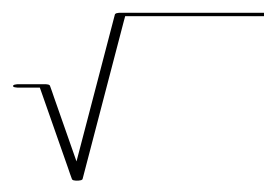
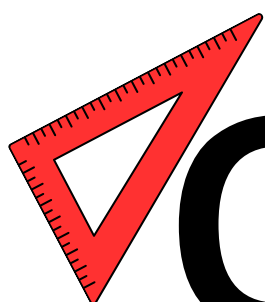
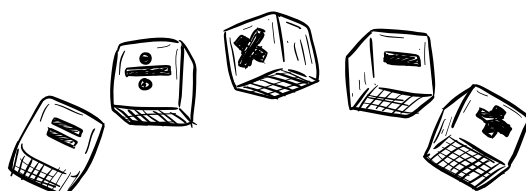
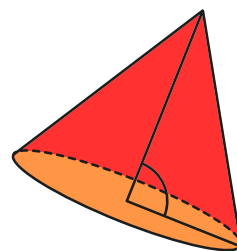
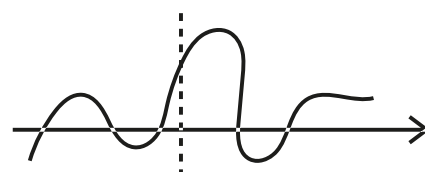
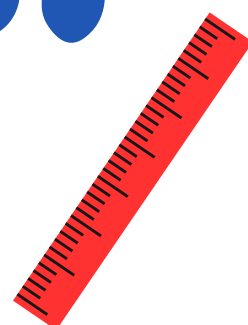
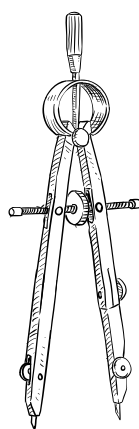
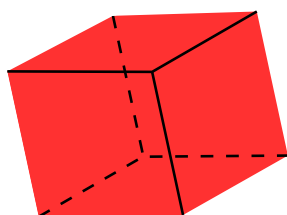


Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Cours Maths ISI



Auteur : Dr. Amar Fall

Telephone : 773897032

Le programme de 1S₁ est divisé en quatre parties : **Algèbre ; Analyse ; Géométrie et Organisation des données.**

L'algèbre est divisée en trois thèmes :

- I. Applications
- II. Polynômes
- III. Equations ; inéquations ; systèmes

L'analyse est divisée en deux thèmes :

- I. Suites numériques
- II. Fonction numérique d'une variable réelle

La géométrie est divisée en trois parties : Géométrie plane ; géométrie dans l'espace et la trigonométrie :

- Géométrie plane : Elle est divisée en deux thèmes :
 - I. Compléments sur le calcul vectoriel
 - II. Transformations ponctuelles et isométries
- Géométrie dans l'espace : Elle est divisée en trois thèmes :
 - I. Vecteurs dans l'espace
 - II. Produit scalaire
 - III. Droites, plans et sphère
- Trigonométrie : Elle est divisée en trois thèmes :
 - I. Angles orientés
 - II. Formules trigonométriques
 - III. Equations et inéquations trigonométriques

L'organisation des données est divisée en thèmes :

- I. Dénombrement
- II. Statistique (Série à deux variables)

Ce programme est prévu pour 8h de cours par semaine, soit 4 séances de 2 h par semaine:

Notre emploi du temps est :

Lundi : 8h-10h Salle 12 ; Mardi 8h-10h Salle 19 ; jeudi 8h-10h Salle 15 et vendredi 10h-12H salle 19

CHAPITRE 1 : APPLICATIONS

Durée : 7h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Justifier qu'une application est injective
- ✓ Justifier qu'une application est surjective
- ✓ Justifier qu'une application est bijective

NB : Les objectifs sur le prolongement et la restriction d'une fonction à un intervalle donné ne pourront pas être atteints ici car le chapitre sur les fonctions numériques n'a pas été traité en seconde. Cette partie sera faite ultérieurement.

Prérequis :

- ✓ Ensemble
- ✓ Calculer littéral ;

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;
- ✓ Mon cours de 1^{ère} S2 au Lycée de Ndongol ;
- ✓ CIAM 1 SM.

