relations entre les lignes trigonométriques des angles opposés, des angles complémentaires et des angles supplémentaires ;
- ✓ Déterminer cosx, sinx et tanx (x étant la mesure principale d'un angle orienté) en utilisant les angles remarquables, les angles associés et la calculatrice ;
- ✓ Utiliser les configurations du cercle trigonométrique ;
- ✓ Etudier le signe du cosinus et du sinus d'un angle orienté connaissant sa mesure principale.

Prérequis :

- ✓ Angles géométriques

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 2^{nde} S ;
- ✓ Collection Spirale 2^{nde};

- ✓ Collection perspectives 2nde ;
- ✓ USAID 2nde ;
- ✓ Collection Fractale 2nde ;
- ✓ Document stagiaire…

Plan de la leçon

I. Angle orienté

1. **Rappels sur les angles géométriques (ou angles non orientés)**
   a. **Définition**
   b. **Définition et notation radian**
      - ➢ **Relation entre le degré et le radian**
      - ➢ **Tableau de conversion en radians des mesures en degrés des angles remarquables**
   c. **Angle inscrit et angle au centre**
   d. **Quadrilatères inscriptibles**
2. **Angles orientés**
   a. **Orientation**
      - ➢ **Orientation du cercle**
      - ➢ **Orientation du plan**
      - ➢ **Remarques**
   b. **Angles orientés de deux demi-droites de même origine**
      - ➢ **Définition, notation et représentation**
      - ➢ **Remarque**
      - ➢ **Exercices d'application**
      - ➢ **Orientation d'un angle orienté de deux demi-droites de même origine**
      - ➢ **Mesure principale**
      - ➢ **Exercices d'application**
      - ➢ **Remarque**
   c. **Angles orientés de deux vecteurs non nuls**
      - ➢ **Définition, notation et représentation**
      - ➢ **Remarque**
      - ➢ **Exercice d'application**
      - ➢ **Définitions**

- **Exemple**
- **Exercice d'application**

II. Trigonométrie

1. **Cercle trigonométrique**
   a. **Définition**
   b. **Activité 1**
   c. **Activité 2**
2. **Cosinus, sinus et tangente d'un réel**
   a. **Définition**
   b. **Exemples**
   c. **Lignes trigonométriques d'angles remarquables**
   d. **Propriétés**
   e. **Signe du cosinus et du sinus**
   f. **Lignes trigonométriques d'angles associés**

Déroulement du cours

Introduction orale

Imaginons, une personne étrangère qui veut prier et qui par manque de repère se dirige vers le sud. Si tu veux qu'il se retourne pour faire face à l'Est alors quelle consigne vous allez lui donner ?

Naturellement, tu dois lui demander de tourner d'un angle de 90°. Mais si tu te limites à ça, l'étranger peut tourner de 90° vers la droite et dans ce cas, il fera face à l'Ouest au lieu de l'Est, donc il est nécessaire de lui indiquer qu'il doit tourner de 90° vers la gauche pour faire face à l'Est. Ainsi pour cet étranger, il ne s'agit pas seulement de tourner d'un angle de 90° mais il y a aussi un sens dans lequel il doit tourner. Ce problème met en évidence l'insuffisance des angles définis sans orientation de sens et permet de voir des angles avec un sens d'orientation bien défini. La notion d'angles orientés s'impose et permettra de compléter les carences des angles non orientés.

I. Angle orienté

1. Rappels sur les angles géométriques (ou angles non orientés)

a. Définition

Deux demi-droites [Ox) et [Oy) de même origine O définissent un angle noté $\widehat{xoy}$ ou $\widehat{yox}$ dit angle géométrique ou angle non orienté. O est le sommet de l'angle ;[Ox) et [Oy) sont les côtés de l'angle.

- Si les demi-droites [Ox) et [Oy) sont confondues alors l'angle $\widehat{xoy}$ est dit angle nul.
- Si les demi-droites [Ox) et [Oy) sont opposées alors l'angle $\widehat{xoy}$ est dit angle plat.
- Si les demi-droites [Ox) et [Oy) sont perpendiculaires alors l'angle $\widehat{xoy}$ est dit angle droit.

b. Définition et notation du radian

Le radian noté rad est une unité de mesure d'angles choisie de telle sorte qu'un angle plat mesure π rad.

➢ **Relation entre le degré et le radian**

Si x est la mesure en degrés et y la mesure en radians d'un même angle géométrique alors: $\frac{x}{y} = \frac{180}{\pi}$. Ce qui équivaut aussi à $180y = \pi x$.

➢ **Tableau de conversion en radians des mesures en degrés des angles remarquables**

La relation $180y = \pi x$ a permis de convertir en radians les mesures en degrés ci-dessous d'angles dits angles remarquables. On obtient le tableau suivant.

0°	30°	45°	60°	90°	180°
0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad

c. Angle inscrit dans un cercle et angle au centre d'un cercle.

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r, A, B et M des points deux à deux distincts sur (C).

- Un angle inscrit dans (C) est un angle dont le sommet est sur (C) et ses cotés recoupent (C). Par exemple : sur la figure ci-dessus, l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans (C).
- Un angle au centre de (C) est un angle dont le sommet est le centre O de (C). Par exemple : sur la figure ci-dessus, l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre de (C).

➢ **Remarque**

Si le sommet d'un angle est sur un cercle (C), l'un de ses cotés recoupe (C) et l'autre côté est tangent à (C) alors on dit aussi que cet angle est un angle inscrit dans (C). Par exemple, sur la figure ci-dessous, l'angle $\widehat{AMB}$ est angle inscrit dans (C).

- L'arc de cercle intercepté par un angle inscrit dans un cercle (C) est l'arc de (C) ne contenant pas le sommet de l'angle inscrit.
- L'arc de cercle intercepté par un angle au centre d'un cercle (C) est l'arc de ce cercle contenu dans le secteur saillant de l'angle au centre.

Par exemple, sur la figure 1, le petit arc noté $\widehat{AB}$ est l'arc intercepté par l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ mais aussi par l'angle au centre $\widehat{AOB}$. On dit que $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ sont associés.

➢ **Propriétés**

P₁) Si un angle inscrit dans un cercle et un angle au centre de ce cercle interceptent le même arc de cercle alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit. Par exemple, sur la figure ci-dessous, on a : $\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMB}$ ou bien encore $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AOB}$

P₂) Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure. Par exemple, sur la figure ci-dessous, on a : $\widehat{AMB} = \widehat{AM'B}$.

P₃) La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte. Plus précisément, si A et B sont sur un cercle de centre O et de rayon r et α est la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ alors la longueur l de l'arc $\widehat{AB}$ intercepté par $\widehat{AOB}$ est $l = r\alpha$.

Exercice d'application

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 2 cm, A, B et M des points deux à deux distincts sur (C) tel que $\widehat{AMB} = 45°$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$. En déduire celle de l'arc $\breve{AB}$.

d. Quadrilatères inscriptibles

➢ **Définitions**

D₁) Un quadrilatère ABCD est dit convexe si les sommets opposés A et C n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (BD) et les sommets opposés B et D n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (AC). Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est convexe.

Rappelons que si un quadrilatère est convexe alors la somme de ses 4 angles est égale à 2π rad (360°). (Exo : Démontrer cette propriété).

D2) Un quadrilatère ABCD est dit croisé si les sommets opposés A et C appartiennent au même demi-plan de frontière (BD) et les sommets opposés B et D appartiennent au même demi-plan de frontière (AC). Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est croisé.

D3) Un quadrilatère ABCD qui n'est ni convexe ni croisé est dit non convexe et non croisé. Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est non convexe et non croisé.

D4) Un quadrilatère est dit inscriptible dans un cercle si ses 4 sommets appartiennent au cercle. Par exemple, sur la figure ci-dessous, le quadrilatère ABCD est inscriptible dans le cercle (C).

- **Propriétés**

P1) Si deux angles opposés d'un quadrilatère convexe sont supplémentaires alors le quadrilatère est inscriptible dans un cercle. En réalité, si deux de ces angles sont supplémentaires alors les deux autres le sont. La propriété **P1)** est admise.

P2) Si un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle alors ses angles opposés sont deux à deux supplémentaires.

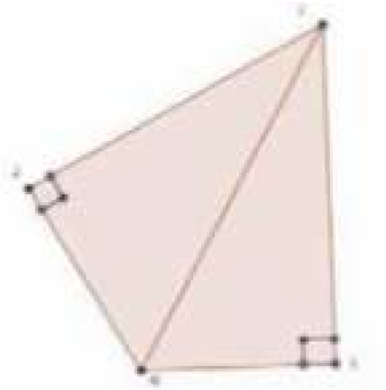
Exercice :

1. Soit (C) un cercle de centre O. ABCD un quadrilatère convexe inscriptible dans (C) tel que A et C soient diamétralement opposés.
   - **a.** Faire une figure.
   - **b.** Montrer que $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{ADC}}$ sont supplémentaires.
   - **c.** En déduire que $\widehat{\mathrm{BAD}}$ et $\widehat{\mathrm{BCD}}$ sont supplémentaires.
2. Soit (C) un cercle de centre O. ABCD un quadrilatère convexe inscriptible dans (C) tel que $\widehat{\mathrm{ABC}}$ obtus. Soit A', le point diamétralement opposé à A.
   - **a.** Faire une figure puis justifier que $\widehat{\mathrm{A'BC}} = \widehat{\mathrm{A'DC}}$.
   - **b.** Montrer que $\widehat{\mathrm{ABC}} = \frac{\pi}{2} + \widehat{\mathrm{A'BC}}$ et $\widehat{\mathrm{ADC}} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\mathrm{A'DC}}$.
   - **c.** Montrer que $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{ADC}}$ sont supplémentaires.
   - **d.** En déduire que $\widehat{\mathrm{BAD}}$ et $\widehat{\mathrm{BCD}}$ sont supplémentaires.

NB : Cet exercice est une preuve de P2)

- **Exercices d'application :**

Exo 1: Soit IJKL le quadrilatère ci-dessous.



Montrer que IJKL est inscriptible dans un cercle. Préciser ce cercle.

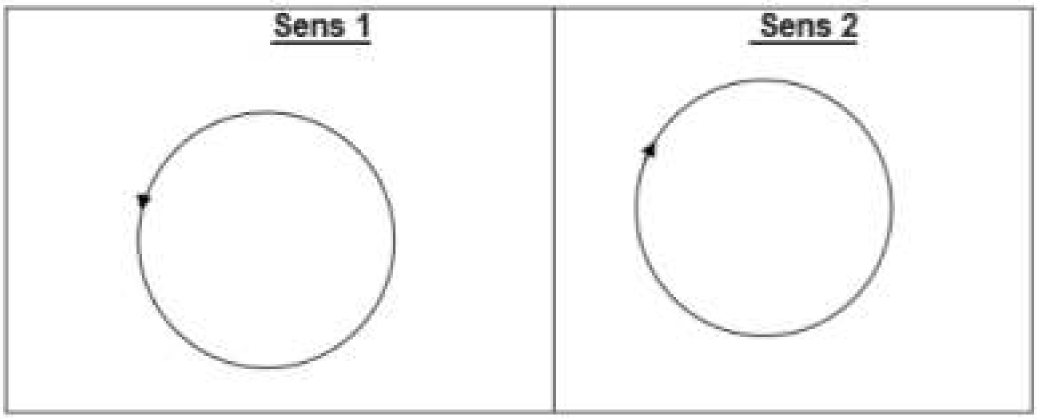
Exo 2 : Soient ABCD un trapèze isocèle. Montrer que ABCD est inscriptible dans un cercle.

2. Angles orientés

a. Orientation

- **Orientation du cercle**

Soit (C) un cercle donné du plan. On admet qu'il n'y a que deux sens de parcours possibles sur (C) : le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens 1) et le sens des aiguilles d'une montre (sens 2).



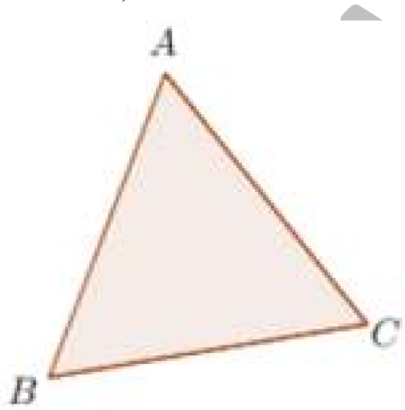
- Orienter le cercle, c'est choisir l'un de ces deux sens de parcours et décider qu'il est le sens direct. Dans ce cas, l'autre sens sera dit sens indirect.

- **Orientation du plan**

- Orienter le plan, c'est choisir le même sens de parcours sur tous les cercles du plan. Ce sens choisi est dit sens direct (ou sens positif ou sens trigonométrique). Le sens contraire à celui choisi est dit sens indirect (ou sens négatif ou sens rétrograde).

➢ **Remarques**

- Généralement, le sens contraire des aiguilles d'une montre est choisi comme sens direct et donc le sens des aiguilles d'une montre comme sens indirect. Dans toute la suite du cours, nous prenons cette convention.
- Un triangle ABC du plan orienté est dit direct (respectivement indirect) si en le parcourant de A à C en passant par B, le mouvement se fait dans le sens direct (respectivement dans le sens indirect).

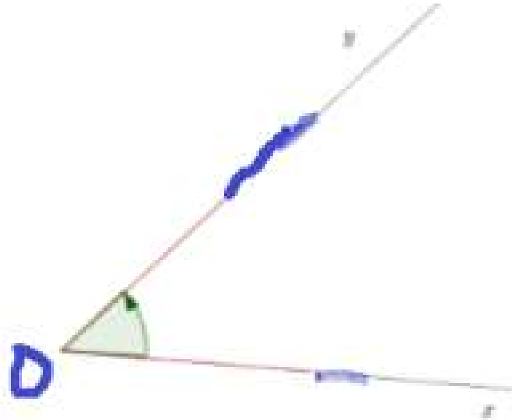


b. Angles orientés de deux demi-droites de même origine

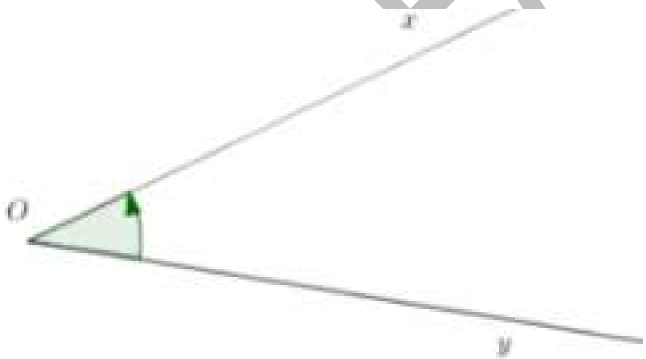
➢ **Définition, notation et représentation**

Soient $[Ox)$ et $[Oy)$, des demi-droites de même origine O. $[Ox)$ et $[Oy)$ définissent deux angles orientés de demi-droites :

- L'angle orienté de demi-droites $([Ox);[Oy))$ noté $(\widehat{[Ox);[Oy)})$. O est son sommet, $[Ox)$ est la demi-droite origine et $[Oy)$ est la demi-droite extrémité. Il se représente comme suit :



- L'angle orienté de demi-droites (([Oy);[Ox)) noté $(\widehat{[Oy);[Ox)})$. O est son sommet, [Oy) est la demi-droite origine et [Ox) est la demi-droite extrémité. Il se représente comme suit :



Oralement

Pour représenter un angle orienté de demi-droites sur une figure, on dessine une flèche en forme d'arc dont l'origine indique la demi-droite origine et l'extrémité indique la demi-droite extrémité.

➢ **Remarque**

- Si [Ox)=[Oy) (c'est-à-dire les deux demi-droites sont confondues) alors $(\widehat{[Ox);[Oy)}) = (\widehat{[Oy);[Ox)})$ et est dit angle orienté nul.
- Si [Ox) et [Oy) sont opposées (c'est-à-dire les demi-droites se complètent pour former une droite) alors $(\widehat{[Ox);[Oy)}) = (\widehat{[Oy);[Ox)})$ et est dit angle orienté plat.
- Si [Ox) et [Oy) sont perpendiculaires alors chacun des angles orientés $(\widehat{[Ox);[Oy)})$ et $(\widehat{[Oy);[Ox)})$ est dit angle orienté droit.

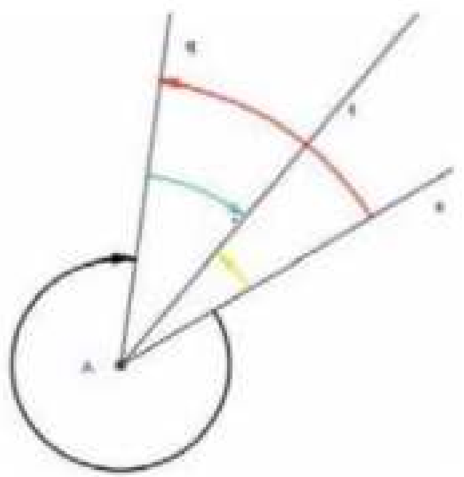
- **Exercices d'applications**

Exo1 :

Tracer trois demi-droites $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Oz)$ deux à deux distinctes. Représenter sur la figure les angles orientés de demi-droites : $(\widehat{[Ox);[Oy)})$; $(\widehat{[Oy);[Oz)})$ et $(\widehat{[Oz);[Ox)})$.

Exo2 :

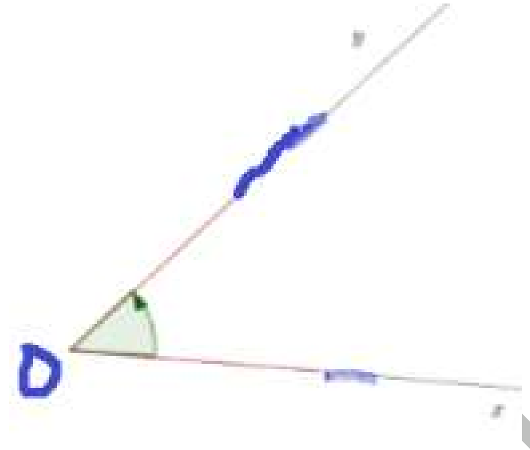
Sur la figure ci-dessous sont représentés des angles orientés de demi-droites. Noter chacun de ces angles orientés.



- **Orientation**

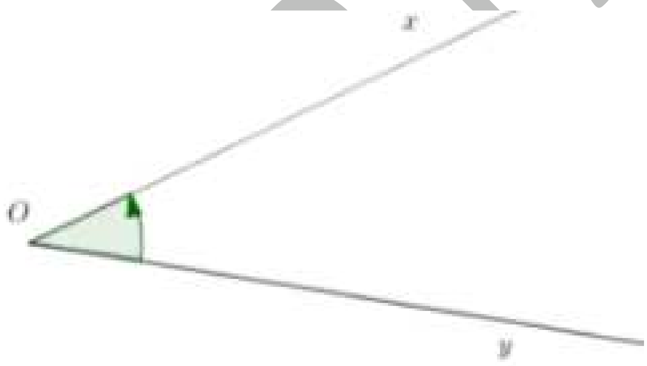
Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ non confondues et non opposées. La mesure en radians de l'angle géométrique $x\widehat{O}y$ est strictement comprise entre 0 et π. Dans le secteur saillant de $x\widehat{O}y$.

- Si le sens de déplacement de $[Ox)$ vers $[Oy)$ s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre alors $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ est un angle orienté dans le sens direct.



$(\widehat{[Ox),[Oy)})$ est un angle orienté dans le sens direct.

- Si le sens de déplacement de $[Ox)$ vers $[Oy)$ s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre alors $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ est un angle orienté dans le sens indirect.



$(\widehat{[Ox),[Oy)})$ est un angle orienté dans le sens indirect.

➢ **Mesure principale**

Soit $(\widehat{[Ox),[Oy)})$. La mesure principale en radians de $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ est le réel que l'on peut noter θ défini par :

- Si $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ est l'angle orienté nul alors $\theta = 0$ rad.
- Si $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ est l'angle orienté plat alors $\theta = \pi\, rad$.
- Si $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ n'est ni nul, ni plat et est orienté dans le sens direct alors $=$ mes $\widehat{xOy}$.
- Si $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ n'est ni nul, ni plat et est orienté dans le sens indirect alors $\theta =$ $-$mes $\widehat{xOy}$.

➢ **Remarque**

- Si θ est la mesure principale en radians d'un angle orienté alors $\theta \in]-\pi;\pi]$.
- Deux angles orientés de demi-droites sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.
- Soient $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ et $(\widehat{[O'x'),[O'y')})$ de mesures principales en radians θ et θ' respectivement alors :
  - $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ et $(\widehat{[O'x'),[O'y')})$ sont dits complémentaires si $\theta+\theta' = \pm\frac{\pi}{2}$.
  - $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ et $(\widehat{[O'x'),[O'y')})$ sont dits supplémentaires si $\theta+\theta' = \pi$.

➢ Exercices d'applications

Exercice 1 :

Tracer un triangle équilatéral direct ABC puis donner les mesures principales en radians des angles orientés : $(\widehat{[AB),[AC)})$ et $(\widehat{[CB),[CA)})$.

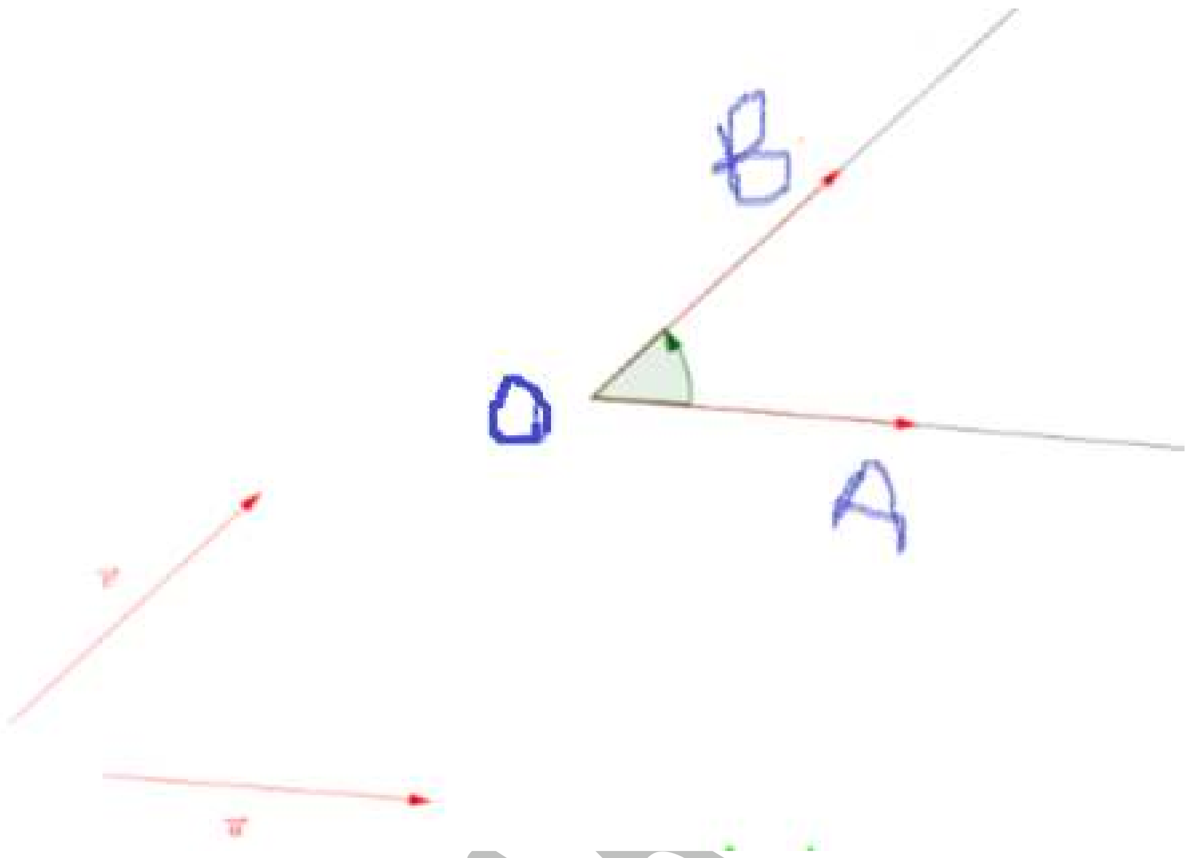
Exercice 2 :

Tracer EFG, un triangle rectangle et isocèle en E indirect puis donner les mesures principales en radians des angles orientés : $(\widehat{[EF),[EG)})$ et $(\widehat{[GF),[GE)})$.

c. Angles orientés de deux vecteurs non nuls

➢ Définition, notation et représentation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls, Pour tout point O du plan, il existe des points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre est noté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et est défini par $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{[OA),[OB)})$. $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ se lit : « angle orienté $\vec{u}$ $\vec{v}$ ». Dans ce cas, $(\widehat{[OA),[OB)})$ est dit représentant de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ ou bien associé à l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

➢ **Remarque**

- Une représentation d'un angle orienté de vecteurs $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est celle d'un angle orienté de demi-droites avec la possibilité de choisir n'importe quel point comme sommet. Ainsi un angle orienté de vecteurs $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ a une infinité de représentants mais tous ses représentants sont égaux.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est dit angle orienté nul.

- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est dit angle orienté plat.

- **Exercices d'applications**

Exercice 1:

Tracer deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Placer un point O puis représenter $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ en prenant O pour sommet.
2. Placer un autre point O' puis représenter $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ en prenant O' pour sommet.

Exercice 2 :

Placer trois points non alignés A, B et C.

1. Représenter $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$.
2. Représenter $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ en prenant B pour sommet.

- **Définitions**

- La mesure principale d'un angle orienté de vecteurs $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est la mesure principale d'un angle orienté de demi-droites qui représente $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
- Deux angles orientés de vecteurs sont égaux s'ils ont la même mesure principale.
- Soient $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u'},\vec{v'}})$ de mesures principales en radians θ et θ' respectivement alors :
  - $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u'},\vec{v'}})$ sont dits complémentaires si $\theta + \theta' = \pm\frac{\pi}{2}$
  - $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u'},\vec{v'}})$ sont dits supplémentaires si $\theta + \theta' = \pi$.

- **Exemple**

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A direct.

- La mesure principale en radians de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ est $\frac{\pi}{2}$.
- La mesure principale en radians de $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ est $-\frac{\pi}{4}$.

- **Exercice d'application**

Soit ABC un triangle équilatéral direct, O est son centre de gravité et I est le milieu de $[BC]$.

Donner les mesures principales en radians de $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}})$, $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$.