Plan du chapitre

I. Définition et notation

1. Activités
2. Définition et vocabulaire
3. Remarques
4. Exemples et contre-exemples

II. Image directe et image réciproque d'un ensemble

1. Image directe
 - a. Définition
 - b. Exemples

2. Image réciproque

- a. Définition
- b. Exemples
- c. Remarque

III. Applications particulières

1. Application injective

- a. Définition
- b. Exemple et contre-exemple
- c. Propriété
 - Exemple
 - Exercice d'application
 - Remarque

2. Application surjective

- a. Définition
- b. Exemple et contre-exemple
- c. Propriété

3. Application bijective

- a. Définition
- b. Exemple et contre-exemple
- c. Propriété
- d. Application réciproque d'une bijection

- Théorème-Définition
- Remarque
- Exemple

IV. Composition d'applications

- 1. Définition
- 2. Exemples
- 3. Remarques

Déroulement du cours

I. Définition et notation

- 1. Activités
 - a. Activité 1

Soient E et F les ensembles suivants : $E = \{Dr Fall; M. Sarr; M. Sow; Mme Mbow\}$ et $F = \{Maths; Arabe; Anglais; espagnol; SP\}$.

Dr Fall et M. Sow sont des profs de Maths, M. Sarr est un prof de SP et Mme Mbow est un prof d'anglais. En partant de E vers F , on peut associer à chacun des éléments de E , la matière qu'il enseigne qui est un élément de F . Ainsi Dr Fall et M. Sow sont associés à Maths ; M. Sarr est associé à SP et Mme Mbow est associée à Anglais.

Par ce procédé, chaque élément de E admet un et un seul associé dans F . Un tel procédé est dit application de E dans F . E est dit ensemble de départ (source) et F ensemble d'arrivée (but).

Par cette application, on dit que Dr Fall et M. Sow ont comme image Maths (ou bien que les antécédents de Maths sont Dr Fall et M. Sow) ; l'image de M. Sarr est SP et celle de Mme Mbow est Anglais.

Cette application peut être appelée f et représentée par le diagramme suivant dit diagramme sagittal.

b. Activité 2

Soient A et B les ensembles de nombres réels suivants : $A = \{0; 1,5; -2; \sqrt{2}\}$ et $B = \{0; 2\sqrt{2}; 5; -4; 6,1; 3\}$. On peut définir un procédé qui à chaque élément de A associe son double qui est dans B . Ainsi : 0 est associé à $2 \times 0 = 0$; 1,5 est associé à $2 \times 1,5 = 3$; -2 est associé à $2(-2) = -4$ et $\sqrt{2}$ est associé $2\sqrt{2}$. Par ce procédé, chaque élément de A a un et un seul associé dans B . On dit que ce procédé est une application de A dans B . L'associé d'un élément de A qui est dans B est dit image de cet élément de A et chaque élément de A est dit antécédent de son associé qui est dans B . Cette application peut être appelée g . Ainsi si on désigne par x un élément quelconque de A , l'image de x par g est $2x$ et est notée $g(x) = 2x$. On note : $g: A \rightarrow B: x \mapsto g(x) = 2x$ (On lit : g est une application de A dans B qui à x associe g de x égale $2x$).

2. Définition et vocabulaire

Soient E et F deux ensembles non vides quelconques. Une application de E (ensemble de départ ou la source) dans F (ensemble d'arrivée ou le but) est un procédé qui permet d'associer à chaque élément de E , un et un seul élément de F .

- Si l'application est appelée f alors elle est notée $f: E \rightarrow F$.
- Si $x \in E$ est associé à $y \in F$ par f alors on note $f: E \rightarrow F: x \mapsto f(x) = y$ ou simplement $f(x) = y$. Dans ce cas, x est dit antécédent de y par f et y est dit image de x par f .

3. Remarques

- Le procédé dont on parle peut être une relation, une phrase (comme dans les activités 1 et 2) ou une formule (l'activité 2 pouvait être traduite en une formule).
- Par une application f de E dans F , un élément de F peut ne pas avoir d'antécédent ou bien même peut avoir plusieurs antécédents dans E .
- Par un procédé f de E vers F , s'il existe au moins un élément de E qui n'a pas d'associé ou qui a plusieurs associés dans F alors f n'est pas une application.
- Noter que les flèches $\rightarrow$ et $\mapsto$ sont différentes : la première renvoie à "dans ou vers" et la seconde veut dire "associe".
- Si une application est définie par une formule alors la lettre utilisée est dite variable (elle peut être remplacée par toute autre lettre sans que cela ne change l'application. On dit que la variable est muette).