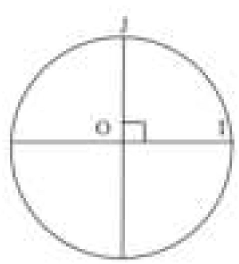
II. Trigonométrie

Dans le plan orienté, on choisit une unité de longueur une fois pour toute et on considère un repère orthonormé direct (O, I, J) c'est-à-dire $OI = OJ = 1$ et la mesure principale en radians de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}})$ est $\frac{\pi}{2}$.

1. Cercle trigonométrique

a. Définition

Le cercle trigonométrique est le cercle (C) de centre O et de rayon 1 sur lequel I est pris comme origine du parcours.



b. Activité 1

Soit $\alpha \in]-\pi; \pi]$.

1. Tracer une demi-droite quelconque $[Ox)$.
2. On suppose que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad.
   - **a.** Tracer une demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale de $(\widehat{[Ox), [Oy)})$ soit égale à α.
   - **b.** Soit $[Oy')$ une demi-droite telle que la mesure principale de $(\widehat{[Ox), [Oy')})$ soit égale à α. Justifier que $[Oy)$ et $[Oy')$ sont confondues.
   - **c.** Quelle conclusion peut-on tirer de b) ?

Solution

1. C'est une simple construction à faire.
2. **a.** C'est une construction que l'on peut faire en prenant $\frac{\pi}{3} rad = 60°$ et en utilisant le rapporteur.
   - **b.** $(\widehat{[Ox), [Oy)})$ et $(\widehat{[Ox), [Oy')})$ ont la même mesure principale $\frac{\pi}{3}$ donc ils sont égaux. De plus ils ont la même demi-droite origine $[Ox)$ donc leurs demi-droites extrémités $[Oy)$ et $[Oy')$ sont confondues.

c. D'après b), on peut dire qu'il existe une unique demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale de $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ soit égale à α.

Oralement : D'après l'activité ci-dessus, on peut dire que pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad et pour une demi-droite $[Ox)$ donnée, il existe une et une seule demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale de $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ soit égale à α. Cette propriété peut être généralisée pour n'importe quelle valeur de α appartenant à $]-\pi;\pi]$ et on a la propriété suivante :

Propriété

Si $\alpha \in]-\pi;\pi]$ et $[Ox)$ est une demi-droite quelconque donnée alors il existe une et une seule demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale en radians de $(\widehat{[Ox),[Oy)})$ soit égale à α.

c. Activité 2

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), (C) est le cercle trigonométrique. Soit $\alpha \in]-\pi;\pi]$.

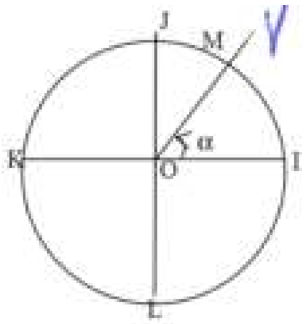
1. Justifier qu'il existe une et une seule demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale en radians de $(\widehat{[OI),[Oy)})$ soit égale à α.
2. Justifier que cette demi-droite $[Oy)$ coupe le cercle (C) en un seul point M.
3. Montrer que la mesure principale en radians de $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ est égale à α.

Solution

1. Comme $\alpha \in]-\pi;\pi]$ et $[OI)$ est une demi-droite donnée donc d'après la propriété précédente, il existe une et une seule demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale en radians de $(\widehat{[OI),[Oy)})$ soit égale à α.
2. Comme la demi-droite $[Oy)$ a pour origine le centre O de (C) alors elle le coupe en un et un seul point M.
3. $[Oy) = [OM)$ donc la mesure principale de $(\widehat{[OI),[OM)}) = (\widehat{[OI),[Oy)})$ est α. Comme $(\widehat{[OI),[OM)})$ est un représentant de $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ donc la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$ est α.

Définition

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), soit (C) le cercle trigonométrique et $\alpha \in]-\pi; \pi]$. Il existe un et un seul point M du cercle trigonométrique (C) tel que la mesure principale en radians de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ soit égale à α. Ce point M est dit image de α sur le cercle trigonométrique.



Exemples

- L'image de 0 sur le cercle trigonométrique est le point I.
- L'image de $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point J.
- L'image de $-\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point L, diamétralement opposé à J.
- L'image de π sur le cercle trigonométrique est le point K, diamétralement opposé à I.

Exercice

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), soit (C) le cercle trigonométrique. Construire les images M et N de $\frac{\pi}{4}$ et de $-\frac{\pi}{3}$ respectivement sur le cercle trigonométrique.

2. Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), (C) est le cercle trigonométrique.

a. Définitions

Soit x un réel appartenant à $]-\pi; \pi]$, M, l'image de x sur (C).

- Le cosinus de x noté $\cos x$ est l'abscisse x_M de M dans le repère (O, I, J).
- Le sinus de x noté $\sin x$ est l'ordonnée y_M de M dans le repère (O, I, J).

- Pour tout x distinct de $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$, la tangente de x notée $\tan x$ est le réel défini par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Les valeurs de cos x, de sin x et de tan x sont dites lignes trigonométriques de x.
- Le cosinus, le sinus, la tangente d'un angle orienté (non droit dans le cas de la tangente) est le cosinus, le sinus, la tangente respectivement de la mesure principale de cet angle orienté.

b. Exemples

- $\cos 0 = 1$; $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\cos\pi = -1$; $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$
- $\sin 0 = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\sin\pi = 0$; $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$
- $\tan 0 = 0$; $\tan\pi = 0$; $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ n'ont pas de tangente.

c. Lignes trigonométriques d'angles remarquables

Le tableau suivant donne des lignes trigonométriques de réels qui sont des mesures principales en radians d'angles orientés dits angles remarquables.

Mesure principale en radians de l'angle orienté	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Sinus de la mesure principale	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
Cosinus de la mesure principale	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Tangente de la mesure principale	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

d. Propriétés

Pour tout réel x appartenant à $]-\pi;\pi]$ on a :

P1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$. En effet, l'abscisse et l'ordonnée de l'image de x sur (C) dans (O,I,J) sont comprises entre -1 et 1.

P2) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$. On note $(\cos x)^2 := cos^2 x$ et $(\sin x)^2 := sin^2 x$ Cette relation est dite relation fondamentale.

P3) $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ avec $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2}$

Exercice d'application

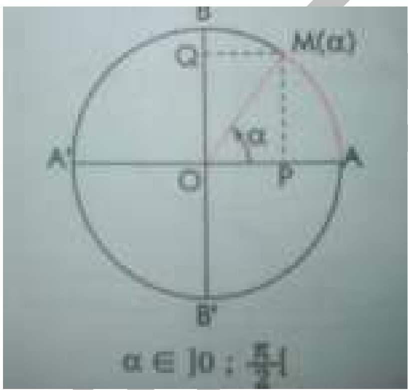
1. Démontrer que pour tout $x \in]-\pi;\pi]$, $-1 \leq 3 + cosx - 3sin\,x \leq 7$
2. Démontrer que $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. Soit $x \in]-\pi;\pi]$ tel que $tanx = -\sqrt{3}$, déterminer les valeurs possibles de $cos\,x$ puis celles de sin x

e. Signe du cosinus et du sinus

Soit $\alpha \in]-\pi;\pi[$, $M(\alpha)$ l'image de α sur le cercle trigonométrique.

- Si $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha > 0$

Illustration graphique

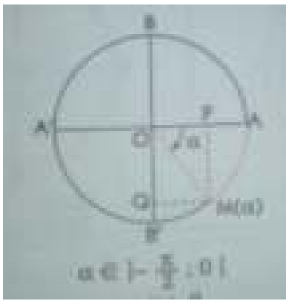


- Si $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ alors $cos\,\alpha < 0$ et $sin\,\alpha > 0$

Illustration graphique

- Si $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ alors $cos\,\alpha > 0$ et $sin\,\alpha < 0$

Illustration graphique



- Si $\alpha \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$ alors $cos\ \alpha < 0$ et $sin\ \alpha < 0$

Illustration graphique

f. Lignes trigonométriques d'angles associés

Soit $\alpha \in]-\pi; \pi]$, les réels $-\alpha; \frac{\pi}{2} - \alpha; \frac{\pi}{2} + \alpha; \pi - \alpha$ et $\pi + \alpha$ sont dits associés à α.

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ et $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$. En effet, l'image M de α et l'image M' de $-\alpha$ sont symétriques par rapport à (OI).

Illustration graphique

- $cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$; $sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ et $tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$. En effet, l'image M de α et l'image M' de $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{IOJ}$.

Illustration graphique

- $cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$; $sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$ et $tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}$. En effet, $\frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} - (-\alpha)$.
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ et $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$. En effet, l'image M de α et l'image M' de $\pi - \alpha$ sont symétriques par rapport à (OJ).

Illustration graphique

- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ et $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$. En effet, l'image M de α et l'image M' de $\pi + \alpha$ sont symétriques par rapport à O.

Chapitre 1 : Equations-inéquations-systèmes

Durée : 18h (Cours +Td)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations ou inéquations du second degré ;
- ✓ Résoudre des équations irrationnelles du type $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ où f et g sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ;
- ✓ Résoudre un système d'équations linéaires en utilisant la méthode du pivot de Gauss;

Prérequis :

- ✓ Equations du second degré ;

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;
- ✓ CIAM 1 SE ;
- ✓ CIAM 1 SM ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

I. **Equations**
   1. **Compléments sur les trinômes du 2^{nd} degré**
   2. **Equations irrationnelles**
      a. **Equations du type $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$**
      b. **Equations du type $\sqrt{f(x)} = ax + b$**

II. **Inéquations irrationnelles**
   1. **Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \leq ax + b$**
   2. **Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \geq ax + b$**
   3. **Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$**

III. **Systèmes**

1. **Systèmes de 3 équations linéaires à trois inconnues**
    a. **Exemple**
    b. **Méthode du pivot de Gauss**
2. **Systèmes d'inéquations linéaires**
    a. **Inéquations linéaires à deux inconnues**
    b. **Système de deux inéquations linéaires à deux inconnues**

Déroulement du cours :

NB : La résolution d'équations ou d'inéquations se ramenant à des équations du second degré ou d'inéquations du second degré, d'équations et d'inéquations paramétriques ainsi que des problèmes se ramenant à un système d'équations linéaires se feront en exercice.

Introduction orale :

La notion d'équation et d'inéquation est vue depuis la classe de cinquième notamment avec la résolution dans $\mathbb{D}$ d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue. Elle est approfondie en classe de quatrième avec la résolution dans $\mathbb{Q}$, d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue mais surtout de systèmes de deux inéquations à une inconnue. En classe de troisième, on a commencé à résoudre certaines équations du second degré, des équations et inéquations à deux inconnues mais aussi des systèmes d'équations et d'inéquations du premier degré à deux inconnues. En classe de seconde S, la résolution dans $\mathbb{R}$ d'équations et d'inéquations du second degré est généralisée et la méthode de Cramer est introduite pour la résolution de systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues. En classe de première S2, les équations et inéquations du second degré seront révisées mais l'attention sera faite surtout sur la résolution dans $\mathbb{R}$ de nouveaux types d'équations et d'inéquations dites équations et inéquations irrationnelles mais aussi de la résolution de systèmes d'équations linéaires à trois inconnues avec la méthode du pivot de Gauss.

Vérification des prérequis :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

$2x^2 - x + 1 = 0$

$-9x^2 + 12x - 4 = 0$

$(3x-1)(x-2)-x-5=0$

Déroulement du cours :

I. Equations

1. Compléments sur les trinômes du 2nd degré

c. Signe des racines d'un trinôme du 2nd degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du 2nd degré, S et P la somme et le produit des racines respectivement de f(x).

2. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a 2 racines de même signe.

3. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a 2 racines strictement positives.

4. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a 2 racines strictement négatives.

5. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a 2 racines opposées.

6. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a 2 racines de signes contraires.

7. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a 2 racines de signes contraires et celle positive a la plus grande valeur absolue.

8. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a 2 racines de signes contraires et celle négative a la plus grande valeur absolue.

9. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a une racine nulle et une racine strictement positive.

10. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a une racine nulle et une racine strictement négative.

11. $\begin{cases} \Delta = 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $f(x)$ a 2 racines nulles.

a. Exemples

Dans le cas où il existe, déterminer sans les calculer, le signe des racines des trinômes suivants : $3x^2 - 5x + 2$; $-3x^2 + 2x + 5$; $9x^2 - 6x + 1$

2. Equations irrationnelles

a. Equations irrationnelles du type $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt{\boldsymbol{g(x)}}$

$\sqrt{x^2 + 3x - 1} = \sqrt{x + 2}$ est une équation irrationnelle du type $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ avec $f(x) = x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = x + 2$.

Pour résoudre une équation du type $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt{\boldsymbol{g(x)}}$ on peut utiliser deux méthodes :

- **Méthode par implication**
  - ✓ **1ère étape :** On écrit $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{implique que}} f(x) = g(x)$ puis on résout l'équation $f(x) = g(x)$. Les solutions éventuelles de $f(x) = g(x)$ sont les potentiels candidats pour être solution de l'équation $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt{\boldsymbol{g(x)}}$
  - ✓ **2ème étape :** Parmi les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, on cherche celles qui vérifient $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. Ce sont ces réels qui sont les solutions de l'équation $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt{\boldsymbol{g(x)}}$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = \sqrt{x + 2}$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $\sqrt{x^2 + 2x - 5} = \sqrt{x + 1}$

- **Méthode par équivalence**
  - ✓ **1ère étape :** On écrit : $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ ou bien $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

- ✓ **2ème étape** : On résout le système $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ ou bien le système $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$. L'ensemble des solutions de l'un de ces systèmes est l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = \sqrt{x + 2}$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $\sqrt{x^2 + 2x - 5} = \sqrt{x + 1}$

b. Equations irrationnelles du type $\sqrt{f(x)} = ax + b$

$\sqrt{2 - x} = x + 10$ est une équation du type $\sqrt{f(x)} = ax + b$ avec $f(x) = 2 - x$ et ax+b=x+10

- **Méthode par implication**
  - ✓ **1ère étape :** on écrit : $\sqrt{f(x)} = ax + b \Rightarrow f(x) = (ax + b)^2$
  - ✓ **2ème étape** : On résout l'équation $f(x) = (ax + b)^2$ puis on procède à une vérification pour chacune des solutions obtenues.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\sqrt{2 - x} = x + 10$

- **Méthode par équivalence**
  - ✓ **1ère étape :** On écrit : $\sqrt{f(x)} = ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} ax + b \geq 0 \\ f(x) = (ax + b)^2 \end{cases}$
  - ✓ **2ème étape :** On résout le système $\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ f(x) = (ax + b)^2 \end{cases}$. L'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{f(x)} = ax + b$

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $\sqrt{2 - x} = x + 10$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{4-x^2} = x - 1$

II. Inéquations irrationnelles

1. Inéquations irrationnelles du type $\sqrt{f(x)} \leq ax + b$

$\sqrt{x+1} \leq x + 3$ est une inéquation irrationnelle du type $\sqrt{f(x)} \leq ax + b$ avec $f(x) = x + 1$ et $ax + b = x + 3$. Une inéquation irrationnelle se résout toujours par la méthode d'équivalence. On a :

$$\sqrt{f(x)} \leq ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ ax + b \geq 0 \\ f(x) \leq (ax+b)^2 \end{cases}$$

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $\sqrt{x+1} \leq x + 3$

$$\sqrt{x+1} \leq x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ x + 1 \leq (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x^2 + 5x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x \in]-\infty; +\infty[\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \geq -1$ d'où $S = [-1; +\infty[$

2. Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \geq ax + b$

$\sqrt{2-x} \geq x + 4$ est une inéquation irrationnelle du type $\sqrt{f(x)} \geq ax + b$ avec $f(x) = 2 - x$ et $ax + b = x + 4$.

On a : $\sqrt{f(x)} \geq ax + b \Leftrightarrow \left(\begin{cases} ax + b \geq 0 \\ f(x) \geq (ax+b)^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} ax + b < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}\right)$

Exemple :

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $\sqrt{2-x} \geq x + 4$

Elle est équivalente, d'après le théorème 4 à la réunion des deux systèmes :

$$(I)\begin{cases} x + 4 < 0 \\ \text{et} \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (II)\begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ \text{et} \\ 2 - x \geq (x+4)^2 \end{cases}$$

On établit facilement que le système (I) a pour ensemble de solutions $S_I =]-\infty; 4[$.

3. Inéquations irrationnelles du type $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$

$\sqrt{2x^2-x-1} \leq \sqrt{3x^2-2x-1}$ est une inéquation irrationnelle du type $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$ avec $f(x) = 2x^2 - x - 1$ et $g(x) = 3x^2 - 2x - 1$

On a : $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$

- **Exemple :**

Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $\sqrt{2x^2-x-1} \leq \sqrt{3x^2-2x-1}$

III. Systèmes

1. Système de 3 équations linéaires à trois inconnues

a. Exemple

Le système $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x+y+z = -3 \end{cases}$ est un système de 3 équations linéaires à trois inconnues x ; y et z.

Résoudre un tel système c'est trouver tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient les trois équations du système.

Nous allons voir une méthode permettant de résoudre un tel système : la méthode du pivot de Gauss.

b. Méthode du pivot de Gauss

- **Exemple 1 : Résolvons par la méthode du pivot de Gauss, le système suivant :**

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x+y+z = -3 \end{cases}$$

1ère étape : On considère le sous-système formé par les deux premières équations du système puis on élimine x en utilisant une combinaison de ces deux équations : $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$-2\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 20y + 6z = -10 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$ ainsi on a :

$-21y + 8z = -8$. On obtient ainsi une équation sans l'inconnue x.

2ème étape : On considère le sous-système formé par la 1ère et la 3ème équation du système puis on élimine x en utilisant une combinaison de ces deux équations.

$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ -x+y+z = -3 \end{cases} \Rightarrow 11y - 2z = 2$. Ainsi on obtient une 2ème équation sans l'inconnue x.

3ème étape : On écrit un nouveau système de 3 équations formé par la 1ère équation de l'ancien système et les 2 nouvelles équations obtenues sans l'inconnue x. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ -21y + 8z = -8 \\ 11y\text{-}2z = -3 \end{cases}$$

4ème étape : On considère le sous-système formé par les deux dernières équations du nouveau système puis on élimine y en utilisant une combinaison.

$\begin{cases} -21y + 8z = -8 \\ 11y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 46z = -46$. Ainsi on obtient une nouvelle équation qui n'a ni x ni y.

5ème étape : On écrit le nouveau système de 3 équations formé par les deux premières équations du système précédent et de la dernière équation obtenue dans l'étape précédente**.**

On obtient le système équivalent suivant dit système triangulaire S'' :

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ -21y + 8z = -8 \\ 46z = -46 \end{cases}$$

Un système de la forme de S'' est dit système triangulaire.

6ème étape : Pour terminer la résolution, on détermine z dans la dernière équation du dernier système puis on remplace z par cette valeur dans la 2ème équation du dernier système pour trouver y et enfin on y et z par leurs valeurs respectives dans la 1ère équation du système pour trouver x. Ainsi on a : $S = \{(2; 0; -1)\}$

- **Exemple 2**

Résolvons le système suivant par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x+y\text{-}2z = -1 \end{cases}$$

- **Exercice d'application**

Résoudre le système suivant par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ -x + 4y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

2. Systèmes d'inéquations linéaires

a. Inéquations linéaires à deux inconnues

- **Exemple**

$2x + y - 5 > 0$ est une inéquation linéaire à deux inconnues x et y.

- **Résolution graphique**

Pour résoudre graphiquement l'inéquation $2x + y - 5 > 0$, on représente la droite (D) d'équation $2x + y - 5 = 0$ dans un repère orthononormé (O,I,J)

x	0	1
y	5	3

Ensuite, on choisit un point qui n'est pas sur (D) et dont ses coordonnées sont connues. Par exemple : le point $O\binom{0}{0}$ puis on remplace dans l'inéquation x et y respectivement par les coordonnées de O. Ainsi, on a $2(0) + 0 - 5 > 0$ $c'est\ à\ dire\ -5 > 0$ faux donc les coordonnées de O ne vérifient pas l'inéquation. On barre donc le demi-plan de frontière (D) contenant O.

b. Systèmes de deux inéquations linéaires à deux inconnues

- **Exemple**

$\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$ est un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues x et y

- **Résolution graphique**

Résolvons graphiquement le système $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$

On commence par représenter graphiquement les droites $(D_1)\ d'équation\ x - 2y + 1 = 0$ et (D_2) d'équation $2x + y - 3 = 0$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

x	-1	1

y	0	1

Puis on choisit un

x	0	1
y	3	1

point qui n'est ni sur(D_1), ni sur (D_2) et dont les coordonnées sont connues. Par exemple le point $O\binom{0}{0}$.

En remplaçant x et y par les coordonnées de O dans l'inéquation 1, on a : $0-2(0)+1 \geq 0$ $c'est à \ dire$ $1 \geq 0$ vrai donc les cordonnées de O vérifie l'inéquation 1. On barre donc le demi-plan de frontière (D_1) ne contenant pas O.

En remplaçant x et y par les coordonnées de O, dans l'inéquation 2, on a : $2(0)+0-3 < 0$ $c'est \ à \ dire$ $-3 < 0$ vrai donc les coordonnées de O vérifie l'inéquation 2. On barre donc le demi-plan de frontière (D_2) ne contenant pas O.

- **Exercice à faire à la maison**

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss le système $\begin{cases} x-5y-7z=3 \\ 5x+3y+z=3 \\ 3x+y-2z=-1 \end{cases}$

Chapitre 2 : Les applications

Durée : 7h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition d'une application ;
- ✓ Reconnaitre une application ;
- ✓ Déterminer graphiquement l'image directe et l'mage réciproque d'une partie d'un ensemble;
- ✓ Restituer les définitions d'injection, de surjection et de bijection ;
- ✓ Reconnaitre graphiquement une bijection ;
- ✓ Déterminer l'application réciproque d'une bijection ;
- ✓ Déterminer et reconnaitre la restriction d'une application.

Prérequis :

- ✓ Notion d'ensemble ;
- ✓ Fonctions numériques (seconde) .

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;

- ✓ Mon cours de 1erS au Lycée Kennedy ;
- ✓ Nouvelle Collection Durrande (Collège 84) ;
- ✓ Fractale Maths 2nde ;
- ✓ CIAM 1 SM ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

- Exemple et contre-exemple
- Remarque
- Propriété
- Exercice d'application
- Reconnaitre graphiquement une bijection
- Application réciproque d'une bijection
  - Définition
  - Exemple

IV. Restriction d'une application
  1. Définition
  2. Exemples

Déroulement du cours

I. Définition d'une application

1. Activités

a. Activité 1

Soient E et F les ensembles suivants : $E = \{M.FAll, M.Sow, M.Sarr, Mme\ Mbow\}$ et $F = \{Maths, SP, Anglais, espagnol, Arabe\}$.

M. Fall et M. Sow sont des profs de Maths, M. Sarr est un prof de SP et Mme Mbow est un prof d'anglais. En partant de l'ensemble E vers l'ensemble F, on peut associer à chacun des éléments de E, la matière qu'il enseigne qui est un élément de F. Ainsi M. Fall et M. Sow sont associés à Maths ; M. Sarr est associé à SP et Mme Mbow est associée à l'anglais.

Par ce procédé, chaque élément de E admet un et un seul associé dans F. Un tel procédé est dit application de E dans F. E est dit ensemble de départ et F ensemble d'arrivée.

Par cette application on dit que M. Fall et M. Sow ont comme image Maths (ou bien que les antécédents de Maths sont M. Fall et M. Sow) ; l'image de M. Sarr est SP et celle de Mme Mbow est l'anglais.

b. Activité 2

Soient A et B les ensembles de nombres réels suivants : $A = \{0; 1{,}5; -2; \sqrt{2}\}$ et $B = \{0; 2\sqrt{2}; 5; -4; 6{,}1; 3\}$. On peut définir un procédé qui à chaque élément de A associe son double. Ainsi, 0 est associé à $2 \times 0 = 0$; 1,5 est associé à $2 \times 1{,}5 = 3$; -2 est associé à $2(-2) = -4$ et $\sqrt{2}$ est associé $2\sqrt{2}$. Par ce procédé, chaque élément A a un et un seul associé dans B. On dit que ce procédé est une application de A dans B. L'associé d'un élément de A qui est dans B est dit image de cet élément de A et chaque élément de A est dit antécédent de son associé qui est dans B. Cette application peut être appelée f. Ainsi, si on désigne par x un élément quelconque de A, l'image de x par f est $2x$ et est notée $f(x) = 2x$. On écrit $f: A \to B: x \mapsto 2x$ (On lit : f est une application de A dans B qui à x associe 2x)

2. Définition

Soit E et F deux ensembles non vides quelconques. Une application de E (ensemble de départ) dans F (ensemble d'arrivée) est un procédé (ou relation) qui permet d'associer à chaque élément x de E, un et un seul élément y de F. Une application est souvent appelée f et on note : $f: E \to F: x \mapsto y = f(x)$

- $y = f(x)$ signifie que y est l'image de x par l'application f ou bien x est l'antécédent de y par f.
- Si les éléments de E et F sont des nombres réels alors l'application f est dite application numérique à variable réelle. Dans ce cas, l'image $f(x)$ d'un réel x par f est donnée par une expression en fonction de x.

3. Exemples

a. Exemple 1

Le procédé de l'activité 1 est une application de E dans F que l'on peut appeler f. Elle peut être représentée par le diagramme suivant dit diagramme sagittal.

b. Exemple 2

Le procédé de l'activité 2 est une application de A dans B que l'on peut appeler f. Elle est définie par l'expression $f(x) = 2x$. On note $f: A \to B: x \mapsto f(x) = 2x$

c. Exemple 3

Le procédé dit g de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$ qui a chaque réel associe son carré est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$ notée $g: \mathbb{R} \to [0, +\infty[: x \mapsto g(x) = x^2$

4. Remarques

- Par une application f de E dans F, un élément de F peut ne pas avoir d'antécédent dans E ou bien même peut avoir plusieurs antécédents dans E.
- Par un procédé f de E vers F, s'il existe au moins un élément de E qui n'a pas d'associé dans F ou qui a plusieurs associés dans F alors f n'est pas une application.

5. Représentation graphique

a. Activité

(O, I, J) est un repère orthonormé et $f:\mathbb{R} \to [0,+\infty[\, : x \mapsto f(x) = x^2$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

2. Placer dans le repère (O, I, J) tous les points $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ du tableau puis les relier par une courbe.