4. Exemples et contre-exemples

a. Exemples

- Le procédé de l'activité 1 est une application de E dans F appelée f représentée par :
- Le procédé de l'activité 2 est une application de A dans B appelée g . Elle peut être définie par la formule $g(x) = 2x$. On note $g: A \rightarrow B: x \mapsto g(x) = 2x$.
- Le procédé défini de $E = \text{l'humanité}$ dans $F = \text{l'humanité}$ qui à chaque personne associe son père est une application.
- Le procédé appelé f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule $f(x) = x$ est une application notée $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = x$. Elle est dite application identique (identité) de $\mathbb{R}$ et est notée $f = Id_{\mathbb{R}}$.
- Le procédé dit f définie de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \sqrt{x}$ est une application notée $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ dite application racine carrée.

b. Contre-exemples

- Le procédé défini de l'ensemble des hommes dans l'ensemble des femmes qui à un homme associe une femme à laquelle il est marié n'est pas une application car il y a des hommes célibataires (c'est-à-dire qui n'ont pas d'associé) ou des hommes polygames (c'est-à-dire qui ont plus plusieurs associés).

- Le procédé défini de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la formule $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas une application car un réel négatif n'a pas de racine carrée (d'associé).

II. Image directe et image réciproque d'un ensemble

1. Image directe

a. Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, A un sous-ensemble (partie) de E . L'image directe de A par f notée $f(A)$ est la partie de F constituée des images par f des éléments de A : $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Autrement dit $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)$

b. Exemples

- Par l'application g de l'activité 2, l'image directe de $A = \{1, 5; -2; \sqrt{2}\}$ par g est $g(A) = \{3; -4; 2\sqrt{2}\}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+1}$. Déterminons l'image directe par f de $]1; 4]$.

2. Image réciproque

a. Définition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, B un sous-ensemble de F . L'image réciproque de B par f notée $f^{-1}(B)$ est la partie de E constituée des antécédents par f des éléments de B : $f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$. Autrement dit $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

b. Exemples

- Par l'application g de l'activité 2, l'image réciproque de $C = \{-7; 0; 2\sqrt{2}\}$ par g est $g^{-1}(C) = \{0; \sqrt{2}\}$.
- Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = 2x - 1$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = x^2 - x - 2$. Déterminons $f^{-1}([1; 3])$ et $g^{-1}(\{0\})$.

c. Remarque

Si B est un sous-ensemble de F alors $f^{-1}(B)$ peut être vide c'est-à-dire peut ne pas avoir d'élément.

III. Applications particulières

1. Application injective

a. Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite injective (injection) si tout élément de F a au plus un (0 ou 1) antécédent dans E . Ce qui équivaut à dire que deux éléments quelconques et distincts de E ont des images distinctes dans F .

b. Exemple et contre-exemple

- L'application $g : A \rightarrow B$ de l'activité 2 est injective.
- L'application $f : E \rightarrow F$ de l'activité 1 n'est pas injective car l'élément Maths de F a deux antécédents dans E (Dr Fall et M. Sow).

c. Propriété

Une application $f : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si $(\Leftrightarrow)$ pour tous réels x et x' de E , on a : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Preuve :

$\Rightarrow$) Supposons que $f : E \rightarrow F$ est injective.

Soit $x, x' \in E$ tel que $f(x) = f(x')$. Posons $y = f(x); y = f(x') \in F$. Si $x \neq x'$ alors l'élément $y = f(x) = f(x')$ a donc deux antécédents distincts : (x et x') ce qui est absurde car f est injective d'où $x = x'$.

$(\Leftarrow)$ Supposons que pour tous réels x et x' de E , on a : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Soit $y \in F$ tel que y a plus d'un antécédent par f dans E : soient x et x' deux antécédents distincts de y par f dans E on a : $y = f(x) = f(x')$ donc on a $x = x'$ ce qui est absurde par suite y a au plus un antécédent par f dans E d'où f est injective.

Exemple

Montrons que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = -3x + 5$ est injective.

Exercice d'application : Montrer que les applications suivantes sont injectives :

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2x+1} \text{ et } g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = x^2$$

d. Remarque

Les propositions $(p \Rightarrow q)$ et $(\text{non } q \Rightarrow \text{non } p)$ sont équivalentes. On dit que l'une est la contraposée de l'autre. Ainsi si on considère que p est la proposition " $f(x) = f(x')$ " et q

est celle " $x = x'$ " alors non p est la proposition " $f(x) \neq f(x')$ " et non q est " $x \neq x'$ " donc f est injective $\Leftrightarrow (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \Leftrightarrow (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ pour tous $x, x' \in E$.

2. Application surjective

a. Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite surjective (surjection) si tout élément de F a au moins un (1 ou plusieurs) antécédent(s) dans E .

b. Exemple et contre-exemple

- ✓ L'application $f : E \rightarrow F$ définie par le diagramme sagittal ci-dessous est surjective.
- ✓ L'application $f : E \rightarrow F$ de l'activité 1 n'est pas surjective car l'élément Espagnol ou l'élément arabe de F n'ont pas d'antécédent dans E .

c. Propriété

Une application numérique à variable réelle (c'est-à-dire : Les ensembles de départ et d'arrivés sont composés de nombres réels) $f : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si pour tout réel y de F , l'équation $y = f(x)$ (d'inconnue x) admet au moins une (une ou plusieurs) solution(s) dans E .

Preuve : (Conséquence directe de la définition)

Exemple

Montrons que l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = 2x + 1$ est surjective.

Exercice d'application : Montrer que les applications suivantes sont surjectives :

$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto f(x) = x^2$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\} : x \mapsto g(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ sont surjectives.

d. Remarque

$f : E \rightarrow F$ est surjective $\Leftrightarrow f(E) = F$

3. Application bijective

➤ Définition

Une application $f: E \rightarrow F$ est dite bijective (une bijection) si f est à la fois injective et surjective.

➤ Exemple et contre-exemple

- ✓ L'application $f: E \rightarrow F$ définie par le diagramme sagittal ci-dessous est bijective
- ✓ L'application $f: E \rightarrow F$ de l'activité 1 n'est pas bijective car f n'est pas surjective.

➤ Propriété

Une application numérique à variable réelle $f: E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si pour tout réel y de F , l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x admet une et une seule solution dans E .

Preuve : (Conséquence directe de la définition)

Exemple

Montrons que l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = 2x + 1$ est bijective.

Exercice d'application

Montrer que $f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto f(x) = x^2$ est une bijection.

➤ Application réciproque d'une bijection

Théorème-définition

Soit $f: E \rightarrow F$ une bijection. Donc tout élément de F a un et un seul antécédent par f dans E . Ainsi, on peut définir une application notée f^{-1} de F dans E qui à tout élément y de F associe son unique antécédent x par f . Autrement dit : $f^{-1}: F \rightarrow E: y \mapsto f^{-1}(y) = x$ avec $y = f(x)$. L'application f^{-1} est une bijection dite bijection réciproque de f .

Remarque

Si $f: E \rightarrow F$ une bijection et $f^{-1}: F \rightarrow E$ sa bijection réciproque alors pour tout x dans E et pour tout y dans F , on a : $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$

Exemple

Nous avons vu que les applications suivantes sont bijectives donc déterminons leurs bijections réciproques : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto f(x) = 2x + 1$ et $f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto f(x) = x^2$.

Exercice d'application :

Montrer que $f: [-1; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[: x \mapsto f(x) = \sqrt{x+1}$ est bijective puis déterminer sa bijection réciproque.

IV. Composition d'applications

1. Définition

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ deux applications. La composée de f suivie de g (ou la composée de g par f) notée $g \circ f$ (on lit « g rond f ») est l'application définie de E dans G par $(g \circ f)(x) = g[f(x)] \forall x \in E$.

2. Exemple

$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto f(x) = x^2$ et $g: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$. Déterminons $g \circ f$.

3. Remarques

- ✓ Si l'ensemble de départ de f est contenu dans l'ensemble d'arrivée de g alors pour tout x appartenant à l'ensemble de départ de G , on a : $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.
- ✓ Si $f: E \rightarrow F$ est une bijection et $f^{-1}: F \rightarrow E$ sa bijection réciproque alors $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$.
- ✓ La composée de 2 applications bijectives est bijective.
- ✓ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ pour toutes applications $f; g$ et h . On dit que la composition d'application est associative.