La courbe ainsi obtenue est dite représentation graphique ou bien simplement la courbe de l'application f dans (O, I, J).

b. Définition

Dans un repère (O, I, J), la courbe représentative (représentation graphique) d'une application numérique à variable réelle $f : E \to F$ notée C_f est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ $avec\ x \in E$. L'expression de $f(x)$ est appelée équation de C_f dans (O, I, J).

II. Image directe-Image réciproque

a. Image directe :

a. Définition

Soit $f : E \to F$ une application, A un sous-ensemble (partie) de E. L'image directe de A par f notée $f(A)$ est l'ensemble des images par f des éléments de A.

b. Exemple

Par l'application f de l'activité 2, l'image directe de $A = \{1{,}5; -2; \sqrt{2}\}$ est $f(A) = \{3; -4; 2\sqrt{2}\}$.

b. Image réciproque

a. Définition

Soit $f : E \to F$ une application, B un sous-ensemble (partie) de F**.** L'image réciproque de B par f notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.

b. Exemple

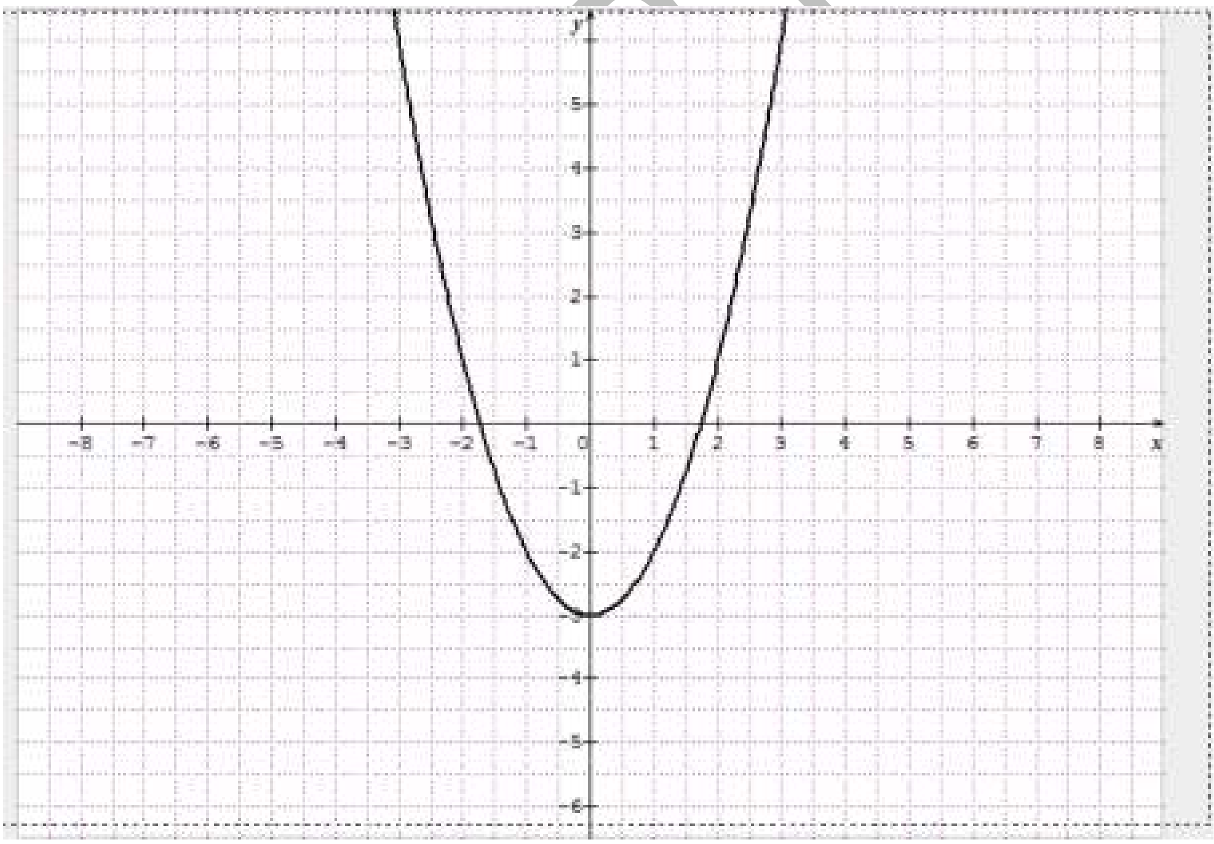
Par l'application f de l'activité 2, l'image réciproque de $C = \{-7; 0; 2\sqrt{2}\}$ est

$f^{-1}(C) = \{0; \sqrt{2}\}$.

c. Détermination graphique de l'image directe et de l'image réciproque

Exemple

La courbe C_f ci-dessous est la courbe d'une application numérique à variable réelle f.



1. Déterminer graphiquement les images par f de 1 et de 2.
2. Déterminer graphiquement les antécédents par f de 6 et de – 4.
3. Déterminer graphiquement l'image directe par f de $[-1; 0]$.
4. Déterminer graphiquement l'image réciproque par f de $[1; 6]$.

III. Applications particulières

1. Application injective

a. Définition

Une application $f : E \to F$ est dite injective (ou bien est dite une injection) si tout élément de F a au plus un (0 ou 1) antécédent dans E. En d'autres termes deux éléments quelconques et distincts de E ont des images distinctes dans F.

b. Exemple

L'application $f : A \to B$ de l'activité 2 est injective.

c. Contre-exemple

L'application $f : E \to F$ de l'activité 1 n'est pas injective car l'élément Maths de F n'a pas au plus un antécédent dans E mais il en a deux (M. Fall et M. Sow).

d. Propriété

Une application numérique à variable réelle $f : E \to F$ est injective si et seulement si pour tous réels x et x' de E, on a : Si $f(x) = f(x')$ $alors\ x = x'$

Exemple

Montrons que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: x↦f(x)=$-3x + 5$ est injective.

Exercice d'application

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$: x↦f(x)=$\frac{1}{2x+1}$ est injective.

e. Remarque

La propriété ci-dessus est équivalente à celle-ci : Une application numérique à variable réelle $f : E \to F$ est injective si et seulement si pour tous réels x et x' de E, on a : Si $x \neq x'$ alors $f(x) \neq f(x')$. Ces deux propriétés sont dites contraposées.

2. Application surjective

a. Définition

Une application $f : E \to F$ est dite surjective (ou bien est dite une surjection) si tout élément de F a au moins un (1 ou plusieurs) antécédent (s) dans E.

b. Exemple

L'application f : $E \to F$ définie par le diagramme sagittal ci-dessous est surjective.

c. Contre-exemple

L'application f : $E \to F$ de l'activité 1 n'est pas surjective car l'élément Espagnol ou l'élément arabe de F n'ont pas un ou plusieurs antécédents dans E.

d. Propriété

Une application numérique à variable réelle $f : E \to F$ est surjective si et seulement si pour tout réel y de F, l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue x) admet au moins une (une ou plusieurs) solution (s) dans E.

Exemple

Montrons que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = 2x + 1$ est surjective.

Exercice d'application

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[: x \mapsto f(x) = x^2$ est surjective.

3. Application bijective

a. Définition

Une application $f : E \to F$ est dite bijective (ou bien est dite une bijection) si tout élément de F a un et un seul antécédent dans E.

b. Exemple

L'application $f : E \to F$ définie par le diagramme sagittal ci-dessous est bijective.

c. Contre-exemple

L'application $f : E \to F$ de l'activité 1 n'est pas bijective car l'élément Maths ou les éléments Espagnol et arabe de F n'ont pas un et un seul antécédent dans E.

d. Remarque

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

e. Propriété

Une application numérique à variable réelle $f : E \to F$ est bijective si et seulement si pour tout réel y de F, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet une et une seule solution dans E.

Exemple

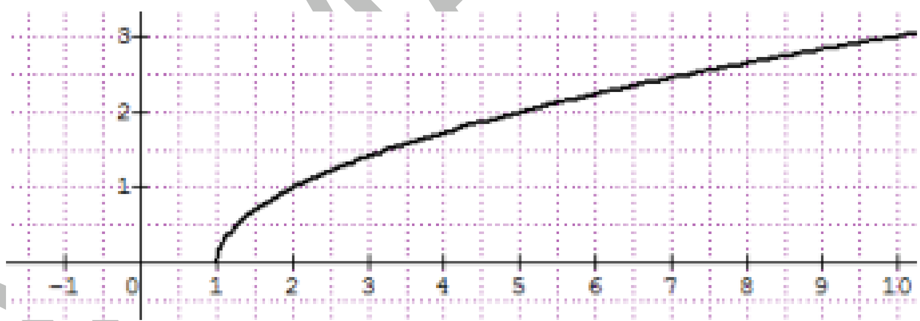
Montrons que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = 2x + 1$ est bijective.

f. Reconnaitre graphiquement une bijection

Soit $f : E \to F$ est une application numérique à variable réelle et C_f sa courbe dans un repère (O, I, J). f est bijective si et seulement pour tout réel b de F, la droite d'équation $y = b$ coupe C_f en un et un seul point.

Exemple

La courbe (C_f) ci-dessous est celle d'une application $f : [1; 10] \to [0; 3]$.



Elle est bijective car pour tout $b \in [0; 3]$, la droite $y = b$ coupe (C_f) en un et un seul point.

g. Application réciproque d'une bijection

- **Théorème-définition**

Soit $f : E \to F$ une bijection. Donc tout élément y de F a un et un seul antécédent x par f dans E. Ainsi, on peut définir une application notée f^{-1} de F dans E qui à tout élément y de F associe son antécédent x par f c'est-à-dire, l'image d'un élément y de F par l'application f^{-1} est son antécédent x par f. Autrement dit : $f^{-1} : F \to E : y \mapsto f^{-1}(y) = x$ avec $y = f(x)$. L'application f^{-1} est une bijection dite bijection réciproque de f^{-1}.

- **Remarque**

Si $f: E \to F$ une bijection et $f^{-1}: F \to E$ sa bijection réciproque alors pour tout x dans E et pour tout y dans F, on a : $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

- **Exemple**

Montrons que $f: [-1; +\infty[\to [0; +\infty[: x \mapsto f(x) = \sqrt{x+1}$ est bijective puis déterminons sa bijection réciproque.

IV. Restriction d'une application

1. Définition

Soit $f: E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E. La restriction de f à A est l'application que l'on peut appeler g définie par : $g: A \to F: x \mapsto g(x) = f(x)$.

2. Exemples

- La restriction l'application $f: E \to F$ de l'activité 1 à $A = \{M.Fall; M.Sarr\}$ est l'application dite $g: A \to F$ définie par le diagramme sagittal suivant :
- Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \to f(x) = |x|$. La restriction de f à $[0, +\infty[$ est l'application $g: [0, +\infty[\to \mathbb{R}: x \mapsto g(x) = |x| = x$

Chapitre 4 : Barycentre de quatre points pondérés dans le plan

Durée : 6h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition du barycentre de quatre points pondérés ;
- ✓ Restituer les relations vectorielles caractérisant le barycentre de quatre points pondérés;
- ✓ Réduire un vecteur du type $\vec{v} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + d\overrightarrow{MD}$: a, b, c et d sont des réels;
- ✓ Construire, s'il existe, le barycentre de quatre points pondérés ;
- ✓ Déterminer le centre d'inertie d'une plaque homogène simple, d'un disque évidé d'un autre disque, d'un disque évidé d'une figure simple.

Prérequis :

- ✓ Barycentre de deux points et de trois points pondérés.

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;
- ✓ CIAM 1 SE ;
- ✓ Cours de Demoulin ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

I. Rappels et compléments sur les vecteurs du plan

1. **Propriété (Axiome d'Euclide)**
2. **Opérations sur les vecteurs**
   - ✓ **Addition de deux vecteurs**
   - ✓ **Multiplication d'un vecteur par un réel**
   - ✓ **Différence de deux vecteurs**
3. **Colinéarité de vecteurs non nuls**
   - ✓ **Définition**
   - ✓ **Remarque**
   - ✓ **Théorème**

II. Barycentre de quatre points pondérés

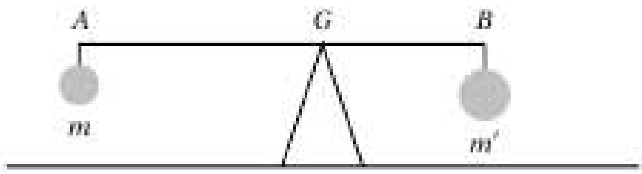
1. **Théorème-définition**
2. **Propriétés du barycentre**
   - ✓ **Homogénéité du barycentre**
   - ✓ **Associativité du barycentre**
3. **Réduction du vecteur $\overrightarrow{V_M} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + d\overrightarrow{MD}$**
4. **Centre d'inertie d'une plaque homogène**
   - ✓ **Définition d'une plaque homogène**
   - ✓ **Centre d'inertie d'une plaque homogène**
   - ✓ **Propriétés**
   - ✓ **Exemple**

Déroulement du chapitre

Introduction (Orale)

La notion de barycentre n'est pas une notion nouvelle pour l'élève de première S car elle a été vue en classe de seconde S. Donc ici, il ne s'agit pas de refaire le cours de seconde mais plutôt d'étendre le barycentre de deux points et de trois points pondérés déjà vus au barycentre de quatre points pondérés.

La notion de barycentre (qui vient du grec barus qui signifie : lourd, massif) a été introduite par Archimède au 3ième siècle avant notre ère alors qu'il s'intéressait à l'équilibre des leviers. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il aurait prononcé la célèbre phrase : « Donnez-moi un point d'appui, je soulèverai le monde ». Archimède apporta une solution au problème simple suivant :



Sur une tige de masse négligeable, on suspend deux masses m et m' en A et en B. Comment positionner le pivot G pour que l'ensemble soit en équilibre ?

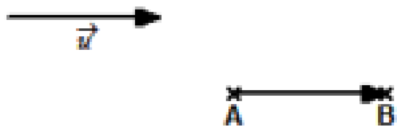
Les barycentres sont donc considérés d'un point de vue physique et concret. Il faut attendre le 19ième siècle pour les considérer d'un point de vue purement mathématique. Le mathématicien August Ferdinand Möbius, dans son mémoire de 1827, utilise des systèmes de points auxquels il affecte un coefficient pouvant être aussi bien positif que négatif. La notion de barycentre devient alors indépendante de la physique.

Toute notion géométrique, aussi importante soit-elle ne l'est pas seulement pour elle-même. Ainsi la notion de barycentre joue un rôle important en géométrie (permet de régler des problèmes liés à l'alignement de points, aux concours de droites….) mais aussi dans d'autres disciplines telles que les sciences physiques (problèmes d'équilibre de balance, détermination de centre d'inertie), la statistique (calcul de la moyenne), la colorimétrie….

I. Rappels et compléments sur les vecteurs du plan

1. Propriété (Axiome d'Euclide)

Si $\vec{u}$ est un vecteur et A un point fixé alors il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



2. Opérations sur les vecteurs

✓ **Addition de deux vecteurs**

- **Propriété-définition**

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et A un point fixé alors d'après la propriété précédente, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Selon toujours cette propriété, il existe un unique point C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Par définition, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est noté $\vec{u} + \vec{v}$. On a alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Ainsi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ **(Relation de Chasles).**

✓ **Multiplication d'un vecteur par un réel**

- **Définition**

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. Le produit du réel k par le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $k\vec{u}$ et défini par :

❖ Si $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$

❖ Si $k \neq 0$ alors $k\vec{u}$ est le vecteur qui a :

h. pour direction : celle de $\vec{u}$

i. pour sens : $\begin{cases} \text{celui de } \vec{u} \text{ si } k > 0 \\ \text{le sens contraire de } \vec{u} \text{ si } k < 0 \end{cases}$

j. pour norme : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

- **Opposé d'un vecteur**

Le produit du réel -1 par le vecteur $\vec{u}$ est noté $-\vec{u}$ et est appelé opposé du vecteur $\vec{u}$ et on a :$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.

✓ **Différence de deux vecteurs**

La différence de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre est la somme du premier et de l'opposé du second. Elle est notée $\vec{u}$-$\vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

3. Colinéarité de vecteurs non nuls

✓ **Définition**

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (sont de même direction) si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

- ✓ **Remarque**

Par convention, le vecteur nul $(\vec{0})$ est colinéaire à tous les vecteurs.

- ✓ **Théorème**

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou encore s'il existe un réel k' non nul tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$).

II. Barycentre de quatre points pondérés

1. Théorème-définition

Si $\alpha,\ \beta, \gamma\ et\ \delta$ sont des réels donnés tels que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ et si A, B, C et D sont des points donnés du plan alors il existe un unique point G vérifiant $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} + \delta\,\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (1).

L'unique point G vérifiant $\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} + \delta\,\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ est appelé barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ \alpha); (B,\ \beta); (C,\ \gamma); (D, \delta)\}$.

On note $G = bary\{(A,\ \alpha); (B,\ \beta); (C,\ \gamma); (D, \delta)\}$

Preuve :

Cherchons un point G vérifiant la relation (1)

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} + \gamma\,\overrightarrow{GC} + \delta\,\overrightarrow{GD} = \vec{0} \iff \alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) + \delta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}\right) = \vec{0}$$

$$\iff (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} + \delta\,\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\iff -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{AG} = -\beta\,\overrightarrow{AB} - \gamma\,\overrightarrow{AC} - \delta\,\overrightarrow{AD}$$

$$\iff (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{AG} = \beta\,\overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{AC} + \delta\,\overrightarrow{AD}$$

Or $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ donc (1) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AD}$

Posons $\vec{u} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AD}$. Ainsi (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \vec{u}$.

Comme les réels α, β, γ *et* δ et les points A, B, C et D sont donnés alors $\vec{u}$ est un vecteur fixe. Ainsi $\vec{u}$ est un vecteur donné et A est un point du plan donc d'après l'axiome d'Euclide, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \vec{u}$. Par suite le point G cherché est l'unique point vérifiant la relation $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{AD}$ (2)

✓ **Remarques**

❖ On montre aussi que G vérifie les trois relations suivantes :

- $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BC} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{BD}$ (3)
- $\overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CB} + \frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{CD}$ (4)
- $\overrightarrow{DG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{DA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{DB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}\overrightarrow{DC}$ (5)

❖ Chacune des relations (2), (3), (4) et (5) permet de construire vectoriellement le barycentre G du système de points pondérés $\{(A,\ \alpha); (B,\ \beta); (C,\ \gamma)(D, \delta)\}$.

❖ Si $\alpha \neq 0$ alors $G = bary\{(A,\ \alpha); (B,\ \alpha); (C,\ \alpha); (D, \alpha)\}$ est dit isobarycentre des points A, B, C et D.

✓ **Exercice d'application**

Soit ABCD un parallélogramme tel que $AB = 4cm$ et $BC = 3cm$ et

$G = \text{bary}\{(A,\ 1); (B,\ 2); (C,\ 3); (D, -2)\}$. Construire ABCD et G.

2. Propriétés du barycentre

✓ **Homogénéité du barycentre**

Si $G = \text{bary}\{(A,\ \alpha); (B,\ \beta); (C,\ \gamma); (D, \delta)\}$ et si k est un réel non nul alors $G = \text{bary}\{(A,\ k\alpha); (B,\ k\beta); (C,\ k\gamma); (D, k\delta)\}$. Cette propriété est appelée homogénéité du barycentre.

Oralement : On dit que le barycentre d'un système de quatre points pondérés reste inchangé si on multiplie chacun des coefficients des quatre points par un même réel non nul.

Preuve : (exo à faire sur feuille)

❖ **Cas particuliers**

Si G est l'isobarycentre des points A, B, C et D alors $G = \text{bary}\{(A,\ 1); (B,\ 1); (C,\ 1); (D, 1)\}$

Preuve

Si G est l'isobarycentre des points A, B, C et D alors $G = \text{bary}\{(A,\ \alpha); (B,\ \alpha); (C,\ \alpha); (D, \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$. Comme $\alpha \neq 0$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est un réel non nul et donc d'après la propriété d'homogénéité, on a : $G = \text{bary}\left\{\left(A;\ \frac{1}{\alpha}\times\alpha\right); \left(B;\ \frac{1}{\alpha}\times\alpha\right); \left(C;\ \frac{1}{\alpha}\times\alpha\right); \left(D;\ \frac{1}{\alpha}\times\ \alpha\right)\right\} = \text{bary}\{(A,\ 1); (B,\ 1); (C,\ 1); (D, 1)\}$.

- ✓ **Associativité du barycentre**

Exemple : Soit $G = \text{bary}\{(A, -1); (B,\ 2); (C, -1); (D, 3)\}$

Le système $\{(A, -1); (B,\ 2)\}$ admet un barycentre car $-1 + 2 \neq 0$.

Donc soit $I = bary\{(A, -1); (B,\ 2)\}$. De même soit $J = bary\{(C, -1); (D,\ 3)\}$.

Les points I et J sont dits barycentre partiels.

$$G = \text{bary}\{(A, -1); (B,\ 2); (C, -1); (D, 3)\} \Leftrightarrow -\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JC}) + 3(\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\ -\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{GJ} + 3\overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JD} = \vec{0}$$

Or $I = \text{bary}\{(A, -1); (B,\ 2)\}$ et $J = \text{bary}\{(C, -1); (D,\ 3)\}$ donc $-\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JD} = \vec{0}$

Ainsi $\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$.

Par suite $G = bary\{(I, 1); (J,\ 2)\} = bary\{(I, -1 + 2); (J, -1 + 3)\}$. Ainsi G est le barycentre du système formé par les barycentres partiels, chacun d'eux étant affecté affectés de la somme des coefficients de ses points.

En généralisant ce résultat, on retiendra que si G est le barycentre d'un système de 4 points alors on peut regrouper des points dont la somme des coefficients est non nulle et les remplacer par leur barycentre partiel affecté de cette somme. Cette propriété est dite associativité du barycentre.

3. **Réduction du vecteur $\overrightarrow{V_M} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD}$**

Soit $\alpha,\ \beta, \gamma$ et δ des réels donnés, A, B, C et D des points fixés du plan et M est un point quelconque du plan. L'objet de cette partie est de donner une écriture réduite du vecteur $\boldsymbol{\overrightarrow{V_M} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD}}$.

- ✓ **1^er cas :** $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0}$

$\overrightarrow{V_M} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) + \delta(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD})$

$= \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \gamma\overrightarrow{MA} + \boldsymbol{\delta}\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} + \delta\overrightarrow{AD}$

$= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} + \delta\overrightarrow{AD}$ or $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ donc $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MA} = \vec{0}$

Par suite $\overrightarrow{V_M} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} + \delta\overrightarrow{AD}$. Ainsi pour tout point M du plan, $\overrightarrow{V_M}$ est indépendant de M donc $\overrightarrow{V_M}$ est un vecteur constant.

De la même manière on montre que $\overrightarrow{V_M} = \alpha\overrightarrow{BA} + \gamma\overrightarrow{BC} + \delta\overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} + \delta\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} + \gamma\overrightarrow{DC}$.

- ✓ **1^er cas :** $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0}$

Comme $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ alors soit $G = \text{bary}\{(A,\ \alpha); (B,\ \beta); (C,\ \gamma); (D, \delta)\}$

$\overrightarrow{V_M} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \delta\overrightarrow{MD} = \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + \delta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})$

$= \alpha\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{MG} + \boldsymbol{\delta}\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD}$

$= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD}$ or $G = \text{bary}\{(A,\ \alpha); (B,\ \beta); (C,\ \gamma); (D, \delta)\}$ donc

$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{V_M} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG}$. Par suite $\overrightarrow{V_M}$ est un vecteur qui dépend de M.

- ✓ **Exercice d'application**

$\vec{U} = -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD}$ et $\vec{V} = 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}$. Réduire $\vec{U}$ et $\vec{V}$

4. Centre d'inertie d'une plaque homogène

- ✓ **Définition d'une plaque homogène**

Une plaque homogène est un solide dont l'épaisseur est négligeable et dont la masse est uniformément répartie. Autrement dit la masse de toute portion de la plaque est proportionnelle à son aire.

- **Centre d'inertie d'une plaque homogène**

Le centre d'inertie d'une plaque homogène est l'isobarycentre de tous les points de la plaque. C'est donc un barycentre d'une infinité de points. Cependant il est souvent facile de construire le centre d'inertie d'une plaque homogène grâce aux propriétés admises suivantes :

- **Propriétés** Soit P une plaque homogène

P_1) Si P est une tige alors son centre d'inertie est son milieu.

P_2) Si P est triangulaire alors son centre d'inertie est son centre de gravité.

P_3) Si P admet un centre de symétrie alors le centre d'inertie est son centre de symétrie.

P_4) Si P admet un axe de symétrie alors son centre d'inertie est sur cet axe de symétrie.

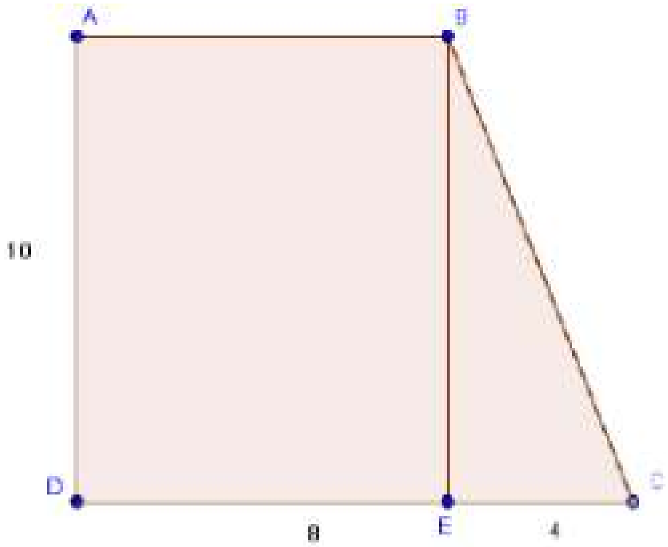
P_5) Si $\mathcal{P}$ est la réunion de deux plaques $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de centre d'inertie respective G_1 et G_2 et d'aire respective $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ alors le centre d'inertie G de la plaque $\mathcal{P}$ est :

$G = bary\{(G_1, \mathcal{A}_1); (G_2, \mathcal{A}_2)\}$.

P_6) Si P est formée d'une plaque $\mathcal{P}_1$ de centre d'inertie G_1 et d'aire $\mathcal{A}_1$ dont on enlève une plaque $\mathcal{P}_2$ de centre d'inertie G_2 et d'aire $\mathcal{A}_2$ alors le centre d'inertie G est $G = bary\{(G_1, \mathcal{A}_1); (G_2, -\mathcal{A}_2)\}$.