CHAPITRE 2: POLYNOMES

Durée : 6h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Déterminer l'expression d'un polynôme en utilisant la méthode d'identification.
- ✓ Factoriser un polynôme en utilisant
 - La méthode d'identification
 - La division euclidienne
 - La méthode de Hörner
- ✓ Déterminer les autres racines d'un polynôme connaissant au moins une racine.

Pré requis :

- ✓ Second degré
- ✓ Polynôme en 2nde S

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;
- ✓ Mon cours de 1^{ère} S2 au Lycée de Ndongol ;
- ✓ Documents de mon ordinateur.

Plan du cours :

- I. Généralités**
 - 1. Définition et notation
 - 2. Théorème (admis)
 - 3. Théorème
 - a. Corollaire
 - b. Remarques
 - c. Exercice d'application
- II. Opérations sur les polynômes**
 - 1. Somme et produit
 - a. Théorème
 - b. Propriétés
 - 2. Division euclidienne d'un polynôme par un polynôme non nul
 - a. Théorème (admis)
 - b. Définition
 - c. Exemples pratiques de calcul de Q et R
- III. Méthode de factorisation d'un polynôme connaissant au moins une racine**
 - 1. Racine ou zéro d'un polynôme
 - a. Définition et exemple
 - b. Théorème 1
 - c. Théorème 2
 - d. Corollaire 1
 - e. Théorème 3
 - f. Corollaire 2

g. Corollaire 3

2. Factorisation d'un polynôme

a. Méthode d'identification ou des coefficients indéterminés

b. Méthode de la division euclidienne

c. Méthode de Hörner

3. Exercice d'application

Déroulement du cours

I. Généralités

1. Définition et notation

On appelle polynôme toute expression qui peut s'écrire sous la forme

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où x est une variable réelle, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ et a_0 sont des réels fixés et n un entier naturel fixé. Il est généralement noté $P(x)$ ou $Q(x)$ ou $f(x)$... (ou bien P ou Q ou f ...). On peut donc noter $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

- les réels fixés $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ et a_0 sont dits coefficients du polynôme P .
- si $a_n \neq 0$ alors l'entier naturel n est dit degré du polynôme P et est noté $\deg(P)$ ou $d^\circ P$.
- chacun des termes $a_i x^i : i \in \{0; 1; \dots; n\}$ est dit monôme de degré i si $a_i \neq 0$.

a. Remarques

- La variable x peut être remplacée par toute autre lettre.
- Le coefficient a_0 est dit monôme (ou terme) constant. Plus généralement, tout nombre réel constant est un monôme. S'il est non nul alors il est degré 0 et s'il est égal à zéro alors il est dit monôme nul : on admet qu'il n'a pas de degré.
- si $a_n \neq 0$ alors a_n est dit coefficient dominant et $a_n x^n$ est dit monôme (ou terme) dominant.
- Un polynôme est une somme finie de monômes donc tout monôme est un polynôme.

b. Exemples

- $P(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ est un polynôme de degré 4 de la variable x .
- $Q(y) = 3y^3 + 2y - \sqrt{2}$ est un polynôme de degré 3 de la variable y .

c. Exercice d'application :

Dans chacun des cas suivants, donner $d^\circ P$.

$$P(x) = -2x^4 + (m-1)x^3 - mx + 5 ; P(x) = (m^2 + 3)x^7 - 4mx + 1 \text{ et}$$

$$P(x) = (m^2 - 1)x^3 + (1 - m)x^2 + x - 4m$$

2. Théorème (admis)

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Autrement dit

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$$

3. Théorème

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes semblables (monômes de même degré) sont égaux.

Preuve : On pose :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ et } Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

$\Rightarrow$ Supposons que $P(x) = Q(x)$.

- Si $n > m$ alors $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ et

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \text{ donc}$$

$$P(x) - Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m - b_m) x^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) x^{m-1} + \dots + (a_1 - b_1) x + a_0 - b_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad a_n = a_{n-1} = \dots = a_{m+1} = 0; a_m - b_m = 0; \dots; a_0 - b_0 = 0. \text{ Par suite } a_n = a_{n-1} = \dots = a_{m+1} = 0; a_m = b_m; \dots; a_0 = b_0$$

$$a_n = a_{n-1} = \dots = a_{m+1} = 0; a_m = b_m \neq 0 \text{ donc } d^{\circ} P = m = n \text{ ce qui est absurde.}$$

- Si $n < m$ alors $m > n$ et le même raisonnement que ci-dessus en faisant jouer à m le rôle de n et vice-versa permet d'aboutir à une absurdité donc $n = m$

$$\text{Ainsi } P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{et} \quad Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \text{ et}$$

$$P(x) - Q(x) = (a_n - b_n) x^n + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1) x + a_0 - b_0 = 0$$

$$\text{D'où } a_n = b_n; \dots; a_0 = b_0$$

($\Leftarrow$ Supposons que $d^{\circ} P = d^{\circ} Q = n$ et $a_n = b_n; \dots; a_0 = b_0$ donc on a :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 \text{ et}$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \text{ d'où } P(x) = Q(x).$$

a. Corollaire

Tout polynôme $P(x)$ s'écrit de manière unique sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

b. Remarques

- Les polynômes constants (de degré 0) sont les réels constants non nul a .
- Les polynômes de degré 1 sont de la forme $ax + b$ où $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$.
- Les polynômes de degré 2 sont les trinômes du 2nd degré $ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
- Les polynômes de degré 3 sont de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a \neq 0$ et $b, c, d \in \mathbb{R}$.
- Les polynômes de degré 4 sont de la forme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ où $a \neq 0$ et $b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

c. Exercice d'application

$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ et $Q(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$. Trouver a , b et c pour que $P(x) = Q(x)$.

II. Opérations sur les polynômes

1. Somme et produit

a. Théorème

Si P et Q sont des polynômes et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixé alors $P(x) + Q(x)$; $P(x) - Q(x)$; $\alpha P(x)$ et $P(x)Q(x)$ sont des polynômes. Ils sont notés respectivement $P + Q$; $P - Q$; αP et PQ .

Preuve :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ et } Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

- Si $n = m$ alors

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + a_0 + b_0 \text{ et}$$

$$P(x) - Q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)x + a_0 - b_0$$

- Si $n \neq m$ alors sans perdre de généralités on peut supposer que $n > m$

$$P(x) + Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) x^{m-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0 \text{ et}$$

$$P(x) - Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m - b_m) x^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) x^{m-1} + \dots + (a_1 - b_1) x + a_0 - b_0$$

$$\alpha P(x) = \alpha(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \alpha a_n x^n + \alpha a_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$$

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) \\ &= a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \dots + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0 \end{aligned}$$

b. Propriétés

Si P et Q sont des polynômes non nuls (tels que $P + Q \neq 0$) et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixé alors :

- $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ P; d^\circ Q)$ ($\max(d^\circ P; d^\circ Q)$ est le plus grand entre $d^\circ P$ et $d^\circ Q$).
- $d^\circ(PQ) = d^\circ P + d^\circ Q$. En particulier $d^\circ(\alpha P) = d^\circ P$.
- $d^\circ(P - Q) \leq \max(d^\circ P; d^\circ Q)$ (On suppose que $P - Q \neq 0$).

Preuve :

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ tels que $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Ainsi $d^\circ P = n$ et $d^\circ Q = m$.

- Si $n = m$ alors $\max(d^\circ P; d^\circ Q) = n = m$

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0$$

✓ **1^{er} cas :** $a_n + b_n = 0$. On a $d^\circ(P + Q) < n = \max(d^\circ P; d^\circ Q)$ donc $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ P; d^\circ Q)$.

✓ **2^{ème} cas :** $a_n + b_n \neq 0$. On a $d^\circ(P + Q) = n = \max(d^\circ P; d^\circ Q)$ donc $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ P; d^\circ Q)$.

- Si $n \neq m$ alors sans perdre de généralités on peut supposer que $n > m$

$$\max(d^\circ P; d^\circ Q) = n$$

$P(x) + Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{m+1} x^{m+1} + (a_m + b_m) x^m + (a_{m-1} + b_{m-1}) x^{m-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0$ donc $d^\circ(P + Q) = n = \max(d^\circ P; d^\circ Q)$ donc $d^\circ(P + Q) \leq \max(d^\circ P; d^\circ Q)$.