- **Exemple**

Considérons la plaque homogène trapézoïdale ABCD suivante :



1. Construire le centre d'inertie de la plaque ABED puis celui de BCE.
2. En déduire la construction de la plaque ABCD.

Chapitre 3: Fonctions numériques à variable réelle

Durée : 6h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition de fonction ;
- ✓ Restituer la notation d'une fonction dont les ensembles départ et d'arrivée sont donnés ;
- ✓ déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ;
- ✓ Déterminer la restriction d'une fonction à un intervalle donné ;
- ✓ Montrer que deux fonctions sont égales ;
- ✓ Déterminer la somme, le produit et le quotient de deux fonctions ;
- ✓ Calculer $(g \circ f)(x)$ lorsque les expressions de f(x) et de g(x) sont données ;
- ✓ Ecrire f(x) sous la forme $(u \circ v)(x)$ où u(x) et v(x) sont les expressions de fonctions usuelles ;
- ✓ Montrer qu'une fonction est majorée, minorée et bornée sur un intervalle ;
- ✓ Montrer qu'une fonction admet des extrémums sur un intervalle.

Prérequis :

- ✓ Définition d'une application.
- ✓ Résolution d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}$.
- ✓ Calculer avec des expressions littérales.

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;
- ✓ CIAM 1 SE ;
- ✓ Mon cours de première S2 au lycée Kennedy ;
- ✓ Nouveau fractale 2nde ;
- ✓ Fractale Maths 2nde ;
- ✓ Collection perspective 2e ;
- ✓ CIAM 2nd S ;
- ✓ Collection Mathématiques seconde ;
- ✓ Hachettes classiques 1ere A1 et B ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

Déroulement du cours

Introduction orale

Dans le langage courant, le mot fonction peut avoir plusieurs significations : rôle, utilité d'un élément dans un ensemble (fonction d'un mot dans une phrase), profession (exercice d'une charge, d'un emploi), activité propre à un appareil, à un ensemble (la fonction digestive). En mathématiques, il fait allusion à une grandeur dépendant d'une ou de plusieurs autres grandeurs variables. Par exemple, on peut exprimer l'aire d'un cercle en fonction de son rayon et le périmètre d'un carré en fonction de son côté. Ainsi l'étude d'une grandeur qui dépend d'une autre ou de plusieurs autres grandeurs met en évidence la notion de fonction.

Du point de vue, historique, déjà dans l'antiquité, les babyloniens utilisaient implicitement les fonctions dans leurs tables de carrées, de cubes et de racines carrées qu'ils établissaient pour les astronomes.

Au 14 ème siècle, Nicole Oresme (mathématicien, physicien, philosophe, astronome, musicologue, traducteur, théologien et économiste français) a exprimé la vitesse en fonction du temps mais le terme fonction est utilisé pour la première fois par René Descartes (mathématicien, physicien et philosophe français) en 1637. La définition précise d'une fonction peut être attribuée à Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (mathématicien allemand). Au 19 ème siècle, l'apparition de la théorie des ensembles a permis de préciser davantage la notion de fonction et a permis de déboucher sur la notion d'application.

La notion de fonction est très importante au sein même des mathématiques (elle est utilisée à tous les niveaux implicitement ou explicitement.) En sciences physiques, elle est aussi utilisée.

I. Notion de fonction

1. Activité

Soit $E = \{1; 2;\ 0; -\sqrt{2}\}$ et $F = \left\{\frac{1}{2}; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 4\right\}$. f est le procédé de E vers F qui à chaque élément de E associe son inverse.

a. Donner le diagramme sagittal de f.

b. f est-elle une application de E dans F ? Justifier.

c. Décrire le procédé f.

Exploitation :

a. Graphique.

b. f n'est pas une application car l'élément 0 de E n'a pas d'image par f.

c. f est un procédé de E vers F qui à chaque élément E associe au plus un (0 ou 1) élément de F. Le procédé f est dit fonction de E vers F.

Par cette fonction, l'image de 1 est $f(1) = 1$, l'image de 2 est $f(2) = \frac{1}{2}$, l'image de $-\sqrt{2}$ est $f(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et 0 n'a pas d'image.

2. Définition, vocabulaire et notation

Soit E et F deux ensembles non vides quelconques. Un procédé f de E (ensemble de départ) vers F (ensemble d'arrivée) qui associe à chaque élément de E au plus un (0 ou 1) élément de F est dit fonction. On note $f: E \to F: x \mapsto f(x)$.

$f(x)$ (s'il existe) est dit image de x par f et x est dit antécédent de $f(x)$ par f.

3. Exemples

i. Le procédé f défini dans l'activité ci-dessus est une fonction de E vers F.

ii. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

4. Remarques

- Si $f: E \to F$ est une fonction alors un élément de E peut ne pas avoir d'image par f. Cependant, si un élément de E a une image par f alors cette image est unique.
- Toute application de E dans F est une fonction de E vers F mais une fonction de E vers F peut ne pas être une application de E dans F.
- Si les éléments de E et de F sont des réels alors une fonction $f: E \to F$ est dite fonction numérique à variable réelle.

III. Fonctions numériques à variable réelle

1. Ensemble de définition d'une fonction

a. Définition et exemple

Soit $f: E \to F$ une fonction quelconque. L'ensemble de définition (ou domaine de définition) de f noté D_f est l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f. Par exemple, pour la fonction f de l'activité, $D_f = \{1; 2; -\sqrt{2}\}$.

b. Remarque

- Une fonction $f: E \to F$ est une application si et seulement si $D_f = E$.

c. Ensemble de définition de fonctions usuelles

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	**Ensemble de définition D_f**	**Nom de la fonction f**
$f(x) = c$ où $c = cste$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction constante
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction identité
$f(x) = ax + b$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction affine
$f(x) = x^2$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction carrée
$f(x) = x^3$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction cubique
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	Fonction inverse
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = [0; +\infty[= \mathbb{R}^+$	Fonction racine carrée
$f(x) = \|x\|$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction valeur absolue

d. Propriété

Soit f une fonction numérique à variable réelle. Pour déterminer D_f :

On repère les « suspects » dans l'expression de $f(x)$ (dénominateurs et radicandes où figure la variable x), on exige à ce que chaque dénominateur soit différent de zéro et à ce que chaque radicande soit positif puis on résout le système formé par ces différentes conditions obtenues. Ainsi D_f est égal à :

a) l'ensemble des solutions du système résolu si l'ensemble de départ de f est $\mathbb{R}$.
b) l'intersection de l'ensemble de départ de f et de l'ensemble des solutions du système résolu si l'ensemble de départ n'est pas $\mathbb{R}$.

e. Exercice d'application

Déterminer D_f dans chacun des cas suivants :

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$
2. $f: [0; 3] \to \mathbb{R}: f(x) = \sqrt{2x-1}$

f. Remarque

Si f est une fonction polynôme alors D_f est égal à son ensemble de *départ*.

2. **Restriction d'une fonction à un intervalle**

   a. **Définition :** Soit f: E→F une fonction et A un sous-ensemble de E. La restriction de f à A est la fonction que l'on peut noter g : A →F telle que pour tout x dans A, $g(x) = f(x)$.

   b. **Exemple :** Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$ Déterminons la restriction g de f à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

3. **Egalité de deux fonctions**

   a. **Définition :** Soient $f: E \to F$ et $g: E \to F'$ deux fonctions. f et g sont égales (on note $f = g$) si $D_f = D_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout x dans D_f.

   b. **Exemple :** $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}: f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$ et $g: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}: g(x) = x + 1$. Montrons que $f = g$.

4. **Opérations sur les fonctions**

   a. **Définitions :** Soient f :E→F et g :E→F deux fonctions numériques à variable réelle.

- La somme de f et g est la fonction notée $f + g$: E→F et définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x dans E.
- La différence de f et g dans cet ordre est la fonction notée $f - g$: E → F et définie par $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ pour tout x dans E.
- Le produit de f par g est la fonction notée fg: E → F et définie par $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pour tout x dans E.
- Le quotient de f par g est la fonction notée $\frac{f}{g}$: E → F et définie par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pour tout x dans E.

   b. **Exemple :** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 3$. Déterminons $f + g$

5. **Composée de deux fonctions**

   a. **Définitions**

- Soient f : E → F et g : F → G deux fonctions. La composée de f par g est la fonction notée $g \circ f$ (on lit g rond f) et définie par $g \circ f: E \to G$ telle que pour tout x dans E, $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Par exemple soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = x - 1$ et $g: \mathbb{R} \to [0; +\infty[: g(x) = x^2$. Déterminons $g \circ f$.

- Soit $f: E \to F$ et $g: G \to E$ deux fonctions. La composée de g par f est la fonction notée $f \circ g$ (on lit f rond g) et définie par $f \circ g: G \to F$ telle que pour tout x dans G, $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Par exemple soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = x - 1$ et : $[0; +\infty[\to \mathbb{R}: g(x) = x^2$. Déterminons $f \circ g$.

b. Ensemble définition de la composée de deux fonctions :

Propriétés

- Si f et g sont deux fonctions alors $(g \circ f)(x)$ existe ssi $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$
- Si f et g sont deux fonctions alors $(f \circ g)(x)$ existe ssi $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$

Exemple

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \mathrm{f(x)} = 2\mathrm{x} + 1$ et $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \mathrm{g(x)} = \sqrt{x}$. Sans calculer $(g \circ f)(x)$, déterminons $D_{g\circ f}$.

6. Sens de variation d'une fonction

Soit $f: E \to F$ une fonction numérique à variable réelle et I un intervalle inclus dans D_f.

a. Fonction croissante ou strictement croissante

- f est croissante sur I si pour tous réels $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2, on\ a: f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est strictement croissante sur I si pour tous réels $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2, on\ a: f(x_1) < f(x_2)$.
- **Exemple** : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \mathrm{x} \mapsto \mathrm{f(x)} = x^2$. Montrons que f est croissante sur $[0, +\infty[$

b. Fonction décroissante ou strictement décroissante

- f est décroissante sur I si pour tous réels $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2, on\ a: f(x_1) \geq f(x_2)$.
- f est strictement décroissante sur I si pour tous réels $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2, on\ a: f(x_1) > f(x_2)$.
- **Exemple** : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \mathrm{x} \mapsto \mathrm{f(x)} = \frac{1}{x}$. Montrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$

c. Fonction constante

f est constante sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$, on a : $f(x_1) = f(x_2)$.

d. Remarques

- Etudier le sens de variations (ou plus simplement étudier les variations) d'une fonction f sur un intervalle I, c'est étudier si f est croissante ou décroissante sur I.

- Une fonction f est dite monotone (respectivement strictement monotone) sur un intervalle I si f est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante) sur I.
- Il existe des fonctions qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes ni constantes sur un intervalle I.

7. **Majoration, minoration et extrémum :** Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction et I un intervalle inclus dans D_f.

   a. **Fonction majorée**

f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. Dans ce cas M est dit majorant de f sur I.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 2x - 4$. Montrons que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

   b. **Fonction minorée**

f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$. Dans ce cas m est dit minorant de f sur I.

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2x - 4$. Montrons que f est minorée sur $\mathbb{R}$.

   c. **Fonction bornée**

f est bornée sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I c'est-à-dire s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$, m $\leq f(x) \leq M$.

   d. **Extrémum d'une fonction**

Soit a un élément de I

- **Maximum relatif ou local**

f admet un maximum relatif en a sur I si pour tout $\in I, on\ a$: $f(x) \leq f(a)$. Dans ce cas, $f(a)$ est la valeur de ce maximum.

Exemple

Soit f définie par $f(x) = x^2 + 2x - 4$. Montrons que f admet un maximum relatif en 2 sur l'intervalle $[-4; 2]$.

- **Minimum relatif ou local**

f admet un minimum relatif en a sur I si pour tout $x \in I, on\ a$: $f(x) \geq f(a)$. Dans ce cas, $f(a)$ est la valeur de ce minimum.

Remarques

- Si pour tout $x \in D_f$, on a : $f(x) \leq f(a)$ alors f admet un maximum absolu en a et f(a) est la valeur de ce maximum absolu.
- Si pour tout $x \in D_f$, on a : $f(x) \geq f(a)$ alors f admet un minimum absolu en a et f(a) est la valeur de ce minimum absolu.

- **Extrémum**

Un maximum relatif (respectivement maximum absolu) ou un minimum relatif (respectivement minimum absolu) est dit extrémum relatif (respectivement extrémum absolu).

Chapitre 6 : Généralités sur les fonctions numériques à variable réelle

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Déterminer la parité d'une fonction ;
- ✓ Faire le lien entre la parité d'une fonction et la symétrie de sa courbe ;
- ✓ Construire, à partir de la représentation graphique d'une fonction, celles des fonctions qui lui sont associées ;
- ✓ Démontrer qu'une droite est un axe de symétrie de la courbe d'une fonction ;
- ✓ Démontrer qu'un point est un centre de symétrie de la courbe d'une fonction ;

- ✓ Construire la courbe de la réciproque d'une fonction bijective.

Prérequis :

- ✓ Fonctions numériques d'une variable réelle.

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;
- ✓ Mon cours de première S2 au lycée Kennedy

Plan du chapitre

Déroulement du cours

Dans tout ce chapitre, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé, f est une fonction numérique à variable réelle x.

I. Eléments de symétrie de la courbe d'une fonction

1. Courbe représentative d'une fonction

a. **Définition :** La courbe représentative de f dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, notée C_f est l'ensemble des points $M\binom{x}{y}$ tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$. L'égalité $y = f(x)$ est dite équation de C_f.

b. **Exemple :** Soit $(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

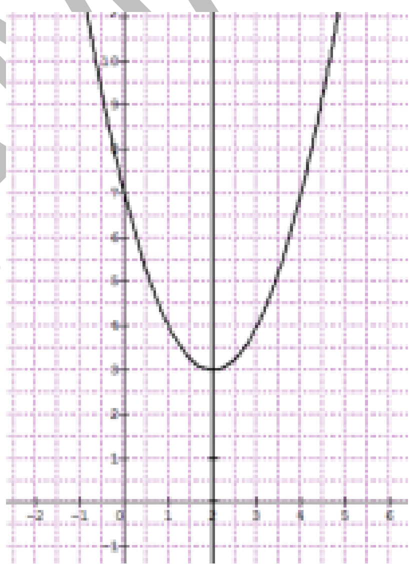
Les points $M_1\binom{-1}{0}; M_2\binom{0}{-1}; M_3\binom{1}{2}$ apartiennnent-ils à C_f ? Déterminer le point de C_f d'abscisse -2 puis le point de C_f d'ordonnée 0.

2. Axe de symétrie

a. Définition

Une droite (Δ) est dit axe de symétrie de C_f si le symétrique M' par rapport à (Δ) de tout point M de C_f appartient à C_f.

b. Exemple



Sur la figure ci-dessus, la droite (Δ) est un axe de symétrie de C_f.

c. **Propriété :** Soit (Δ): $x = a$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où a est un réel constant

Si pour tout $x \in D_f$, on a $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$ alors $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de C_f.

Exemple

$f(x) = x^2 - 4x + 7$. Montrons que $(\Delta): x = 2$ est un axe de symétrie de C_f.

$D_f = \mathbb{R}$. Soit $x \in D_f$, on a : $2a - x = 4 - x$

$x \in D_f$ donc $x \in \mathbb{R}$ d'où $4 - x \in \mathbb{R}$. Par suite $2a - x \in D_f$

$f(2a-x) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 7 = f(x)$ d'où $(\Delta): x = 2$ est un axe de symétrie de C_f.

Exercice d'application :

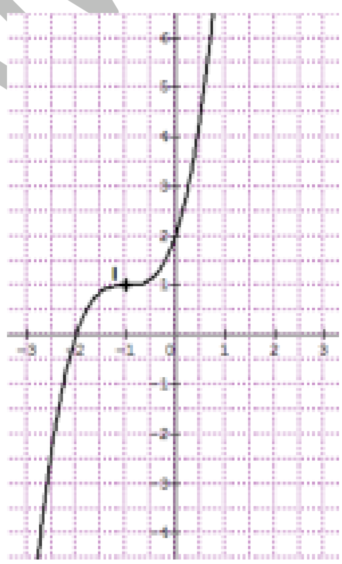
Soit $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + 5$ et $(\mathrm{D}): \mathrm{x} = 3$. Montrer que (D) est un axe de symétrie de C_f.

3. Centre de symétrie

a. Définition

Un point I est un centre de C_f si le symétrique M' par rapport à I de tout point M de C_f appartient à C_f.

b. Exemple



Sur la figure ci-dessus, le point I est un centre de symétrie de C_f

c. **Propriété :** Soit $I\binom{a}{b}$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où a et b sont des réels constants.

Si pour tout $x \in D_f$ on a : $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$ alors $I\binom{a}{b}$ est un centre de symétrie de C_f.

Exemple

$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$. Montrer que $I\binom{-1}{-2}$est un centre de symétrie de C_f.

Exercice d'application

Soit $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-1}$. Montrer que $I(1;3)$ est un centre de symétrie de C_f

II. Parité d'une fonction

1. Ensemble symétrique par rapport à zéro

a. Définition

Un ensemble E de nombres réels est dit symétrique par rapport à zéro si pour tout $x \in E$ alors $-x \in E$.

b. Exemples et contre-exemples

- $\mathbb{R}$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$; $[-a; a]$ et $]-a; a[$ avec $a \in [0; +\infty[$ sont symétriques par rapport à zéro.
- $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ $(a \neq 0)$; $\mathbb{R} \setminus \{a; b\}$ $(b \neq -a)$; $[a; +\infty[$; $]-\infty; a[$ $(a \in \mathbb{R})$ ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

2. Fonction paire

a. Définition

f est dite paire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i. D_f est symétrique par rapport à zéro.
ii. Pour tout $x \in D_f$, on a $f(-x) = f(x)$

b. Exemple

$f(x) = x^2$. Montrons que f est paire.

$D_f = \mathbb{R}$

Si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ donc D_f est symétrique par rapport à zéro.

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Par suite f est paire.

3. Fonction impaire

a. Définition

f est dite impaire si les deux conditions sont vérifiées :

i. D_f est symétrique par rapport à zéro.

ii. Pour tout $x \in D_f$, on a $f(-x) = -f(x)$

b. Exemple

$f(x) = x^3$. Montrons que f est impaire.

$D_f = \mathbb{R}$ donc D_f est symétrique par rapport à zéro

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Par suite f est impaire.

4. Remarque

Une fonction f peut être ni paire ni impaire.

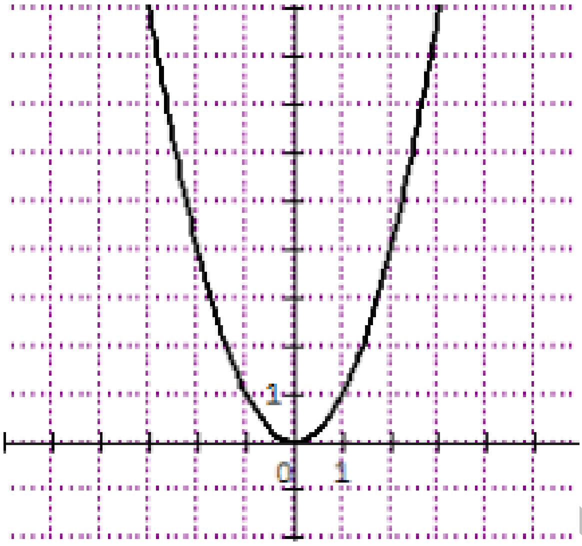
5. Interprétation graphique de la parité

a. Propriété 1

f est paire ssi sa courbe C_f dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Exemple

La fonction carrée ($f(x) = x^2$) est paire donc sa courbe C_f dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Sa courbe est donnée ci-dessous.

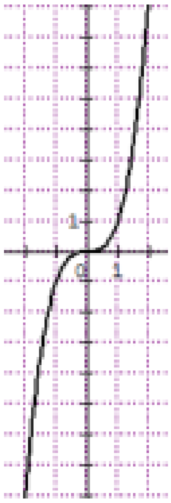


b. Propriété 2

f est impaire ssi sa courbe C_f dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet l'origine O comme centre de symétrie.

Exemple

La fonction cubique $(f(x) = x^3)$ est impaire donc sa courbe dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ admet O comme centre de symétrie. Sa courbe est donnée ci-dessous :



III. Fonctions associées à une fonction

Soit f une fonction, C_f sa courbe dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, a et b des réels constants. Les fonctions g, h, k, l, m, n et p définies respectivement par $g(x) = -f(x); h(x) = f(-x); k(x) = |f(x)|;\ l(x) = f(|x|); m(x) = f(x-a);\ n(x) = f(x) + b;\ p(x) = f(x-a) + b$ sont dites associées à la fonction f.

Si la courbe C_f est donnée dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'objectif de cette partie est de voir comment les courbes $C_g, C_h, C_k, C_l, C_m, C_n$ et C_p peuvent être obtenues dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ à partir de C_f.

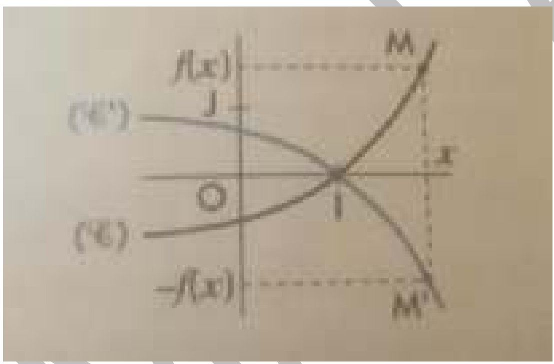
1. **Fonction g telle que $g(x) = -f(x)$**

   a. **Propriété**

Dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les points $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x \\ -f(x) \end{pmatrix} = M'\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

   b. **Exemple**

La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Construisons celle de la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$.



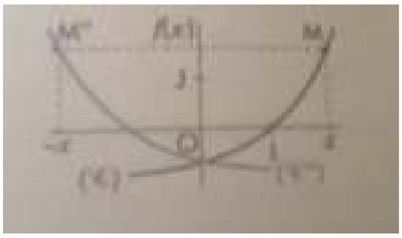
2. **Fonction h telle que $h(x) = f(-x)$**

   a. **Propriété**

Si $h(x) = f(-x)$ alors en posant $t = -x$ on a : $M'\begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix} \in C_h \Leftrightarrow M'\begin{pmatrix} x \\ f(-x) \end{pmatrix} = M'\begin{pmatrix} -t \\ f(t) \end{pmatrix} \in C_h$: $t = -x$ or dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les points $M\begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} -t \\ f(t) \end{pmatrix}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées donc C_f et C_h sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

   b. **Exemple**

La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Construisons celle de la fonction h définie par $h(x) = f(-x)$.



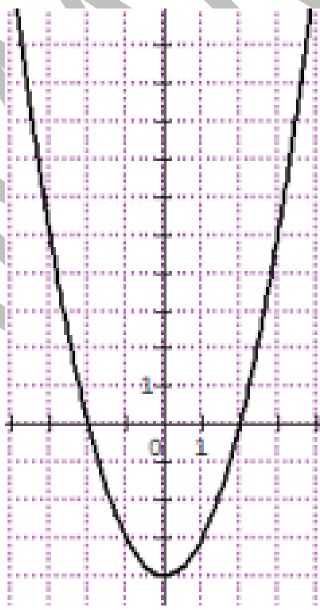
3. **Fonction k telle que $k(x) = |f(x)|$**

   a. **Propriété**

$k(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \; si \; f(x) \geq 0 \\ -f(x) \; si \; f(x) \leq 0 \end{cases}$ donc C_k est obtenue en réunissant la partie de C_f située au-dessus de l'axe des abscisses et le symétrique de la partie de C_f située en dessous de l'axe des abscisses par rapport à l'axe des abscisses.

   b. **Exemple**

La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Construisons celle de la fonction k définie par $k(x) = |f(x)|$.



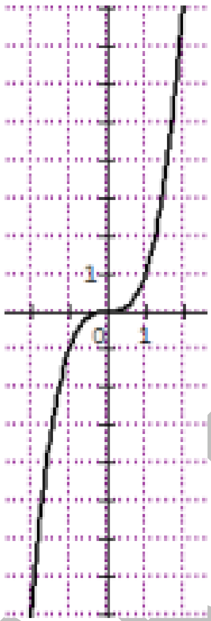
4. **Fonction l telle que $l(x) = f(|x|)$**

   a. **Propriété**

$l(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \; si \; x \geq 0 \\ f(-x) \; si \; x \leq 0 \end{cases}$ donc C_l est obtenue en réunissant la partie de C_f située à droite de l'axe des ordonnées et le symétrique de la partie de C_f située à droite de l'axe des ordonnées par rapport à l'axe des ordonnées.

b. Propriété

La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Construisons celle de la fonction k définie par $l(x) = f(|x|)$



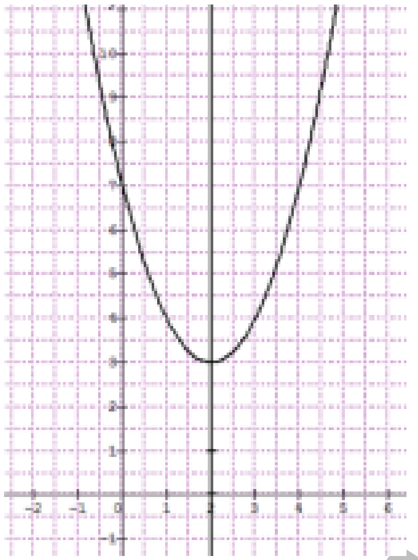
5. Fonction m telle que $\boldsymbol{m(x) = f(x-a)}$

a. Propriété

Si $m(x) = f(x-a)$ alors C_m est le symétrique de C_f par la translation de vecteur $a\vec{\imath}$

b. Exemple

La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Construisons celle de la fonction m définie par $m(x) = f(x-2)$.



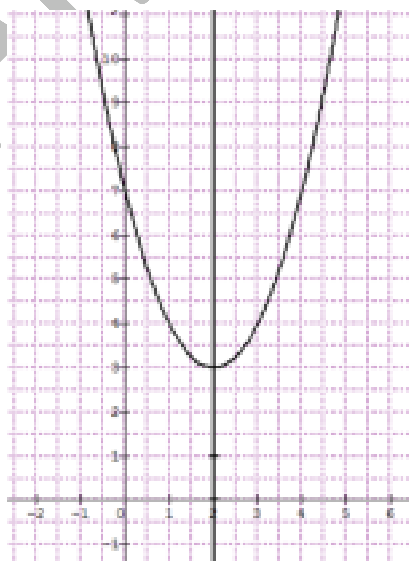
6. **Fonction n telle que $n(x) = f(x) + b$**

   a. **Propriété**

Si $n(x) = f(x) + b$ alors C_n est le symétrique de C_f par la translation de vecteur $b\vec{j}$.

   b. **Exemple**

La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Construisons celle de la fonction n définie par $n(x) = f(x) + 2$.



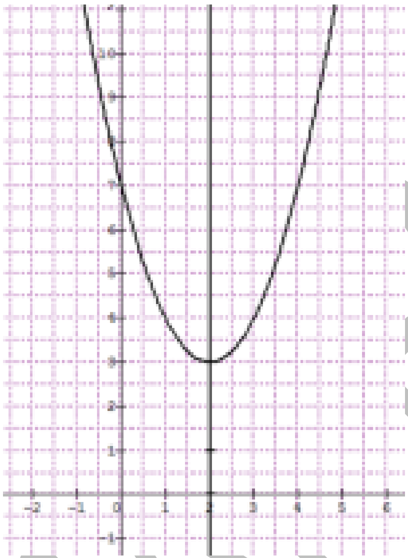
7. **Fonction p telle que $p(x) = f(x - a) + b$**

   a. **Propriété**

Si $p(x) = f(x-a) + b$ alors C_p est obtenue en construisant l'image de C_f par la translation de vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$

b. Exemple

La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Construisons celle de la fonction p définie par $p(x) = f(x-2) + 1$



IV. Courbe de la réciproque d'une fonction bijective

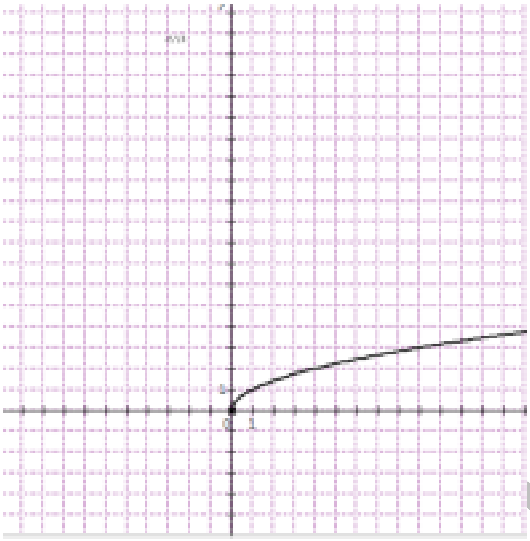
La droite d'équation $y = x$ dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est appelée première bissectrice.

1. Propriété

Si f est une fonction bijective alors la courbe $C_{f^{-1}}$ de la bijection réciproque de f est obtenue en construisant le symétrique de C_f par rapport à la première bissectrice.

2. Exemple

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction bijective f. Construisons $C_{f^{-1}}$



Chapitre 7 : Limites d'une fonction

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer et utiliser les notations des limites ;
- ✓ Restituer et utiliser les théorèmes sur les limites pour calculer :
  - Une limite, une limite à droite et une limite à gauche ;
  - Lever une forme indéterminée.

Prérequis :

- ✓ Fonctions numériques à variable réelle ;

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 1ère SM ;
- ✓ Collection Spirale 1ère SE ;
- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue.

Plan de la leçon

I. **Limites d'une fonction en un point (réel)**
   1) **Limite finie**
      a) **Activité**
      b) **Définition intuitive et notation**

Déroulement du cours

NB : Dans tout le cours les fonctions considérées sont des fonctions numériques à variable réelle.

I. Limite d'une fonction en un point (réel)

1) Limite finie

a) Activité

Soit f telle que $f(x) = x^2$. Soit le tableau suivant :

x	2,99	2,999	2,9999	3,01	3,001	3,0001
f(x)						

1) Les valeurs de x du tableau sont-t-elles proches de quel nombre réel ?
2) Compléter le tableau.

3) Les valeurs de f(x) du tableau sont-t-elles de quel nombre réel?

Exploitation

Nous constatons que si les valeurs de x sont très proches de 3 mais en restant différentes de 3 alors les valeurs de f(x) sont très proches de 9. On dit que la fonction f admet pour limite 9 au point 3 et on note $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$ ou $\lim\limits_{3} f = 9$. On lit « limite de f(x) lorsque x tend vers 3 égale à 9.»

b) Définition intuitive et notation

Une fonction f admet pour limite l∈ ℝ au point a signifie que les valeurs de f(x) peuvent être aussi proches de l que l'on veut à condition que les valeurs de x soient suffisamment proches de a en restant différentes de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$. et on lit : **« limite de f(x) lorsque x tend vers a est égale à l. »**

Remarques

- Nous admettons que si une fonction f admet une limite l au point a alors celle-ci est unique.
- On ne peut parler de limite d'une fonction f au point a que si f est définie sur un intervalle contenant a ou ayant a comme borne.

c) Théorème (admis)

Si f est une fonction polynôme et si a est un point alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

d) Exemple

Soit f telle que $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 7$. Calculons la limite de f quand x tend vers -1. Comme f est une fonction polynôme alors $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2(-1) - 3 + 1 + 7 = 3$.

2) Limites infinies

a) Limite à gauche-limite à droite

Activité

Soit f telle que $f(x) = -\frac{1}{x}$

Complétons le tableau suivant :

x	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	0,01	0,001	0,0001	0,00001
f(x)	100	1000	10000	100000	-100	-1000	-10000	-100000

A partir du tableau, on constate que si les valeurs de x sont très proches de 4 en étant inférieures à 0 alors celles de f(x) sont positives et très grandes. On dit que la limite de f(x) quand x tend vers 0 à gauche est égale à $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x<0}} f(x)$

On constate aussi que si les valeurs de x sont très proches de 0 en étant supérieures à 0 alors celles de f(x) sont négatives et très grandes en valeur absolue. On dit que la limite de f(x) quand x tend vers 4 à droite est égale à $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x>0}} f(x)$

b) **Propriété (admise) : Soit a un point et l un réel ou $\boldsymbol{l} = \pm\infty$**

- Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
- Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ alors f n'admet pas de limite en a.

c) **Asymptote verticale :** Soit a un point.

- **Définition :** Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f dans un repère orthonormé.
- **Exemple :**

Pour $f(x) = -\frac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à C_f dans un repère orthonormé.

II. Limites d'une fonction à l'infini

1) Limite infinie

Activité :

1. Supposons que $f(x) = x^2$. Complétons le tableau suivant

X	-100	-1000	-10000	-100000

f(x)	1000	100000	10000000	1000000000

2. Supposons que $g(x) = -x^2$. Complétons le tableau suivant

X	100	1000	10000	100000
g(x)	-1000	-100000	-10000000	-100000000

D'après le tableau 1 ci-dessus, nous constatons que si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en valeurs absolues en étant négatives alors celles de f(x) sont de plus en plus grandes. On dit que la limite de f quand x tend vers - ∞ est égale à +∞. On note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ tandis qu'avec le tableau 2, on remarque si les valeurs de x sont très grandes alors celles de g(x) deviennent de plus en plus grandes en valeur absolue en étant négatives. On dit que la limite de g quand x tend vers $+\infty$ est égale à $-\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2) **Théorème :** Soit n un entier naturel non nul

a. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

b. $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair} \\ -\infty & \text{si n est impair} \end{cases}$

Exemple

✓ $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$

✓ $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$

3) **Limites finies**

a) **Activité**

Soit f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$. Complétons le tableau suivant :

X	-1000	-10000	-100000	1000	10000	100000
f(x)						

D'après le tableau on constate que si les valeurs de x sont de plus en plus grandes en valeurs absolues mais en étant négatives alors celles de f(x) deviennent de plus en plus proches de 0. On dit que la limite de f(x) quand x tend vers $-\infty$ est 0. On a : $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

D'après le tableau on constate que si les valeurs de x sont de plus en plus grandes alors celles de f(x) deviennent de plus en plus proches de 0. On dit que la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$ est 0. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) Propriété

Si n est un entier naturel alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

c) Asymptote horizontale

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$) où l est un réel alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale de C_f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) dans un repère orthonormé.

Par exemple pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale de C_f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans un repère orthonormé.

4) Remarque

x tend vers $+\infty$ signifie que x prend une valeur supérieure à tout nombre que l'on peut imaginer tandis que x tend vers $-\infty$ signifie que x prend une valeur inférieure à tout nombre que l'on peut imaginer.

III. Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, f et g sont des fonctions, $l, l' \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.

1) Limites d'une somme

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x)$, on peut d'abord calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ et ensuite on utilise le tableau suivant :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x)$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

Remarque :

On dit qu'on a une forme indéterminée si on ne peut avoir immédiatement le résultat. Dans ce cas, on transformera l'écriture de l'expression de la fonction pour lever l'indétermination.

Exemples

Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + \frac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + x^4$

2) Limites d'un produit

Soit α un réel.

a. Limites de $\alpha \times f$

Pour calculer $\lim\limits_{x \to a} \alpha \times f(x)$, on peut calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ puis, on peut utiliser le tableau pour donner $\lim\limits_{x \to a} \alpha \times f(x)$:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \alpha \times f(x)$	$\alpha \times l$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ -\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$

Exemple

- ✓ Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $2 > 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$
- ✓ Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $-2 < 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 = -\infty$

b. Limites de $f \times g$

Pour calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x)$, on peut d'abord calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ et ensuite utiliser le tableau suivant pour donner $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x)$:

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l> 0	l> 0	l< 0	l< 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x\to a} f(x) \times g(x)$	l×l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Forme indéterminée**

3) Limites de $\sqrt{f}$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$, on peut d'abord calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ puis utiliser le tableau suivant pour donner $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}$:

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l > 0$	$+\infty$
$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}$	$\sqrt{l}$	$+\infty$

Exemples

- ✓ Calculons $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{2x+5}$; $\lim\limits_{x\to -1} 2x+5 = 2(-1)+5 = 3$ donc $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{2x+5} = \sqrt{3}$
- ✓ Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x} = +\infty$

4) Limites d'un quotient

α est un réel.

a. Limites de $\frac{\alpha}{f}$

Pour calculer $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{f(x)}$, on peut calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ puis utiliser le tableau suivant pour donner $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{f(x)}$.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{f(x)}$	$\frac{\alpha}{l}$	0	$\pm\infty$

Remarque

Dans le cas où $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, on étudie le signe de f(x) pour les x à gauche puis pour les x à droite de a puis on calculera éventuellement les limites à gauche puis à droite de f en a.

Exemple

- ✓ Calculons $\lim\limits_{x \to -1} \frac{-2}{x+1}$
- ✓ Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x}$

b. Limites de $\frac{f}{g}$

Pour calculer $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, on peut d'abord calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ puis $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ et ensuite utiliser l'un des tableaux suivants pour donner $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

- **Cas où la limite de g est non nulle**

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	∞
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Forme indéterminée**

- **Cas où la limite de g est nulle**

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**Forme indéterminée**

5) Théorèmes

Théorème 1 : La limite à l'infini d'un polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme le plus haut degré.

Exemple

- ✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 3x^2 - x + 7 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$
- ✓ $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 - 3x^2 - x + 7 = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

Théorème 2 : La limite à l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite à l'infini du monôme le plus haut degré de son numérateur sur le monôme le plus haut degré de son dénominateur.

Exemple

- ✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

Chapitre 8 : Continuité d'une fonction

Durée : 6h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Démontrer qu'une fonction est continue en un point ;
- ✓ Démontrer qu'une fonction est continue à droite ou à gauche en un point ;
- ✓ Démontrer qu'une fonction est continue sur un intervalle ;
- ✓ Reconnaitre graphiquement une fonction continue en un point ou sur un intervalle ;
- ✓ Restituer les fonctions continues usuelles.

Prérequis :

- ✓ Limites

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 1ère SM ;
- ✓ Collection Spirale 1ère SE ;
- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue ;
- ✓ Livre de Saloly TS2 ;
- ✓ Mon cours 1ère S2 au lycée Kennedy.

Plan de la leçon

I. Continuité d'une fonction en un point a

1. Définition

- **a. Exemples**
- **b. Remarque**

2. Illustration graphique

- **a. Propriété**
- **b. Exemples**

3. Continuité à droite-Continuité à gauche en un point a

- **a. Continuité à droite**

Déroulement

I. Continuité d'une fonction en un point a

1. Définition

Une fonction f est continue en un point a si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- ✓ f(a) existe (c'est à dire $a \in D_f$) ;
- ✓ f admet une limite en a et $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

a. Exemples

Montrons que la fonction f telle que f(x)=x²+x-6 est continue en -1.

f est une fonction polynôme donc $\begin{cases} f(-1)\ existe \\ f\ admet\ une\ limite\ en -1 \\ \lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \end{cases}$

Par suite f est continue en -1.

- ✓ Montrons que la fonction g telle que g(x)=$\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 4 & si\ x = 2 \end{cases}$ est continue en 2.

$g(x) = 4$ si $x = 2$ signifie que $g(2)$ existe et $g(2) = 4$. Etudions maintenant la limite de g en 2.

$\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 4 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 2} x - 2 = 0$ donc par quotient on a une forme indéterminée

$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$ d'où $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 4$. Ainsi g admet une limite en 2 et $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2)$ d'où g est continue en 2.

b. Remarques

f n'est pas continue en a dans chacun des cas suivants :

- ✓ Si $a \notin D_f$ c'est à dire si $f(a)$ n'existe pas.
- ✓ Si $a \in D_f$ et f n'a pas de limite en a.
- ✓ Si $a \in D_f$, f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Exercice à faire à la maison

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a indiqué

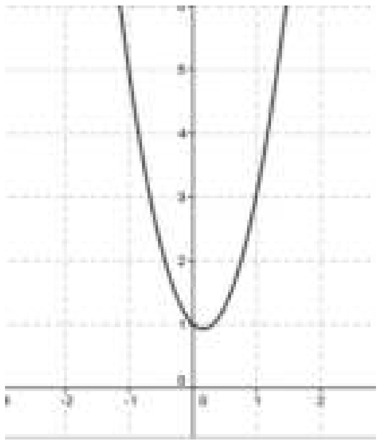
f(x)=$\begin{cases} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} & si\ x \neq 9 \\ \frac{1}{6} & si\ x = 9 \end{cases}$; a=9 et g(x)=$\begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x+3} & si\ x \neq -3 \\ 1 & si\ x = -3 \end{cases}$; $a = -3$

2. Illustration graphique

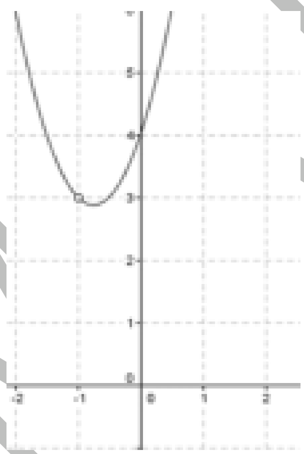
a. Propriété

f est continue en a si et seulement si C_f se trace « sans lever le crayon » autour du point de coordonnées $(a; f(a))$.

b. Exemples



La courbe C_f ci-dessus se trace « sans lever le crayon » autour du point (1, 3) donc f est continue en 1.



la courbe C_f ci-dessus se trace en levant le crayon autour du point (-1,3) donc on peut dire que f n'est pas continue en -1.

3. Continuité à droite-continuité à gauche en un point a

a. Continuité à droite

- **Définition**

f est continue à droite en a si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- ✓ f(a) existe,
- ✓ f admet une limite à droite en a et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

- **Exemple**

Soit f telle que : $f(x) = \begin{cases} x-3 & si\ x<3 \\ 3-x & si\ x>3 \\ 0 & si\ x=3 \end{cases}$. Montrons que f est continue à droite en 3.

$f(3)=0$. Etudions la limite de f à droite en 3. Ainsi $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 3-x = 0$ d'où f admet une limite à droite en 3 et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$. Par suite f est continue à droite en 3.

b. Continuité à gauche

- **Définition**

f est continue à gauche en a si les toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- ✓ f(a) existe ;
- ✓ f admet une limite à gauche en a et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

- **Exemple**

Soit f telle que :$f(x) = \begin{cases} x-3 & si\ x<3 \\ 3-x & si\ x>3 \\ 0 & si\ x=3 \end{cases}$. Montrons que f est continue à gauche en 3.

$f(3)=0$. Etudions la limite de f à gauche en 1. Ainsi $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} x-3 = 0$ d'où $f$admet une limite à gauche en 3 et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$. Par suite f est continue à gauche en 3.

c. Théorème (admis)

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

✓ **Exemples**

Soit f telle que : $f(x) = \begin{cases} x-3 & si\ x<3 \\ 3-x & si\ x>3 \\ 0 & si\ x=3 \end{cases}$. Etudions la continuité de f en 3.

Nous avons déjà vu que f est continue à droite et à gauche en 3 donc f est continue en 3.

Soit m telle que $m(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x. La fonction m est dite fonction mantisse. Etudions la continuité de m en 0.

$m(0) = 0$

On peut se placer sur $[-1,0[$. On a donc $E(x) = -1$ donc $m(x) = x + 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} m(x) = 1$. Donc m n'est pas continue à gauche en 0. Par suite m n'est pas continue en 0.

II. Continuité d'une fonction sur un intervalle

1. Définition

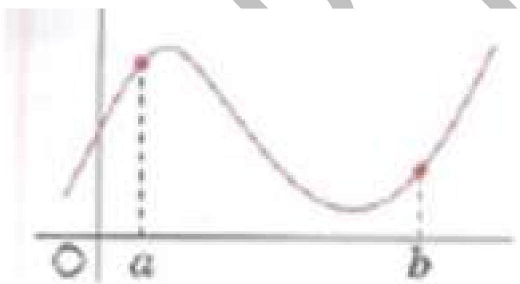
Une fonction f est dite continue sur un intervalle I si f est continue en tout point a appartenant à I.

2. Illustration graphique

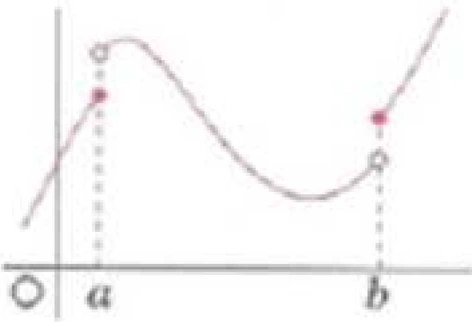
a. Propriété

f est continue sur un intervalle I si et seulement si sa courbe C_f se trace sans lever le crayon sur I.

b. Exemples



f est continue sur [a, b]



f n'est pas continue sur [a, b]

3. Continuité de fonctions usuelles

Le tableau suivant donne des fonctions usuelles et les ensembles sur lesquels elles sont continues.

Fonctions usuelles f	Plus grand ensemble sur lequel f est continue
$f(x) = c$ où c est un réel constant	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$

4. Opérations sur les fonctions continues

a. Théorème

- ✓ Si u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I alors les fonctions $u + v$ et $u \times v$ sont continues sur I.
- ✓ Si u et v sont des fonctions continues sur un intervalle I et $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in$ I alors la fonction $\frac{u}{v}$ est continue sur I.

b. Exercice d'application : Montrer que chacune des fonctions suivantes est continue sur I

- ✓ $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 1$; $I = [0; +\infty[$
- ✓ $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$

5. Théorèmes admis

a. Théorème 1

- ✓ Si f est une fonction polynôme alors f est continue sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.
- ✓ Si f est une fraction rationnelle alors f est continue sur tout intervalle I ne contenant pas une racine de son dénominateur.
- ✓ Soit $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Si u est continue sur un intervalle I et si pour tout $x \in$ I, $u(x) \geq 0$ alors f est continue sur I.

Exercice d'application

Dans chaque cas suivant, justifier que f est continue sur l'intervalle I donné :

1. $f(x) = \frac{3x^4-5}{2x+1}$; $I =]-\infty; -1]$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 6}$; $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Rappel: L'image d'un intervalle I par une fonction f notée $f(I)$ est l'ensemble des images par f des éléments de I c'est à dire $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$.

b. Théorème 2

Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est aussi un intervalle.

c. Théorème 3

Si f est continue sur $[a; b]$ alors pour tout nombre réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a; b]$. Autrement dit il existe au moins un réel $\alpha \in [a; b]$ tel que $f(\alpha) = y$.

En particulier si f est continue sur $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.

Exercice d'application

Montrons que l'équation $x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24} = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

Posons $f(x) = x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24}$. Ainsi $x^3 - \frac{13}{12}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{1}{24} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

f est une fonction polynôme donc f est continue sur $[0; 1]$. De plus $f(0) = -\frac{1}{24}$ et $f(1) = \frac{1}{4}$ d'où $f(0) \times f(1) \leq 0$. Par suite l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$.

d. Théorème 4

Si f est continue et strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Chapitre 9 : DERIVATION

Durée : 6h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Calculer le nombre dérivé, le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite ;
- ✓ Utiliser les règles de dérivation au programme ;
- ✓ Utiliser le théorème liant dérivabilité et continuité ;
- ✓ Déterminer une équation d'une tangente à une courbe ;
- ✓ Représenter une tangente ou une demi-tangente à une courbe ;
- ✓ Déterminer les variations d'une fonction ;
- ✓ Construire un tableau de variations ;
- ✓ Déterminer des extrema ;
- ✓ Résoudre des problèmes à l'aide de l'outil dérivation.

Prérequis :

- ✓ Limites ;
- ✓ Continuité

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 1ère SM ;
- ✓ Collection Spirale 1ère SE ;
- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue ;
- ✓ Livre de Saloly TS2 ;
- ✓ Mon cours 1ère S2 au lycée Kennedy.

Plan de la leçon

I. **Fonction dérivable en un point**
   1. **Définition**
   2. **Exemple et contre-exemple**
   3. **Théorème admis**
   4. **Interprétation géométrique du nombre dérivé**

II. **Nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite**
   1. **Dérivabilité à gauche**

Déroulement de la leçon

Soit f une fonction numérique à variable réelle x définie sur un intervalle ouvert et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Fonction dérivable en un point

1. Définition

f est dite dérivable en un réel a de l'intervalle I si la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a existe et est égale à un nombre réel. Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$. On lit : « f prime de a », on peut écrire : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

2. Exemple et contre-exemple

a. Exemple

Soit f telle que $f(x) = x^2$. Etudions la dérivabilité de f en 1.

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$. Ainsi la limite de $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ quand x tend vers 1 existe et est égale au réel 2 d'où f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = 2$.

b. Contre-exemple

Soit f telle que $f(x) = |x|$. Etudions la dérivabilité de f en 0.

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$ d'où la limite de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ quand x tend vers 0 n'existe pas. Par suite f n'est pas dérivable en 0.

3. Théorème (admis)

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

a. Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse c'est-à-dire qu'une fonction continue en a n'est pas nécessairement dérivable en a. Par exemple la fonction f telle que $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

b. Conséquence du théorème

Si f n'est pas continue en a alors f n'est pas dérivable en a. Cette propriété est dite contraposée du théorème admis ci-dessus.

Exercice d'application

Soit g la fonction telle que $g(x) = \begin{cases} \frac{2x-4}{x-2} & si\ x \neq 2 \\ 3 & si\ x = 2 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de g en 2.
2. En déduire la dérivabilité de g en 2.

4. Interprétation géométrique du nombre dérivé

a. Théorème-définition

Si f est dérivable en a alors le nombre dérivé de f en a, $f'(a)$ est le coefficient directeur d'une droite qui coupe C_f au point de coordonnées $\binom{a}{f(a)}$, dit point d'abscisse a. Cette droite qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ et qui coupe C_f au point de coordonnées $\binom{a}{f(a)}$ est dite tangente à C_f au point d'abscisse a.

b. Propriété

Si f est dérivable en a alors l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

c. Exemple

La fonction f telle que $f(x) = x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$. L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

II. Nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite

1. Dérivabilité à gauche

a. Définition

f est dite dérivable à gauche en a si la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a^- existe et est égale à un nombre réel. Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en a et est notée $f'_g(a)$. On lit : « f prime g de a » et on peut écrire : $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$.

b. Exemple

Soit f telle que telle que $f(x) = |x|$. Etudions la dérivabilité de a à gauche en 0.

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$ donc f est dérivable à gauche en 0 et on a $f'_g(0) = -1$

c. Interprétation géométrique du nombre dérivé à gauche

Si f est dérivable à gauche en a alors $f'_g(a)$, le nombre dérivé de f à gauche en a est le coefficient directeur d'une droite qui coupe C_f au point d'abscisse a. Cette droite est dite demi-tangente à C_f à gauche du point d'abscisse a. L'équation réduite de cette demi-tangente est $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$.

2. Dérivabilité à droite

a. Définition

f est dérivable à droite en a si la limite de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ quand x tend vers a^+ existe et est égale à un nombre réel. Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en a et est notée $f'_d(a)$. On lit : « f prime d de a » et on peut écrire : $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$.

b. Exemple

Soit f telle que telle que $f(x) = |x|$. Etudions la dérivabilité de f à droite en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ donc f est dérivable à droite en 0 et on a $f'_d(0) = 1$

c. Interprétation géométrique du nombre dérivé à droite

Si f est dérivable à droite en a alors $f'_d(a)$, le nombre dérivé de f à droite en a est le coefficient directeur d'une droite qui coupe C_f au point d'abscisse a. Cette droite est dite demi-tangente à C_f à droite du point d'abscisse a. L'équation réduite de cette demi-tangente est $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$.

3. Théorèmes

a. Théorème 1

Si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ sont égaux au même nombre réel l alors f est dérivable en a et on a $f'(a) = l$.

b. Théorème 2

Si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors f n'est pas dérivable en a et dans ce cas le point d'abscisse a est dit point anguleux.

c. Exercice d'application

Soit f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \; si \; x \leq 1 \\ 2 - \frac{2}{x} \; si \; x > 1 \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de f en 1.

III. Fonction dérivée

1. Dérivabilité sur un intervalle

- f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ est dérivable sur $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point appartenant à $]a, b[$.
- f définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ est dérivable sur $[a, b]$ si elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et si elle est dérivable à droite en a et à gauche en b.

2. fonction dérivée

a. **Théorème-définition :** Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction notée $f': I \to \mathbb{R}\ x \mapsto f'(x)$ est dite fonction dérivée de f ou simplement la dérivée de f sur I.

b. **Exemple :** Soit $f(x) = x^2$. Etudions la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminons la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudions la dérivabilité de f en a.

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 2a$ donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$

Ainsi f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction dérivée de sur $\mathbb{R}$ est $f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto f'(x) = 2x$.

3. Dérivées des fonctions élémentaires

a. Tableau des fonctions dérivées des fonctions élémentaires

Le tableau suivant donne des intervalles sur lesquels les fonctions élémentaires sont dérivables ainsi que les expressions de leurs fonctions dérivées sur ces intervalles.

Fonction f définie par :	f est dérivable sur	Fonction dérivée de f définie par :
$f(x) = c$ où c est un réel constant	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes.	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty; 0[\ ou\ ]0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b. Remarque

La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$ mais n'est pas dérivable sur $[0; +\infty[$ mais plutôt sur $]0; +\infty[$ car elle n'est pas dérivable à droite en 0.

c. Exemples

Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f est dérivable puis y déterminer f'(x)

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = -4x + 3$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = x^7$
6. $f(x) = \frac{1}{x}$
7. $f(x) = \frac{1}{x^4}$

4. Opérations sur les fonctions dérivées : Soit I un intervalle

a. Dérivée d'une somme ou d'une différence

✓ Si $f(x) = u(x) + v(x)$ (respectivement si $f(x) = u(x) - v(x)$) et u et v sont des fonctions dérivables sur I alors f est dérivable sur I et pour tout x dans I, on a : $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ (respectivement on a : $f'(x) = u'(x) - v'(x)$)

Exemples

$f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Justifions que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculons $f'(x)$

$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x}$. Justifions que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ puis calculons $f'(x)$

b. Dérivée d'un produit

✓ Si $f(x) = \alpha u(x)$ avec α une constante et u est une fonction dérivable sur I alors f est dérivable sur I et pour tout x dans I, on a : $f'(x) = \alpha u'(x)$.

Exemple

$f(x) = -2x^3$. Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculons $f'(x)$

✓ Si $f(x) = u(x).v(x)$ et u et v sont des fonctions dérivables sur I alors f est dérivable sur I et pour tout x dans I, on a : $f'(x) = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$.

Exemple

$f(x) = x^2\sqrt{x}$. Justifions que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculons $f'(x)$

✓ Si $f(x) = [u(x)]^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et u est dérivable sur I alors f est dérivable sur I et pour tout x dans I, $f'(x) = n\,.u'(x).[u(x)]^{n-1}$

Exemple

$f(x) = (\frac{1}{3}x - 1)^3$. Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculons $f'(x)$.

c. Dérivée d'un quotient

- Si $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ et u est dérivable sur I tel que $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f est dérivable sur I et pour tout x dans I, on a : $f'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$.

Exemple

f(x) $= \frac{1}{x^2}$. Justifions que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculons $f'(x)$.

- Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ et u et v sont dérivables sur I tel que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f est dérivable sur I et pour tout x dans I, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$

Exemple

f(x) $= \frac{3x-1}{2x-4}$. Justifions que f est dérivable sur $]2; +\infty[$ puis calculons $f'(x)$.

d. Dérivée d'une racine carrée

- Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ et u est dérivable sur I tel que pour tout $x \in I, u(x) > 0$ alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I, on\ a :\ f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Exemple

$f(x) = \sqrt{x-4}$. Justifions que f est dérivable sur $]4;\ +\infty[$ puis calculons $f'(x)$.

e. Remarque

Une fonction polynôme est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ et une fraction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant aucune de ses racines.

f. Tableau récapitulatif

Le tableau suivant récapitule les opérations sur les dérivées

Fonctions définies par	Fonctions dérivées
$u(x) + v(x)$ (u(x)-v(x))	$u'(x) + v'(x)$ (u'(x)-v'(x))
$\alpha \times u(x)$	$\alpha \times u'(x)$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$
$u(x)^n$	$nu'(x)[u(x)]^{n-1}$

$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{[u(x)]^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

IV. Applications de la dérivation

1. Dérivée et sens de variation d'une fonction

a. Théorème 1

Si f est dérivable sur un intervalle I et si pour tout $x \in I, f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

b. Théorème 2

Si f est dérivable sur un intervalle I et si pour tout $x \in I, f'(x)$ est positive et que le nombre de ses racines dans I est fini alors f est strictement croissante sur I.

c. Théorème 3

Si f est dérivable sur un intervalle I et si pour tout $x \in I, f'(x)$ est négative et que le nombre de ses racines dans I est fini alors f est strictement décroissante sur I.

Exercice d'application

Soit f telle que $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$. Etudions le sens de variation de f sur D_f

d. Théorème 4

Si f est dérivable sur un intervalle I contenant un réel a et si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extrémum relatif en a et ce dernier est $f(a)$. De plus si le changement se fait du signe + en – (respectivement de – en +) alors l'extrémum est un maximum relatif (respectivement un minimum relatif).

Exemple

La fonction f ci-dessus admet un maximum relatif en -1 et un minimum relatif en 3.

2. Tableau de variation d'une fonction

Le tableau de variations d'une fonction f sur un intervalle I permet de visualiser les variations de f sur I. Par exemple, dressons le tableau de variations la fonction f ci-dessus sur $\mathbb{R}$.

3. Dérivée et bijection

a. Théorème 5

Si f est dérivable et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur f(I) (image de I par f). Si de plus si $0 \in f(I)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à I.

b. Exemple

D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction f est dérivable et strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ donc d'après le théorème 5, f réalise une bijection de $]-\infty; -1]$ sur $f(]-\infty; -1]) = \left]-\infty; \frac{11}{3}\right]$. De plus nous remarquons que $0 \in \left]-\infty; \frac{11}{3}\right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à $]-\infty; -1]$.

De même, f est dérivable et strictement décroissante sur $[-1; 3]$ donc d'après le théorème 5, f réalise une bijection de $[-1; 3]$ sur $\left[-7; \frac{11}{3}\right]$. De plus, nous remarquons que $0 \in \left[-7; \frac{11}{3}\right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à $[-1; 3]$.

COMPLEMENT DU COURS

<u>**Asymptote oblique à une courbe :**</u> Soit f une fonction, C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - [ax + b] = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote à C_f en ∞.

Exemple

Soit f telle que $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$. Montrons que $(\Delta): y = x + 3$ est une asymptote oblique oblique à C_f

<u>**Position d'une courbe par rapport à une asymptote oblique :**</u> Soit $(\Delta): y = ax + b$ une asymptote oblique à C_f et I un intervalle.

- Si $f(x) - [ax + b] > 0$ pour tout $x \in I$ alors C_f est au-dessus de (Δ).
- Si $f(x) - [ax + b] < 0$ pour tout $x \in I$ alors C_f est en dessous de (Δ).
- Les solutions de l'équation $f(x) - [ax + b] = 0$ si elles existent, donnent les abscisses des points de d'intersection de C_f et (Δ).

Exemple

$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$.

Etudions la position de C_f par rapport à son asymptote oblique $(\Delta): y = x + 3$

<u>**Ensemble de définition d'une fonction à raccordement**</u>

Exemple

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2x^2+6}{x+1} \ si\ x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} \ \ si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Déterminons D_f

Exercice d'application

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3x-1}{x-2} \quad si\ x < 3 \\ 3x^2 + x - 22 \quad si\ x \geq 3 \end{cases}$$

Déterminer D_f

Chapitre 10: ANGLES ORIENTES ET LA TRIGONOMETRIE

Durée : 7h

Objectifs spécifiques :

✓ Restituer la relation de Chasles pour les angles orientés ;

✓ Restituer les relations liant les différentes mesures ;

- ✓ Restituer le vocabulaire : mesures d'un angle orienté et mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Déterminer la mesure principale d'un angle orienté connaissant une de ses mesures.
- ✓ Restituer les formules et utiliser les formules d'addition, de duplication et de linéarisation
- ✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations du type cos x= cos a ; sin x=sin a et tan x =tan a et des équations se ramenant à ces formes.
- ✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations du type cos x$\leq$ cos a ; sin x$\leq$sin a et tan x $\leq$tan a

Prérequis :

- ✓ Angles orientés seconde S

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 1ère SM ; 1ère SE et 2nde S ;
- ✓ Collection Spirale 2nde;
- ✓ Collection perspectives 2nde ;
- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue ;
- ✓ Collection Fractale 2nde.

Plan de la leçon

- **I. Arcs orientés**
  1. **Orientation du plan**
  2. **Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique**
  3. **Mesure d'un arc orienté**
- **II. Angle orienté de vecteurs**
  1. **Définitions**
  2. **Remarques**
  3. **Egalités de deux angles orientés**
  4. **Propriétés**
- **III. Lignes trigonométriques**
  1. **Base orthonormée**
  2. **Cosinus, sinus et tangente d'un réel**
  3. **Formules des angles associés**
  4. **Valeurs particulières du cosinus, du sinus et de la tangente**
  5. **Formules trigonométriques**

IV. **Equations trigonométriques**

1. **Du type $\cos x = \cos a$**
2. **Du type $\sin x = \sin a$**
3. **Du type $\tan x = \tan a$**
4. **Du type $\cos x = a$; $\sin x = a$**
5. **Du type $\tan x = a$**
6. **Du type $a\cos x + b\sin x = c$**

V. **Inéquations trigonométriques**

1. **Exemple 1**
2. **Exemple 2**
3. **Exemple 3**
4. **Exemple 4**
5. **Exemple 5**

Déroulement du cours

Vérification des Prérequis

Exercice 1

i. Donner la relation qui lie la mesure x en degrés et la mesure y en radians d'un même angle géométrique. **(Réponse : $\frac{x}{y} = \frac{180}{\pi}$)**

ii. Compléter le tableau suivant

Radians		π	$\frac{4\pi}{3}$	
degrés	30			135

Exercice 2

Soit (C) un cercle de centre O et rayon r=4. Donner la longueur d'un arc de (C) intercepté par un angle au centre de $\frac{3\pi}{4}$ rad puis la mesure en degrés d'un angle au centre qui intercepte un arc de cercle de longueur $l = 1{,}5$.

Exercice 3 : EFG est un triangle rectangle et isocèle en E.

Quelle est l'orientation de ce triangle ?

Représenter sur la figure l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}})$ puis donner sa mesure principale en radians.

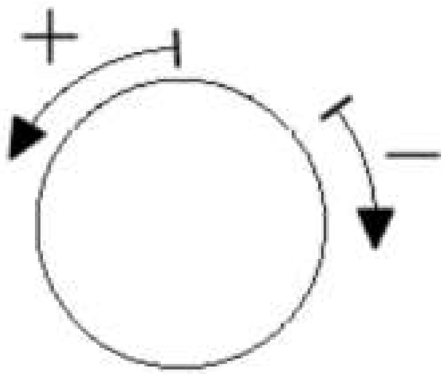
Nommer l'angle orienté représenté en rouge sur la figure puis donner sa mesure principale en radians.

On choisit une unité de longueur une fois pour toute.

I. Arcs orientés

1. Orientation du plan

Soit (C) un cercle donné du plan. On admet qu'il n'y a que deux sens de parcours possibles sur (C) : le sens contraire des aiguilles d'une montre (+) et le sens des aiguilles d'une montre (-).

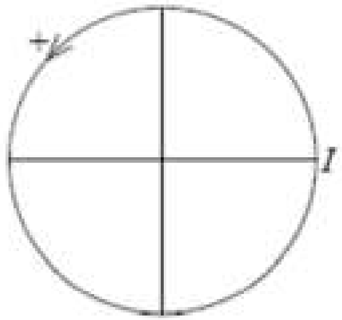


- Orienter le cercle, c'est choisir l'un de ces deux sens de parcours. Le sens choisi est généralement le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ce sens choisi est dit sens direct ou trigonométrique ou positif. L'autre sens est dit indirect ou négatif ou rétrograde.
- Orienter le plan, c'est choisir une bonne fois pour toutes :
  - **a.** Un point fixe O appelé origine.
  - **b.** L'un de ces deux sens de parcours sur tous les cercles du plan.

2. Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

a. Cercle trigonométrique

Dans le plan orienté, on appelle cercle trigonométrique, le cercle (C) de centre O et de rayon 1 sur lequel, on a choisi un autre point I appelé origine des arcs.



b. Image d'un réel sur le cercle trigonométrique

Soit (C), le cercle trigonométrique, on considère la droite (Δ) tangente à (C) en I munie du repère $(I, \vec{j})$ où $\|\vec{j}\| = 1$. Ainsi (Δ) représente l'ensemble des nombres réels ℝ.

On enroule la droite (Δ) autour de (C) de la façon suivante :

- la demi-droite $[Ix)$ des points de (Δ) d'abscisses positives est enroulée dans le sens direct ;
- la demi-droite $[Ix')$ des points de (Δ) d'abscisses négatives est enroulée dans le sens indirect.

Ainsi, chaque point m de (Δ) d'abscisse x vient se superposer sur un seul point M de (C). On dit que M est l'image du réel x sur le cercle trigonométrique et x est dit abscisse curviligne du point M de (C). Par exemple, l'image de 0 sur (C) est I, celle de $\frac{\pi}{2}$ est J, l'image de π est le point I' diamétralement opposé à I, celle de $-\frac{\pi}{2}$ est J', diamétralement opposé à J.

Par ce procédé d'enroulement de la droite des réels (Δ) autour de (C), chaque réel x a une et une seule image M sur (C). On remarque que $x, x + 2\pi; x + 4\pi \ldots x - 2\pi; x - 4\pi$ ou plus généralement $x + 2k\pi$; k∈ ℤ ont la même image M sur le cercle (C).

Chacun des nombres réels, $\ldots . x - 4\pi, x - 2\pi, x, x + 2\pi; x + 4\pi, \ldots , \ x + 2k\pi$; k∈ ℤ est une abscisse curviligne de M. Ainsi tout point M de (C) a une infinité d'abscisses curvilignes.

c. Congruence modulo 2π

Soient x et x' des réels. On dit que x est congru à x' modulo 2π s'il existe k∈ ℤ tel que $x - x' = 2k\pi$ (ou encore $x = x' + 2k\pi$). Dans ce cas, on note $x \equiv x'[2\pi]$. On lit : « x congru à x' modulo 2π).

Exemple : $\frac{\pi}{2}$ est congru à $\frac{9\pi}{2}$ modulo 2π. En effet $\frac{\pi}{2}$ - $\frac{9\pi}{2} = -4\pi = 2(-2)\pi, k = -2$. On note $\frac{\pi}{2} \equiv \frac{9\pi}{2}[2\pi]$.

π n'est pas congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π. Supposons que π est congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π. Il existe k$\in \mathbb{Z}$ tel que $\pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$. Or $\pi - \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}$ donc $2k\pi = 3\frac{\pi}{4}$ d'où $k = \frac{3}{8} \in \mathbb{Z}$. Absurde donc π n'est pas congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π.

Remarque

Notons que x est congru à x' modulo 2π équivaut à x' est congru à x modulo 2π ($x \equiv x'[2\pi] \Leftrightarrow x' \equiv x[2\pi]$. En effet : $x' - x = -(x - x')$ et comme x est congru à x' modulo 2π alors il existe k$\in \mathbb{Z}$ tel que $x - x' = 2k\pi$. Ainsi $x' - x = 2(-k)\pi$ or $-k \in \mathbb{Z}$

Propriété

Si M est un point de (C), x et x' deux abscisses curvilignes de M alors $x \equiv x'[2\pi]$. Autrement dit $x = x' + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

3. Mesures d'un arc orienté

a. Définitions

Soient M et N des points du cercle trigonométrique, x_M *et* x_N des abscisses curvilignes respectives de M et N :

- Le couple (M, N) est dit arc orienté et est noté $\widehat{MN}$.
- Le réel $x_N - x_M$ est dit mesure en radians de l'arc orienté $\widehat{MN}$.

b. Remarques

- Pour un arc orienté, le départ et l'arrivée joue un rôle important. Ainsi, l'arc orienté $\widehat{MN}$ est distinct de l'arc orienté $\widehat{NM}$.
- Un arc orienté $\widehat{MN}$ a une infinité de mesures en radians car M et N ont chacune une infinité d'abscisses curvilignes.
- Une mesure en radians quelconque de l'arc orienté $\widehat{MN}$ est notée $mes\ \widehat{MN}$.
- Deux mesures en radians d'un arc orienté sont congrues modulo 2π. Ainsi si α est une mesure en radians d'un arc orienté alors toute autre mesure α' de cet arc orienté est égale à $\alpha' = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ et on a : $mes\ \widehat{MN} \equiv \alpha\ [2\pi]$.
- On admet qu'il existe une seule mesure en radians d'un arc orienté appartenant à $]-\pi, \pi]$. Cette mesure est dite mesure principale en radians de l'arc orienté.

c. Propriétés

- $mes\ \widehat{MN} \equiv -\,mes\ \widehat{NM}\ [2\pi]$.
- Si P est un autre point du cercle trigonométrique alors $mes\ \widehat{MN} + mes\ \widehat{NP} \equiv$ mes $\widehat{MP}\ [2\pi]$. Cette égalité est dite relation de Chasles.

Exercice

Déterminer toutes les mesures en radians de l'arc orienté $\widehat{IJ}$.

Solution

$mes\ \widehat{IJ} \equiv (x_J - x_I)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

II. Angle orienté de vecteurs

1. Définitions

- Un angle orienté de vecteurs est un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de deux vecteurs non nuls du plan. On le note $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
- Soient $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}; \vec{v} = \overrightarrow{OB}$; M, le point d'intersection de $[OA)$ et du cercle trigonométrique, N celui de $[OB)$ et du cercle trigonométrique. On appelle mesure en radians de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$, toute mesure en radians de l'arc orienté $\widehat{MN}$. Une mesure en radians de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est notée $(\vec{u}, \vec{v})$.

2. Remarques

- $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ a une infinité de mesures en radians et une seule appartient à $]-\pi, \pi]$. Elle est dite mesure principale en radians de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
- La valeur absolue de la mesure principale en radians de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- On obtient une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ en prenant la longueur parcourue sur le cercle trigonométrique pour aller de M à N devancée par le signe + si le sens de parcours est le sens direct et par le signe – si le sens de parcours est le sens indirect. Ainsi si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est orienté dans le sens direct ; $l = l(\widehat{MN})$ (longueur de l'arc non orienté) et $l' = l(\widetilde{MN})$ alors l et $-l'$sont des mesures en radians de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ et si $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est orienté dans le sens indirect alors $-l$ et l' sont des mesures en radians de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$. En effet la mesure en radians ou l'opposé de la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{MON}$ est la mesure principale de $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ or cette mesure est égale à la longueur de l'arc non orienté (MN) puisque le rayon est 1.

3. Egalités de deux angles orientés

a. Définition

Deux angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})$ sont égaux si une mesure en radians de l'un est congrue à toute mesure en radians de l'autre modulo 2π. Autrement dit $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[2\pi]$.

b. Remarque

- Deux angles orientés $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})$ sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.
- $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[2\pi] \Rightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[\pi]$ (La réciproque est fausse).
- $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}')[2\pi]$ ou bien $(\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u}',\vec{v}') + \pi[2\pi]$

4. Propriétés : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs non nuls.

P1) $(\vec{u},\vec{u}) \equiv 0[2\pi]$ (**Preuve : utiliser la définition (mesure en radians arcs orientés**)

P2) $(\vec{u},-\vec{u}) \equiv (-\vec{u},\vec{u}) \equiv \pi[2\pi]$ (**Preuve : utiliser la propriété qui dit que la longueur parcourue sur le cercle trigonométrique pour aller de A et B en ajoutant le signe correspondant au sens de parcours est une mesure en radians de l'angle orienté. Remarquer que $-\pi \equiv \pi[2\pi]$**)

P3) $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) \equiv (\vec{u},\vec{w})[2\pi]$ (**Relation de Chasles**) (**Preuve : utiliser mesures en radians arcs orientés**)

P4) $(\vec{u},\vec{v}) \equiv -(\vec{v},\vec{u})[2\pi]$ (**Preuve :** $(\boldsymbol{\vec{u}},\boldsymbol{\vec{v}}) + (\boldsymbol{\vec{v}},\boldsymbol{\vec{u}}) \underbrace{\equiv}_{Chasles} (\boldsymbol{\vec{u}},\boldsymbol{\vec{u}})[\boldsymbol{2\pi}] \equiv \boldsymbol{0}[\boldsymbol{2\pi}]$)

P5) $(-\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi[2\pi]$ (**Preuve** $: (-\vec{u},\vec{v}) - (\vec{u},\vec{v}) \equiv (-\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{u}) \equiv (-\vec{u},\vec{u}) \equiv \pi[2\pi] \Rightarrow (-\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi[2\pi])$ et $(\vec{u},-\vec{v}) - (\vec{u},\vec{v}) \equiv (\vec{u},-\vec{v}) + (\vec{v},\vec{u}) \equiv (\vec{v},\vec{u}) + (\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{v},-\vec{v}) \equiv \pi[2\pi] \Rightarrow (\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi[2\pi])$

P6) $(-\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})[2\pi]$(**Preuve**: $(-\vec{u},-\vec{v}) \equiv (\vec{u},-\vec{v}) + \pi[2\pi] \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi + \pi[2\pi] \equiv (\vec{u},\vec{v})[2\pi]$)

P7) Si $kk' > 0$ alors $(k\vec{u},k'\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v})[2\pi]$ (**Preuve :** distinguer les deux cas selon les signes de k et k' ensuite faire les constructions et utiliser les angles géométriques et les orientations).

P8) Si $kk' < 0$ alors $(k\vec{u},k'\vec{v}) \equiv (\vec{u},\vec{v}) + \pi[2\pi]$ (**Preuve :** distinguer les deux cas selon les signes de k et k' ensuite faire les constructions et utiliser les angles géométriques et les orientations).

P9) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens si et seulement si $(\vec{u},\vec{v}) \equiv 0[2\pi]$ (**Preuve :** Pour $\Rightarrow$), utiliser $\vec{v} = \alpha\vec{u}$; $\alpha > 0$ et appliquer P7) ; Pour ($\Leftarrow$: $(\vec{u},\vec{v}) \equiv 0[2\pi] \Rightarrow mes\ \widehat{MN} \equiv 0[2\pi] \Rightarrow$

$x_N - x_M \equiv 0[2\pi] \Rightarrow x_N \equiv x_M[2\pi]$ donc x_N et x_M ont la même image sur le cercle trigonométrique d'où M et N sont confondus et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens)

P10) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires si et seulement si $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \pi[2\pi]$ (**Preuve :** $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv -\pi[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) + \pi \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},-\vec{v}) \equiv 0[2\pi] \underbrace{\Leftrightarrow}_{\mathbf{P9)}} \vec{u}$ et $-\vec{v}$ sont colinéaires de même sens $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires).

P11) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv \pi[\pi]$

P12) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\vec{u},\vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ($\Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2}[\pi]$) (**Preuve :** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = 0$; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}; \vec{v} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow$ ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$).

5) Exercices

- **Exercice 1**

Déterminer les mesures principales en radians des angles orientés dont l'une des mesures en radians est $\frac{89}{4}\pi$;$\frac{157}{4}\pi$ et $-\frac{107}{6}\pi$ puis placer leurs images sur le cercle trigonométrique.

- **Exercice 2**

Placer sur le cercle trigonométrique, les points dont les abscisses curvilignes sont les réels de la forme $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$ (**Indication :** On cherche les valeurs de k $\in \mathbb{Z}$ pour les quels $\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$. On trouve $k \in \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\}$)

- **Exercice 3**

Soit $(\vec{u},\vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$. Calculer $(\vec{u},-\vec{v})$; $(2\vec{u},\vec{v})$; $(-\vec{u},3\vec{v})$ et $(-2\vec{u},-3\vec{v})$

- **Exercice 4**

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A direct. Déterminer $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA}\right)$.

III. Lignes trigonométriques

1. Base orthonormée

- Un couple de vecteurs non nuls et non colinéaires $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dit base du plan.
- Une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dite orthonormée si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$ et la mesure principale en radians de $\widehat{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$. Elle est dite orthonormée directe (respectivement indirecte) si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$ et la mesure principale en radians de $\widehat{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ est $\frac{\pi}{2}$ (respectivement si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$ et la mesure principale en radians de $\widehat{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ est $-\frac{\pi}{2}$).
- Un triplet $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une base et A un point est dit repère du plan. Un repère $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dit orthonormée (respectivement orthonormé direct) si la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormée (respectivement orthonormée directe).

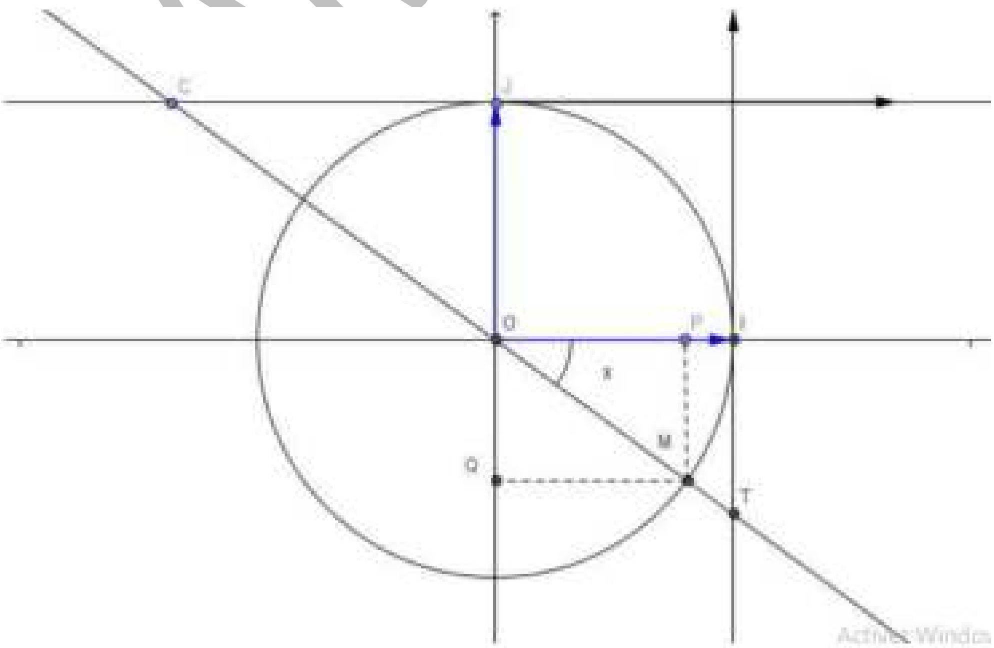
2. Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit x un nombre réel d'image M sur le cercle trigonométrique. (NB : x est une mesure en radians de l'angle orienté $\widehat{(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})}$).

a. Définitions

- L'abscisse x_M du point M dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dite cosinus de x et est noté $\cos x$.
- L'ordonnée y_M du point M dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est dite sinus de x et est noté $\sin x$.

Ainsi, si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (OI) et (OJ) alors $\cos x = \overline{OP}$ et $\sin x = \overline{OQ}$



- Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors la tangente de x notée $\tan x$ est $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Si $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors la cotangente de x notée $cotan\ x$ est $cotan\ x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
- Le cosinus, le sinus et la tangente d'un réel x sont dits lignes trigonométriques de x.

b. Propriétés : Soit $x \in \mathbb{R}$

P1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

P2) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$; $\tan(x + 2k\pi) = \tan x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

P3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

P4) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

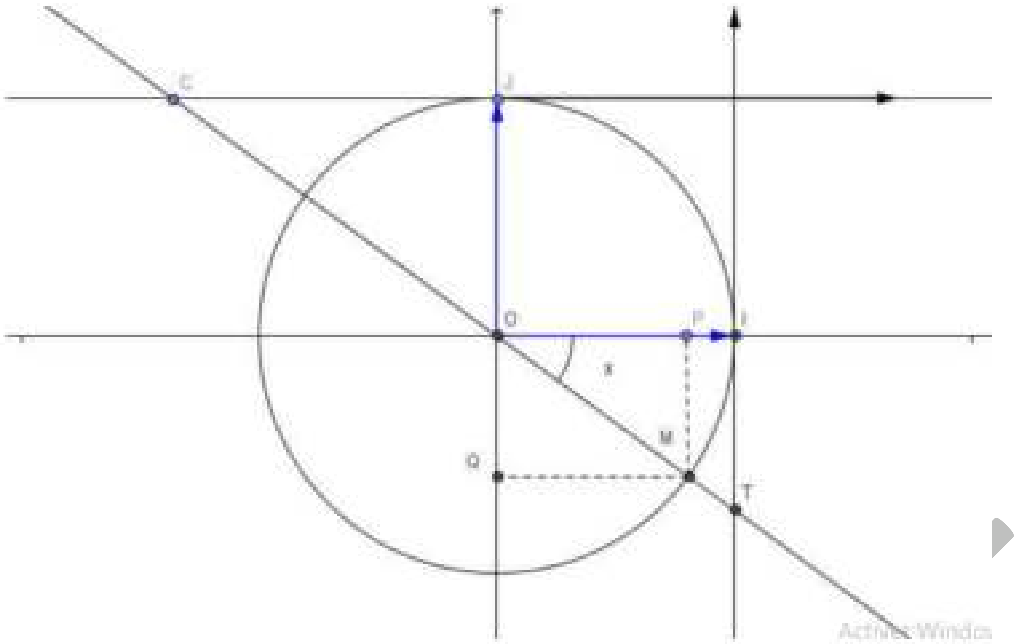
P5) $1 + cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ pour tout $x \neq k\pi$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

c. Axe des tangentes et axe des cotangentes

Soit $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On suppose que la tangente au cercle trigonométrique en I est orientée dans le même sens que $\vec{j}$ et que la tangente au cercle trigonométrique en J est orientée dans le meme sens que $\vec{\imath}$. T et C sont les points d'intersection de la droite (OM) et des tangentes en I et J au cercle trigonométrique respectivement. On a alors :

$tan\ x = \overline{IT}$ et $\overrightarrow{IT} = \tan x\ \vec{j}$; $cotan\ x = \overline{JC}$ et $\overrightarrow{JC} = cotan\ x\ \vec{\imath}$.

La droite orientée $(I, \vec{j})$ est dite axe des tangentes et la droite orientée $(J, \vec{\imath})$ est dite axe des cotangentes.



Preuve

Dans la figure ci-dessus, OPM et OIT sont en position de Thalès donc $\frac{OP}{OI} = \frac{PM}{IT} = \frac{OQ}{IT}$ car $PM = OQ$ or $cos\ x = \overline{OP} = OP$ et $OI = 1$; $sinx = \overline{OQ} = -OQ$ et $IT = -\overline{IT}$ donc $cosx = \frac{\sin x}{\overline{IT}}$ d'où $\frac{\sin x}{\cos x} = \overline{IT}$ d'où $\tan x = \overline{IT}$. De plus, $\overrightarrow{IT} = \alpha\vec{j}; \alpha < 0$ donc $IT = |\alpha|$ or $|\alpha| = -\alpha$ et $IT = -\overline{IT}$

Donc $\alpha = \overline{IT} = \tan x$ et $\overrightarrow{IT} = \tan x\,\vec{j}$

De même, OQM et JOC sont en position de Thalès donc $\frac{OQ}{OJ} = \frac{QM}{JC} = \frac{OP}{JC}$ car $QM = OP$ or $cos\ x = OP$, $OJ = 1$; $sinx = -OQ$ et $JC = -\overline{JC}$ donc $\frac{OQ}{OJ} = \frac{OP}{JC} \Rightarrow -\sin x = \frac{\cos x}{-\overline{JC}}$ d'où $\frac{\cos x}{\sin x} = \overline{JC}$ et donc $cotan\ x = \overline{JC}$. De plus $\overrightarrow{JC} = \beta\vec{i}; \beta < 0$ donc $JC = |\beta|$ or $|\beta| = -\beta$ et $JC = -\overline{JC}$

Donc $\beta = \overline{JC} = \text{cotan}\, x$ et $\overrightarrow{JC} = \text{cotan}\, x\,\vec{i}$.

d. Remarque

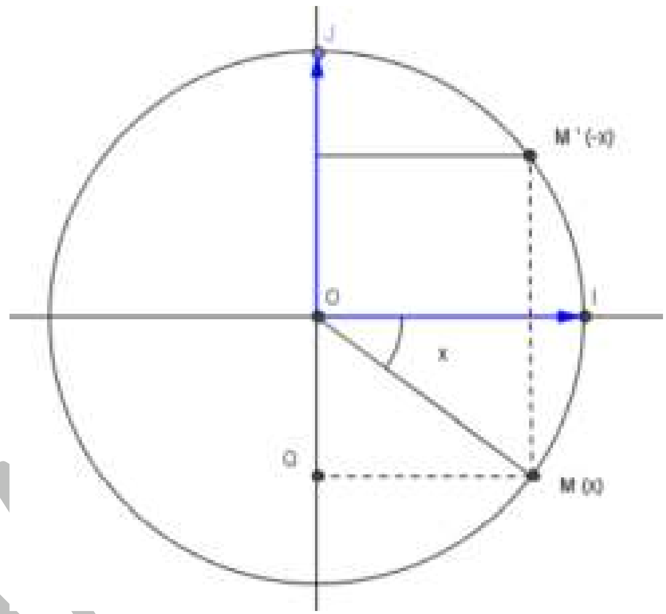
On appelle cosinus (respectivement sinus, tangente et cotangente) d'un angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, le cosinus (respectivement sinus, tangente et cotangente) d'une mesure quelconque en radians de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

3. Formules des angles associés : Soit $x \in \mathbb{R}$

Les réels $-x; \pi - x; \pi + x; \frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ sont dits associés à x. Les lignes trigonométriques de réels associés à x sont liées à celles de x comme le montrent les formules suivantes :

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan x$

Preuve

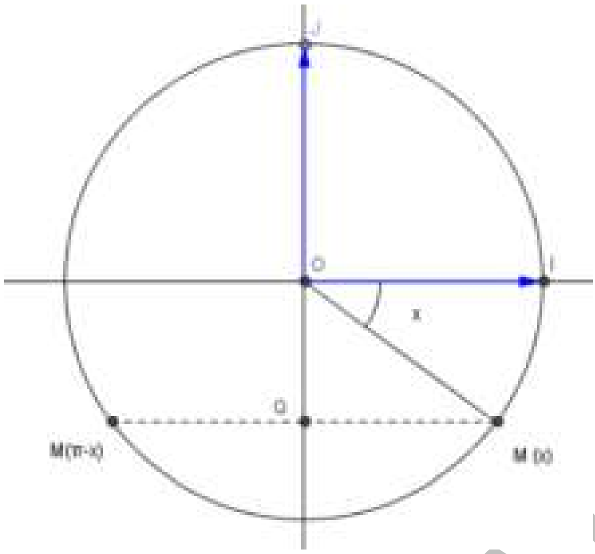


Soit M l'image de x et M' le symétrique de M par rapport à (OI). M' est l'image de $-x$. En effet, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \equiv -x[2\pi]$ Ainsi, M et M' ont même abscisse et des ordonnées opposées. Ainsi $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ et $\tan(-x) = -\tan x$ se déduit facilement des deux premières égalités.

On a aussi :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\tan(\pi - x) = -\tan x$

Preuve



Soit M le point image de x sur le cercle trigonométrique (M=M(x)). Soit M' le symétrique de M par rapport à (OJ). M' est l'image de $\pi - x$ sur le cercle trigonométrique ($M' = M(\pi - x)$). En effet : Comme I' (point diamétralement opposé à I), M' sont les symétriques de I et M par rapport à (OJ) respectivement alors $\left(\overrightarrow{OI'}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv -\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)[2\pi] \equiv -x[2\pi]$; $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'}\right) + \left(\overrightarrow{OI'}, \overrightarrow{OM'}\right)[2\pi] \equiv \pi - x[2\pi]$. Par conséquent $\pi - x$ est une abscisse curviligne de M'. Comme M et M' ont même ordonnée et des abscisses opposées alors on a $\sin(\pi - x) = \sin x$ *et* $\cos(\pi - x) = -\cos x$. Enfin $\tan(\pi - x) = -\tan x$ s'en déduit facilement.

Les relations suivantes ont également lieu

- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\tan(\pi + x) = \tan x$

Preuve

$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - (-x)) = -\cos(-x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = \sin(\pi - (-x)) = \sin(-x) = -\sin x$

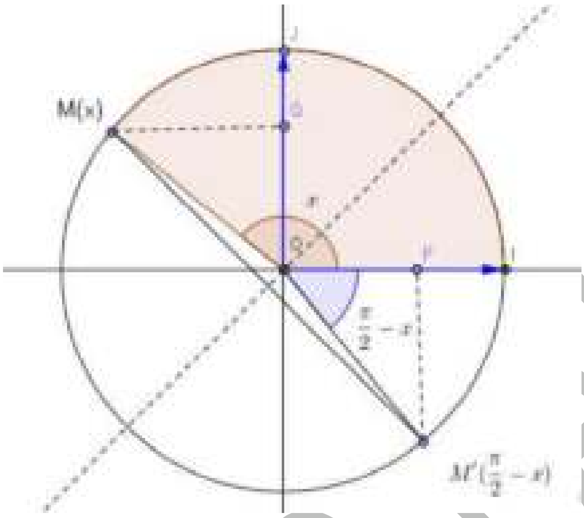
$\tan(\pi + x) = \tan x$ s'en déduit facilement.

Nous avons aussi :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan}\, x$

Preuve



Soit M, le point image de x sur le cercle trigonométrique; M', l'image de M par rapport à la première bissectrice. Ainsi, M' est l'image de $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique. En effet, J est l'image de I par la première bissectrice car cette dernière est la médiatrice de $[IJ]$ puisque OIJ est isocèle en O. De plus, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM}) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})[2\pi] \equiv x - \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Comme J et M sont symétriques à I et M' par rapport à la première bissectrice respectivement alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) \equiv -(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} - x[2\pi]$ donc M' a pour abscisse curviligne $\frac{\pi}{2} - x$. Soit Q, le projeté orthogonal de M sur (OJ) et P celui de M' sur (OI). OQM et OPM' sont des triangles rectangles dont les hypothénuses ont la meme longueur et qui ont un angle aigu de meme mesure donc ils sont isométriques. Ainsi, $OQ = OP$ et $MQ = M'P$ donc $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $-\cos x = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ d'où $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{cotan}\, x$ s'en déduit facilement.

Enfin, nous avons :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{cotan}\, x$

Preuve

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \sin(-x) = -\sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \cos(-x) = \cos x$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \text{cotan}x$ s'en déduit facilement.

Exercice

1. Simplifier $A(x) = \cos(3\pi + x) + \sin(2\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos(\pi - x)$
2. Montrer que $\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \sin\frac{7\pi}{5} = 0.$
3. Montrer que $sin^2\frac{\pi}{8} + \ sin^2\frac{5\pi}{14} + \ sin^2\frac{3\pi}{8} + \ sin^2\frac{\pi}{7} = 2$
4. On donne $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
   a. Montrer que $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. En déduire que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
   b. Montrer que $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ **(0,5 pt)**

Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\frac{13\pi}{12}$ et de $\sin\frac{11\pi}{12}$.

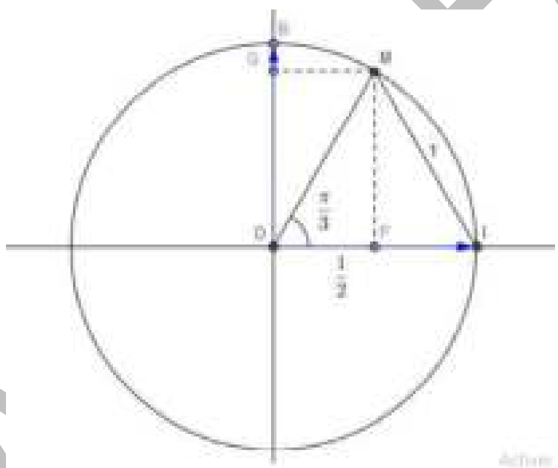
4. Valeurs particulières du cosinus, du sinus et de la tangente

Les réels x du tableau suivant sont dits mesures en radians d'angles orientés remarquables. Leurs lignes trigonométriques doivent être retenues par cœur.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

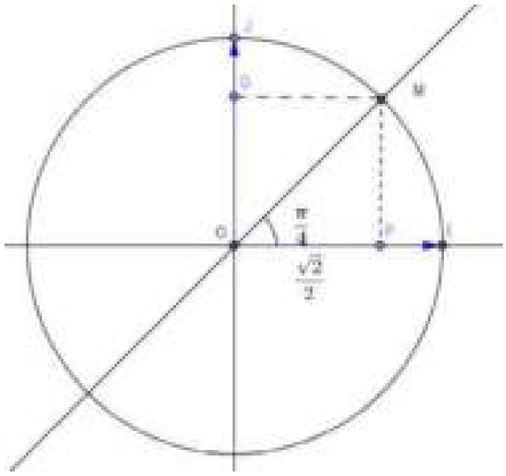
Preuve

I, J et I' (point diamétralement opposé à I) sont les images respectives de 0, $\frac{\pi}{2}$ et π sur le cercle trigonométrique d'où $\cos 0 = 1; \sin 0 = 0; \cos\frac{\pi}{2} = 0; \sin\frac{\pi}{2} = 1; \cos \pi = -1; \sin \pi = 0.$



Soit M le point tel que OIM soit équilatéral direct. Ainsi M est sur le cercle trigonométrique (car $OM = OI = 1$). $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{3} rad[2\pi]$ et donc M est d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{3}$. Le projeté orthogonal P de M sur (OI) est le milieu de $[OI]$. Par suite $OP = \overline{OP} = 1$ d'où $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Le projeté orthogonal de M sur (OJ) est sur $[OJ]$ donc $\overline{OQ} = OQ = \sin\frac{\pi}{3} > 0$. Comme $sin^2\frac{\pi}{3} = 1 - cos^2\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ donc $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ donc $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$



Soit M le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{OIJ}$ et l'arc non orienté $\widehat{IJ}$. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{4} rad[2\pi]$ et donc M est d'abscisse curviligne $\frac{\pi}{4}$. Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur (OI) et (OJ). On a : $OP = OQ$ (car M est sur la bissectrice et est équidistant des côtés). Par suite $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$. Ainsi $cos^2\frac{\pi}{4} + sin^2\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow 2cos^2\frac{\pi}{4} = 1$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$ (car $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} > 0$).

NB : La dernière ligne du tableau s'obtient en appliquant $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et en remarquant que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Exercice d'application

Calculer les lignes trigonométriques de : $\frac{301\pi}{3}$; $\frac{-239\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$

5. Formules trigonométriques

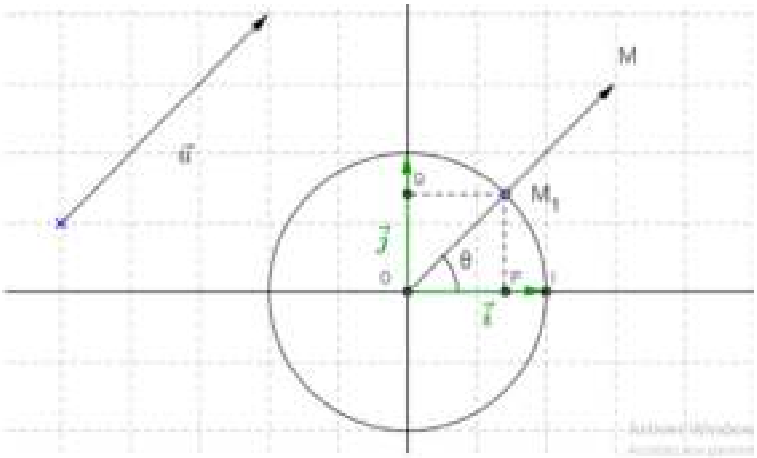
a. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée directe

Rappel : Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Le couple de réels (x, y) tel que : $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est appelé coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x, y)$.

Propriété :

Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée directe du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul alors on a : $\vec{u}\begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \cos(\vec{\imath}, \vec{u}) \\ \|\vec{u}\| \sin(\vec{\imath}, \vec{u}) \end{pmatrix}$.

Preuve



$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormée direct. Soit θ une mesure en radians de $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$ et considérons le cercle trigonométrique. Soient M et M_1 tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_1} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$. Ainsi M_1 est sur le cercle trigonométrique et θ est une abscisse curviligne de M_1. Par suite $M_1\binom{\cos\theta}{\sin\theta}$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OM_1} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$. Ainsi $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\|.\overrightarrow{OM_1} = \|\overrightarrow{OM}\|(\cos\theta + \sin\theta) = \|\vec{u}\|(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})$ d'où $\vec{u}\begin{pmatrix}\|\vec{u}\|\cos\theta\\ \|\vec{u}\|\sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|\vec{u}\|\cos\,(\vec{\imath},\vec{u})\\ \|\vec{u}\|\sin(\vec{\imath},\vec{u})\end{pmatrix}$.

b. Expression trigonométrique du produit scalaire

Propriété : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Preuve

Soit $\vec{u}' = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{v}'$ tel que $\|\vec{v}'\| = 1; (\vec{u}',\vec{v}') \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Ainsi $(\vec{u}',\vec{v}')$ est une base orthonormée directe donc dans cette base, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}\|\vec{u}\|\cos\,(\vec{u'},\vec{u})\\ \|\vec{u}\|\sin(\vec{u'},\vec{u})\end{pmatrix}$ or $(\vec{u'},\vec{u}) \equiv (\vec{u},\vec{u})[2\pi] \equiv 0[2\pi]$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}\|\vec{u}\|\\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\|\vec{v}\|\cos\,(\vec{u'},\vec{v})\\ \|\vec{v}\|\sin(\vec{u'},\vec{v})\end{pmatrix}$ or $(\vec{u'},\vec{v}) \equiv (\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},\vec{v})[2\pi] \equiv (\vec{u},\vec{v})[2\pi]$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix}\|\vec{v}\|\cos\,(\vec{u},\vec{v})\\ \|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})\end{pmatrix}$

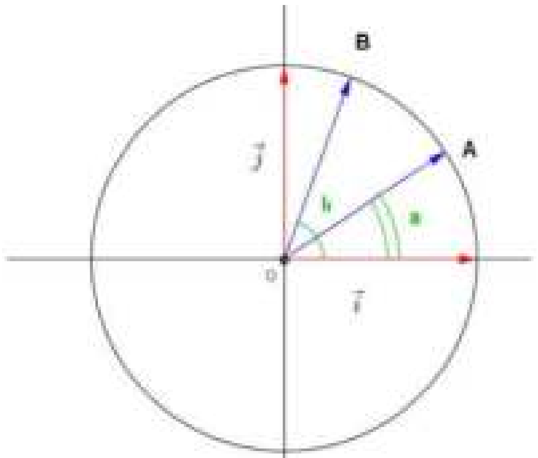
Dans la base orthonormée $(\vec{u}',\vec{v}')$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\,(\vec{u},\vec{v}) + 0.\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\,(\vec{u},\vec{v})$.

c. Formules d'addition : $a, b \in \mathbb{R}$

- $\cos\,(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\cos\,(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\sin\,(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$
- $\sin\,(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

- $tan(a-b) = \frac{tan\, a - tan\, b}{1 + tan\, a\, tan\, b}$ avec $cos\, a \neq 0$; $cos\, b \neq 0$; $cos(a-b) \neq 0$
- $tan(a+b) = \frac{tan\, a + tan\, b}{1 - tan\, a\, tan\, b}$ avec $cos\, a \neq 0$; $cos\, b \neq 0$; $cos(a+b) \neq 0$

Preuve :



Soient A et B des points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectives a et b. $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv b - a[2\pi]$. D'une part, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\|.\|\overrightarrow{OB}\| \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = 1$. D'autre part, dans la base orthonormée $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on a : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Ainsi, on a : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Par conséquent $\cos(a+b) = \cos\big(a-(-b)\big) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$ d'où

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$\sin(a-b) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - (a-b)) = \cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$$

$$= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right)\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Ainsi, $\sin(a+b) = \sin\big(a-(-b)\big) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b)$ d'où

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b} = \frac{\frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$ d'où

$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

$\tan(a+b)=\tan(a-(-b))=\frac{\tan a-\tan(-b)}{1+\tan a\tan(-b)}$ d'où $\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$

NB : Les formules d'addition sont à retenir par cœur.

d. Formules de duplication : Soit $a\in\mathbb{R}$

- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$
- $\sin 2a=2\sin a\cos a$

Preuve

$\cos 2a=\cos(a+a)=\cos a\cos a-\sin a\sin a$ d'où $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$

Comme $\sin^2 a=1-\cos^2 a$ et $\cos^2 a=1-\sin^2 a$ donc on a $\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$ d'où $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

$\sin 2a=\sin(a+a)=\sin a\cos a+\cos a\sin a$ d'où $\sin 2a=2\sin a\cos a$

Remarque

Les égalités $\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$ permettent de linéariser $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$

Ainsi, on a : $\cos 2a=2\cos^2 a-1\Leftrightarrow\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ et $\cos 2a=1-2\sin^2 a\Leftrightarrow\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

e. Formules de linéarisation

Les formules suivantes sont dites formules de linéarisation et permettent de transformer un produit d'expressions trigonométriques en une somme. Elles s'obtiennent à partir des formules d'addition et il n'est pas nécessaire de les retenir par cœur.

- $\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$
- $\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$
- $\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$
- $\cos a\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

Preuve

Comme $cos\ (a-b) = cos\ a\ cos\ b + sin\ a\ sin\ b$ et $cos\ (a+b) = cos\ a\ cos\ b - sin\ a\ sin\ b$ donc $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\ cos\ a\ cos\ b$ d'où $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.

De même $cos\ (a-b) - cos(a+b) = 2\ sin\ a\ sin\ b$ d'où $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

Comme $sin\ (a-b) = sin\ a\ cos\ b - cos\ a\ sin\ b$ et $sin\ (a+b) = sin\ a\ cos\ b + cos\ a\ sin\ b$ donc $sin\ (a+b) + sin\ (a-b) = 2\ sin\ a\ cos\ b$ d'où $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$sin\ (a+b) - sin\ (a-b) = 2\ cos\ a\ sin\ b$ d'où $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

f. Formules de factorisation

Les formules suivantes sont dites formules de factorisation et permettent de transformer une somme d'expressions trigonométriques en un produit. Elles sont parfois utiles dans la résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques. Elles s'obtiennent à partir des formules d'addition et il n'est pas nécessaire de les retenir par cœur.

- $cos\ a + cos\ b = 2\ cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}$
- $cos\ a - cos\ b = -2\ sin\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2}$
- $sin\ a + sin\ b = 2\ sin\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}$
- $sin\ a - sin\ b = 2\ cos\frac{a+b}{2}sin\frac{a-b}{2}$

Preuve

On remarque que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ donc on a :

$cos\ a + cos\ b = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right)$

$= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Donc $cos\ a + cos\ b = 2\ cos\frac{a+b}{2}cos\frac{a-b}{2}$

De même, on montre les 3 formules restantes.

Exercice d'application

1. Montrer que $\cos x = 2\,cos^2\frac{x}{2} - 1$. En déduire que $\cos x = \frac{1-tan^2\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}$

2. Montrer que $\sin x = 2\tan\frac{x}{2}cos^2\frac{x}{2}$. En déduire que $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+tan^2\frac{x}{2}}$

3. Montrer que $\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-tan^2\frac{x}{2}}$

IV. Equations trigonométriques

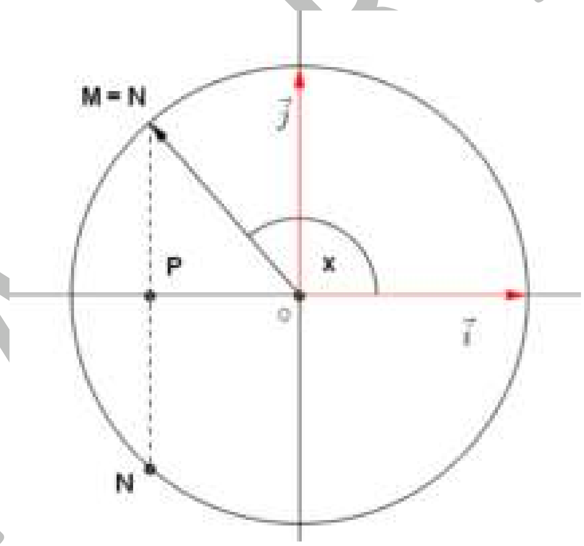
Soit a un réel fixé.

1. Du type $\boldsymbol{cos\ x = cos\ a}$

a. Théorème

$$cos\ x = cos\ a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou\ bien \quad : k, k' \in \mathbb{Z} \\ x = -a + 2k'\pi \end{cases}$$

Preuve



Soit M et N les points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectives x et a on a : $cos\ x = cos\ a \Leftrightarrow$ M et N ont même abscisse dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ce qui signifie que M et N sont confondus ou symétriques par rapport à (OI). Or M=N$\Leftrightarrow x = a + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$; M et N symétriques par rapport à $(OI) \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$ sont opposés donc $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv -(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})[2\pi]$ d'où $= -a + 2k'\pi; k' \in \mathbb{Z}$. Par suite $\cos x = \cos a \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou\ bien \quad ; k, k' \in \mathbb{Z}\, ; \\ x = -a + 2k'\pi \end{cases}$$

b. Exemple

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $cos\ x = cos\frac{\pi}{3}$

2. En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de $cos\ x = cos\frac{\pi}{3}$.

Preuve

1. $cos\ x = cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \end{cases}; k, k' \in \mathbb{Z}$ d'où $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow k = 0 \ \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \in S; -\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \leq \pi \Leftrightarrow \ k' = 0 \ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \in S$

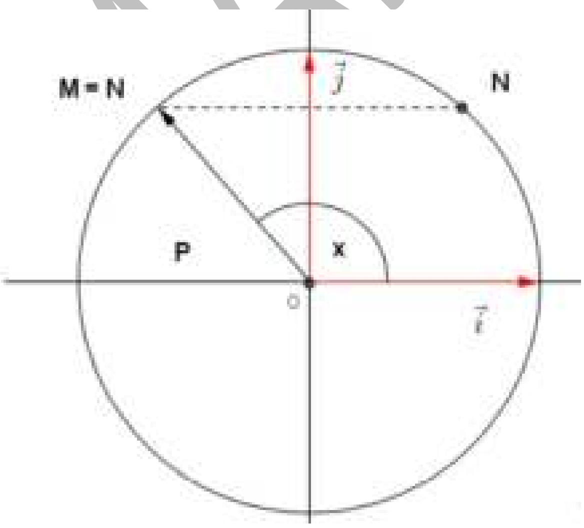
D'où $S = \left\{\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right\}$

2. Du type $\boldsymbol{sinx = sin\ a}$

a. Théorème

$$sin\ x = sin\ a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou\ bien \\ x = \pi - a + 2k'\pi \end{cases} : k, k' \in \mathbb{Z}$$

Preuve



Soient M et N les points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectives x et a on a : $sin\ x = sin\ a \Leftrightarrow$ M et N ont même ordonnée dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ce qui signifie que M et N sont confondus ou symétriques par rapport à (OJ). Or M=N$\Leftrightarrow x = a + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$; M et N symétriques par rapport à (OJ) $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv \pi - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})[2\pi]$ d'où $= \pi - a + 2k'\pi; k' \in \mathbb{Z}$. Par suite sin x = sin a $\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou\ bien \\ x = \pi - a + 2k'\pi \end{cases}; k, k' \in \mathbb{Z}$

b. Exemple

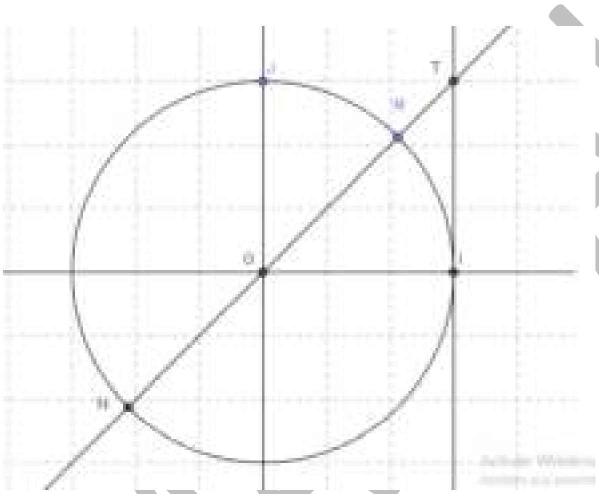
Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi]$ $\sin x = \sin\frac{5\pi}{4}$

3. Du type $\tan x = \tan a$

a. Théorème : Supposons que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$tan\ x = tan\ a \Leftrightarrow x = a + k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$

Preuve



Soient M et N les points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectives x et a.

$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow N \neq J$ et $N \neq J' \Leftrightarrow$ (ON) et (D) (la tangente au cercle en I) sont sécantes en T: $\tan a = \overline{IT}$; $\tan x = \tan a \Leftrightarrow \tan x = \overline{IT} \Leftrightarrow \{T\} = (D) \cap (OM) \Leftrightarrow M = N$ ou O milieu de $[MN]$. $M = N \Leftrightarrow x = a + 2k\pi = a + k'\pi; k' = 2k \in \mathbb{Z}$ et O milieu de $[MN] \Leftrightarrow (\overrightarrow{OI'}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \equiv x[2\pi]; (\overrightarrow{OI'}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\overrightarrow{OI'}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})[2\pi] \equiv \pi + a[2\pi] \Leftrightarrow x = \pi + a[2\pi] \Leftrightarrow x = \pi + a + 2t\pi = a + (2t+1)\pi = a + k''\pi\ ; k'' = 2t + 1 \in \mathbb{Z}$. Ainsi $tan\ x = tan\ a \Leftrightarrow x = a + k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$

b. Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0; 2\pi]$ $\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

4. Du type $\cos x = a$ et $\sin x = a$

a. Théorème

- Si $a \notin [-1;1]$ alors les équations $cos\ x = a$ et $sin\ x = a$ n'ont pas de solutions donc $S = \emptyset$.
- Si $a \in [-1;1]$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$: $a = \cos\alpha = \sin\alpha$. Par suite $cos\ x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ ou\ bien \\ x = -\alpha + 2k'\pi \end{cases}$: $k, k' \in \mathbb{Z}$ et $sin\ x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ ou\ bien \\ x = \pi - \alpha + 2k'\pi \end{cases} : k, k' \in \mathbb{Z}$

Preuve

Supposons que $a \notin [-1;1]$. Comme $cos\ x, sin\ x \in [-1;1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\cos x \neq a$ et $\sin x \neq a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Supposons que $a \in [-1;1]$, Soient P et Q les points de (OI) et (OJ) respectivement tels que $\overline{OP} = a$ et $\overline{OQ}$. Les perpendiculaires à (OI) et (OJ) en P et Q respectivement coupe le cercle trigonométrique en un même point M. Ce point M est de coordonnées $M\binom{a}{a}$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Ainsi Toute mesure en radians α de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ est tel que $\cos\alpha = a$ et $\sin\alpha = a$. Par suite $cos\ x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ ou\ bien \\ x = -\alpha + 2k'\pi \end{cases}$: $k, k' \in \mathbb{Z}$ et $sin\ x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ ou\ bien \\ x = \pi - \alpha + 2k'\pi \end{cases} : k, k' \in \mathbb{Z}$.

b. Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$, $cos\ x = \frac{1}{2}$ et $sin\ x = -3$

Solution

- $cos\ x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cos\ x = cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x} = \frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi \text{ ou} \\ \mathrm{x} = -\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}'\pi \end{cases}; k, k' \in \mathbb{Z}$ d'où $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi; -\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}'\pi; \mathrm{k}, \mathrm{k}' \in \mathbb{Z}\right\}$
- $-3 \notin [-1,1]$ donc $sin\ x = -3$ n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$.

5. Du type $\boldsymbol{tan\ x = a}$

a. Théorème

$tan\ x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi;\ a = \tan\alpha, k, \in \mathbb{Z}$

Preuve

Considérons la tangente au cercle trigonométrique en I et T le point de cette tangente tel que $\overline{IT} = a$. La droite (OT) coupe le cercle trigonométrique en deux points M et M' (car $d'(O,(OT)) = 0 < 1 = rayon\ du\ cercle\ trigonométrique$). Toute abscisse curviligne α de M ou de M' est telle que $\tan\alpha = \overline{IT} = a$. Ainsi $tan\ x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, $\tan \mathrm{x} = \mathrm{a} \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi;\ a = \tan\alpha, k, \in \mathbb{Z}$

b. Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\tan x = 1$

Solution

$\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{\pi}{4} + \mathrm{k\pi}, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$

6. Du type $\boldsymbol{a cos\,x + b\ sinx = c}$ où $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$

a. Propriété

$Si\ a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $cos\ \theta = a$ et $sin\ \theta = b$

Preuve

Soit $M\binom{a}{b}$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. $a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{OM} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{M} \in$ au cercle trigonométrique. Soit θ une mesure en radians de $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$. Ainsi, $a = cos\ \theta$ et $sin\ \theta = b$

b. Théorème

$acos\ x + b\ sinx = c \Leftrightarrow cos(x - \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

Preuve

$$\mathrm{a}\cos x + b\ sinx = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x\right) = c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Or $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ donc d'après la propriété ci-dessus, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $cos\ \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ainsi, on a :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \cos\theta\cos x + \sin\theta\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x-\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

c. Exemples

Résolvons dans $\mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = 1$ *et* $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 3$;

- $\cos x + \sin x = 1$; $a = b = 1$; $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$

$$\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \quad ou\ bien \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi \end{cases} ;\ k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \quad ou\ bien \\ x = 2k'\pi \end{cases} ;\ k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}\right\}$$

- $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 3$; $a = \sqrt{3}$; $b = -1$; $\sqrt{a^2+b^2} = 2$

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 3 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos x - sin\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} \text{ or } \frac{3}{2} \notin [-1,1] \text{ donc } S = \emptyset$$

V. Inéquations trigonométriques

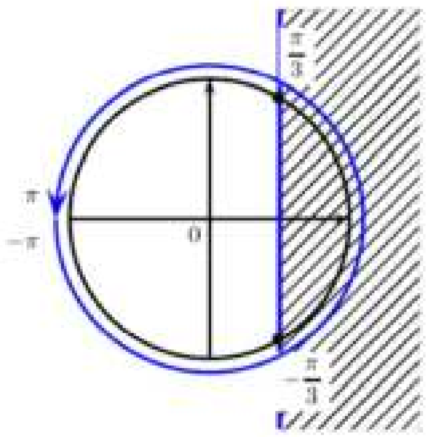
Les inéquations trigonométriques ci-dessous se résolvent en général par lecture graphique sur le cercle trigonométrique. Les solutions d'une inéquation trigonométrique sont généralement une réunion d'intervalles dont les bornes sont les solutions de l'équation correspondante. Nous allons les étudier à partir de quelques exemples.

1. Exemple 1

Résolvons dans $]-\pi;\pi]$ $cos\ x < \frac{1}{2}$

Solution

On commence par résoudre l'équation $cos\ x = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$. On obtient $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. On place les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique. Elles sont symétriques par rapport à (OI). La droite verticale passant par ces deux images permettent souvent par lecture graphique de savoir l'arc ou la réunion d'arcs qui contiennent les images des solutions de l'inéquation. Les réels x tels que $cos\,x < \frac{1}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points du cercle trigonométrique dont les abscisses dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont inférieures strictement à $\frac{1}{2}$. Ces points sont situés sur l'arc du cercle trigonométrique situé à gauche de la droite verticale en bleu du schéma ci-dessous. Comme les images de la borne inférieure et de la borne supérieure de $]-\pi;\pi]$ se trouve sur cet arc alors on fait une lecture en allant dans le sens direct en partant de la borne inférieure.



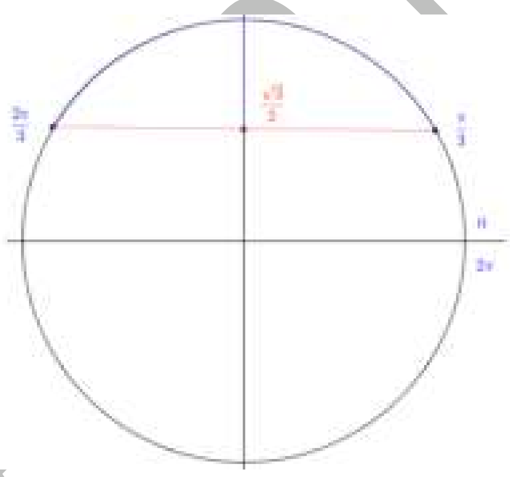
Ainsi $S = \left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

2. Exemple 2

Résolvons dans $[0,2\pi[$ $sin\ x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

On résout l'équation $sin\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0,2\pi[$. On obtient $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$. On place les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique. Elles sont symétriques par rapport à (OJ). On trace la droite passant par ces deux points. Les réels x tels que $sin\ x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points du cercle trigonométrique dont les ordonnées dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont supérieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces points sont situés sur l'arc du cercle trigonométrique situé au-dessus de la droite horizontale en rouge du schéma ci-dessous. Il s'agit maintenant de chercher les réel x de $[0,2\pi[$ ayant leurs images sur cet arc de cercle.



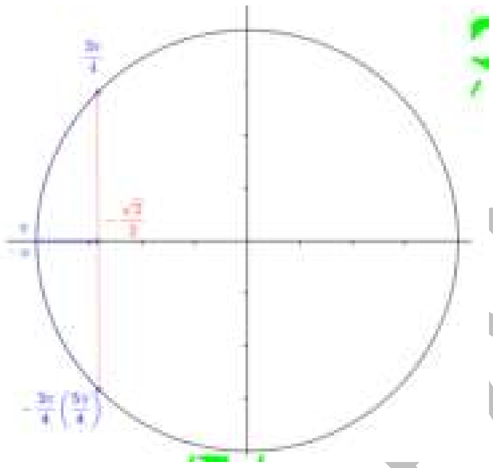
$S = \left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$

3. Exemple 3

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ $cos\ x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution

On résout l'équation $cos\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$. On obtient $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$. On place les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique. Elles sont symétriques par rapport à (OI). On trace la droite passant par ces deux points. Les réels x tels que $cos\ x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points du cercle trigonométrique dont les abscisses dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont inférieures strictement à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ces points sont situés sur l'arc du cercle trigonométrique situé à gauche de la droite verticale en rouge du schéma ci-dessous. Il s'agit maintenant de chercher les réel x de $]-\pi;\pi]$ ayant leurs images sur cet arc de cercle.



$S = \left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

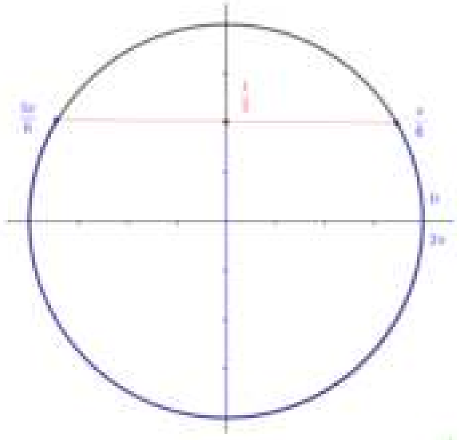
4. Exemple 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\sin x \leq \frac{1}{2}$

Solution

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ $\sin x \leq \frac{1}{2}$, on commence par la résoudre dans un intervalle de longueur 2π (car dans un tel intervalle, on peut avoir au moins deux solutions) par exemple dans $[0; 2\pi]$ puis on ajoute $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ aux bornes de chaque intervalle de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est la réunion de ces intervalles où $k \in \mathbb{Z}$.

On résout l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$. On obtient $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. On place les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique. Elles sont symétriques par rapport à (OJ). On trace la droite passant par ces deux points. Les réels x tels que $\sin x \leq \frac{1}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points du cercle trigonométrique dont les ordonnées dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$. Ces points sont situés sur l'arc du cercle trigonométrique situé en dessous de la droite horizontale en rouge du schéma ci-dessous. Il s'agit maintenant de chercher les réel x de $[0; 2\pi]$ ayant leurs images sur cet arc de cercle.



L'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi]$ est $\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$. Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est la réunion de tous les intervalles de la forme $\left[2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$; $\left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\right]$; $k \in \mathbb{Z}$.

5. Exemple 5

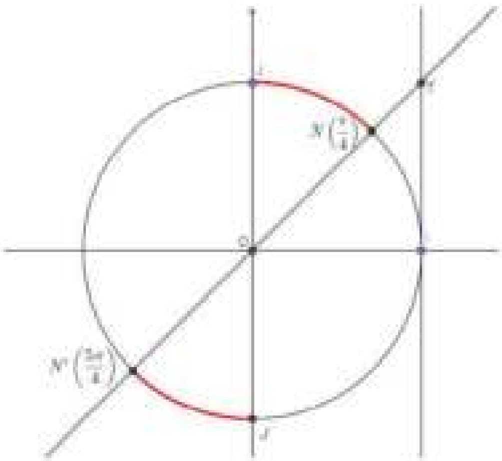
Résoudre dans $[0; 2\pi[$ $tan\, x > 1$

Solution

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ $\tan x > 1$, on commence par la résoudre dans un intervalle de longueur 2π par exemple dans $[0; 2\pi]$ puis on ajoute $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ aux bornes de chaque intervalle de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est la réunion de ces intervalles où $k \in \mathbb{Z}$.

On résout dans $[0; 2\pi[$, l'équation $\tan x = 1$. On a : $\tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi < 2\pi \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}\ ou\ x = \frac{5\pi}{4}$

On représente sur le cercle trigonométrique l'image de $\frac{\pi}{4}$. Celle de $\frac{5\pi}{4}$ est le symétrique par rapport à O de l'image de $\frac{\pi}{4}$. Les réels x tels que $tan\, x > 1$ sont les abscisses curvilignes des points situés sur les arcs en rouge de la figure ci-dessous privés des points I, J, I' et J'.



Dans $[0; 2\pi[$, $\tan x > 1 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Ainsi l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de $\tan x > 1$ est la réunion de tous les intervalles de la forme $\left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$, $\left]\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations trigonométriques suivantes :

1. $\sqrt{2}\, cos\ 2x + 1 < 0$

2. $\frac{1}{sin^2 x} - (\sqrt{3} + 1)cotanx + \sqrt{3} - 1 > 0$

Solution

1. Nous allons d'abord la résoudre dans $[0,2\pi[$

$\sqrt{2}\, cos\ 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow \cos 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t = 2x$

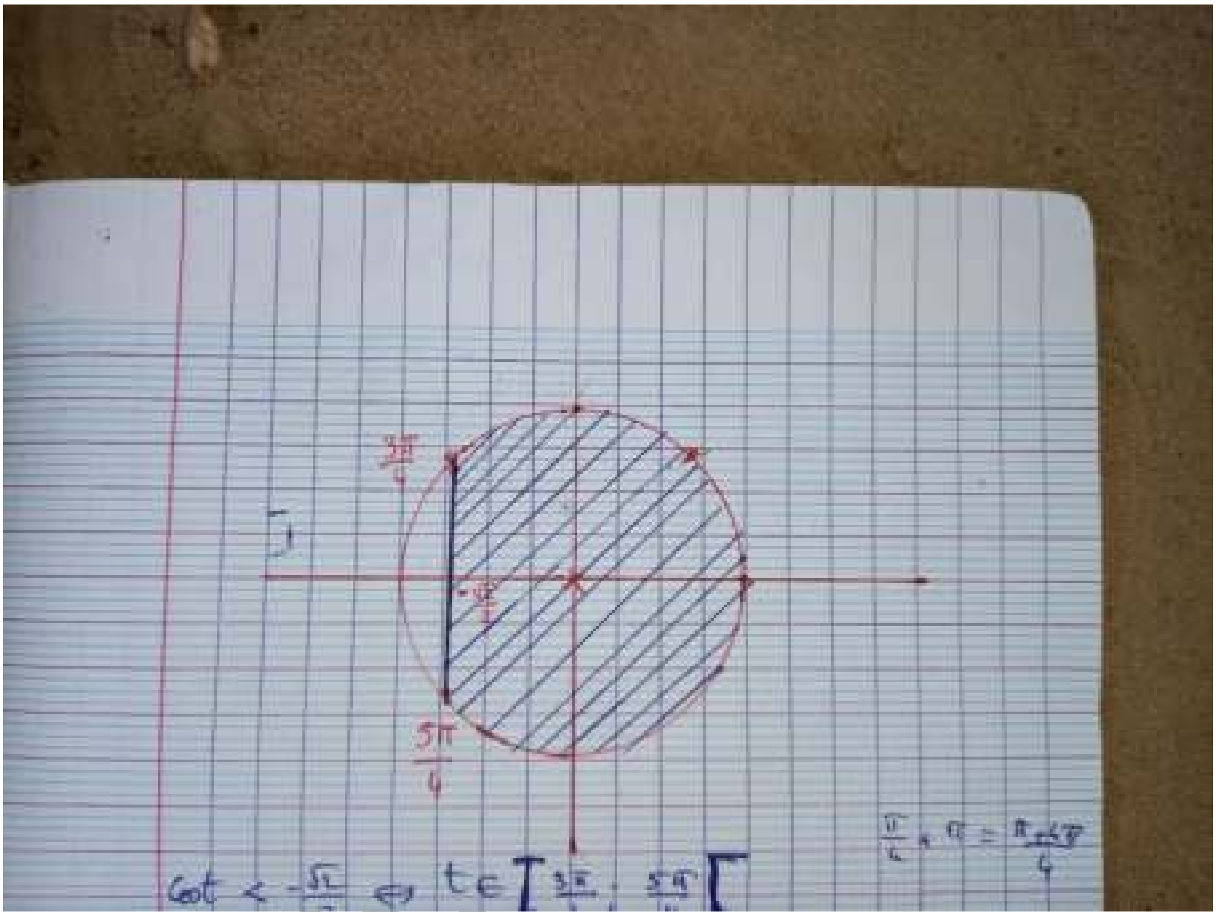
Résolvons dans $[0,2\pi[$ $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \in [0; 2\pi[\Leftrightarrow 0 \leq t < 4\pi$ où $t = 2x$

Dans $[0; 2\pi[$ $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos t = cos\frac{3\pi}{4}$; $t \in [0; 4\pi[$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } t = \frac{5\pi}{4}$$

Plaçons les images de $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique. Elles sont symétriques par rapport à $(0, \vec{\imath})$. Les réels t tel que $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points de l'arc de cercle situé à gauche de la droite verticale en bleu du schéma ci-dessous.



Dans $[0; 4\pi[$, $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t \in \left]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[\Leftrightarrow 2x \in \left]\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[\Leftrightarrow x \in \left]\frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right[$

Ainsi, dans $[0; 2\pi[$, $\cos 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}\right[$

Dans $\mathbb{R}$, les solutions de $\cos 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les réunions d'intervalles de la forme $\left]\frac{3\pi}{8} + 2k\pi; \frac{5\pi}{8} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$.

2. On va la résoudre dans un intervalle de longueur 2π: soit $[0; 2\pi[$

$$\frac{1}{sin^2 x} - (\sqrt{3} + 1)\, cotanx + \sqrt{3} - 1 > 0 \Leftrightarrow cotan^2 x - (\sqrt{3} + 1)cotanx + \sqrt{3} > 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - (\sqrt{3} + 1)X + \sqrt{3} > 0\,; X = cotan\, x$$

$$\Leftrightarrow (X - 1)(X - \sqrt{3}) > 0; X = cotan\, x$$

$\Leftrightarrow X < 1$ ou $X > \sqrt{3}$; $X = cotan\ x$

$\Leftrightarrow cotan\ x < 1$ ou $cotan\ x > \sqrt{3}$

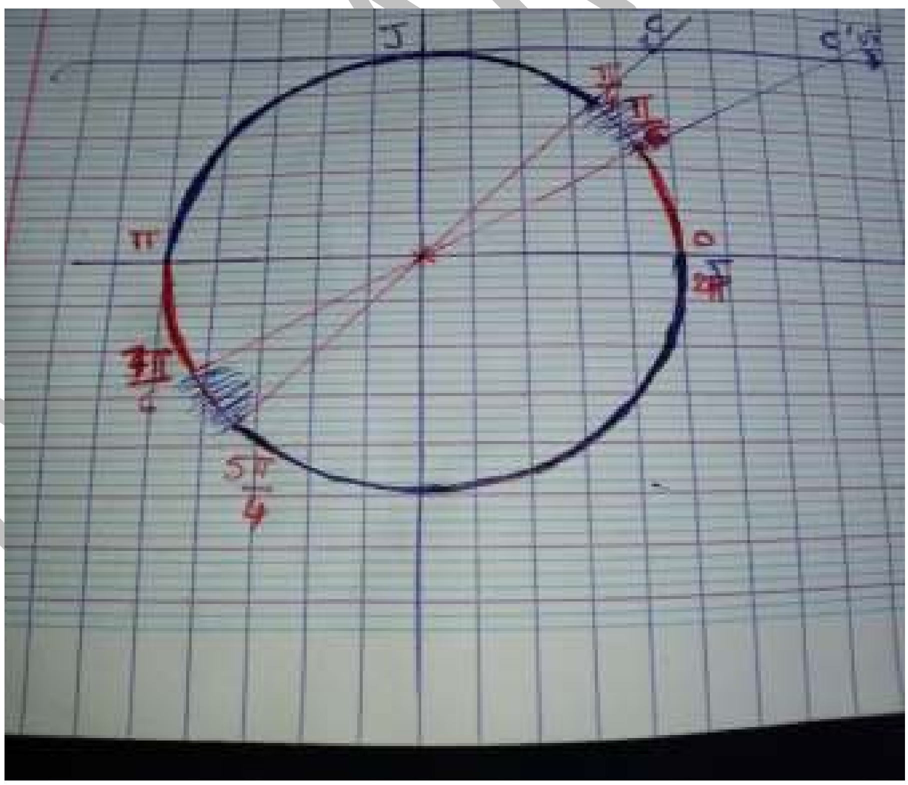
Résolvons dans $[0; 2\pi[$ $cotan\ x < 1$ et $cotan\ x > \sqrt{3}$. Pour ce, on résout dans $[0; 2\pi[$ $cotan\ x = 1$ et $cotan\ x = \sqrt{3}$.

$cotan\ x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\tan x} = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}\ ou\ x = \frac{5\pi}{4}$

$cotan\ x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\tan x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}\ ou\ x = \frac{7\pi}{6}$

Représentons les images de $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\ et\ \frac{7\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique. Celles de $\frac{\pi}{4}\ et\ \frac{5\pi}{4}$ sont symétriques par rapport à O tout comme celles de $\frac{\pi}{6}\ et\ \frac{7\pi}{6}$.

Les réels x tels que $cotan\ x < 1$ sont les abscisses curvilignes des points situés sur les arcs en bleu de la figure ci-dessous et ceux tels que $cotan\ x > \sqrt{3}$ sont les abscisses curvilignes des points situés sur les arcs en rouge de la figure ci-dessous.



Ainsi, les réels x tels que $cotan\ x < 1$ ou $cotan\ x > \sqrt{3}$ sont les points situés sur les arcs en rouge et en bleu de la figure ci-dessous

Dans $[0; 2\pi[$, $cotan\ x < 1$ ou $cotan\ x > \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}; \pi\right[\cup \left]\pi, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right[$

Ainsi les solutions dans $\mathbb{R}$ de $\frac{1}{sin^2x} - \left(\sqrt{3}+1\right) cotanx + \sqrt{3} - 1 > 0$ sont les réunions d'intervalles de la forme $\left]2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[, \left]\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right[, \left]\pi + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right[; \left]\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$