$P(x)Q(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0)$
 $= a_n b_m x^{n+m} + \dots + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0$ or $a_n b_m \neq 0$ donc $d^\circ(PQ) = n + m = d^\circ P + d^\circ Q$.

$d^\circ(\alpha P) = d^\circ \alpha + d^\circ P = d^\circ P$ car $d^\circ \alpha = 0$.

$P - Q = P + (-Q)$ donc $d^\circ(P - Q) \leq \max(d^\circ P; d^\circ(-Q)) = \max(d^\circ P; d^\circ Q)$ car $d^\circ(-Q) = d^\circ Q$.

2. Division euclidienne d'un polynôme par un polynôme non nul

a. Théorème (admis)

Si $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes tel que $B(x)$ différent du polynôme nul alors il existe un unique couple $(Q(x); R(x))$ de polynômes tels que : $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ et $d^\circ R < d^\circ B$.

- $Q(x)$ est dit quotient de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.
- $R(x)$ est dit reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.

b. Définition

Un polynôme $A(x)$ est divisible par un polynôme non nul $B(x)$ (on dit aussi que $B(x)$ divise $A(x)$) si le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ est le polynôme nul autrement dit s'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $A(x) = B(x) \times Q(x)$.

c. Exemples pratiques de calcul de Q et R

▪ Division euclidienne

Soit $A(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ et $B(x) = x^2 - 5x + 4$

Pour trouver $Q(x)$ et $R(x)$ tels que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ avec $d^\circ R < d^\circ B$, on peut effectuer la division de $A(x)$ par $B(x)$ en utilisant les mêmes principes que la division des nombres.

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 & X^2 - 5X + 4 \\
 \underline{X^4 - 5X^3 + 4X^2} & \underline{X^2 - 2X + 3} \\
 -2X^3 + 13X^2 - 17X + 6 & \\
 \underline{-2X^3 + 10X^2 - 8X} & \\
 3X^2 - 9X + 6 & \\
 \underline{3X^2 - 15X + 12} & \\
 6X - 6 &
 \end{array}$$

On a $Q(x) = x^2 - 2x + 3$ et $R(x) = 6x - 6$ donc

$$X^4 - 7X^3 + 17X^2 - 17X + 6 = (X^2 - 5X + 4)(X^2 - 2X + 3) + 6X - 6$$

▪ Méthode d'identification ou des coefficients indéterminés

Soit $A(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ et $B(x) = x^2 - 5x + 4$. Trouvons $Q(x)$ et $R(x)$ tels que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ avec $d^\circ R < d^\circ B$.

$$d^\circ R < d^\circ B \Rightarrow d^\circ R < 2 \Rightarrow d^\circ R \leq 1 \Rightarrow R(x) = ax + b$$

$$A(x) = Q(x) \times B(x) + R(x) \Rightarrow Q(x) \times B(x) = A(x) - R(x)$$

Or $d^\circ(A - R) \leq \max(d^\circ A; d^\circ R) = 4$ donc $d^\circ(QB) \leq 4$ d'où $d^\circ Q + d^\circ B \leq 4$ Par suite

$d^\circ Q \leq 2$ et ainsi $Q(x) = cx^2 + dx + e$. On a donc

$$\begin{aligned}
 x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6 &= (cx^2 + dx + e)(x^2 - 5x + 4) + ax + b \\
 &= cx^4 + (-5c + d)x^3 + (4c - 5d + e)x^2 + (4d - 5e + a)x + 4e + b
 \end{aligned}$$

D'après le théorème relatif à l'égalité de deux polynômes, on a

$$\begin{cases} c = 1 \\ -5c + d = -7 \\ 4c - 5d + e = 17 \\ 4d - 5e + a = -17 \\ 4e + b = 6 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} c = 1 \\ d = -2 \\ e = 3 \\ a = 6 \\ b = -6 \end{cases} \text{ d'où } Q(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ et } R(x) = 6x - 6$$

Cette méthode est connue sous le nom de la méthode d'identification ou méthode des coefficients indéterminés.

▪ Méthode de **Hörner** pour trouver Q et R si $B(x) = x - \alpha$

$A(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ et $B(x) = x + 1$. Trouvons $Q(x)$ et $R(x)$ tels que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$ avec $d^\circ R < d^\circ B$.

$$A(x) = Q(x) \times B(x) + R(x) \Rightarrow A(x) = (x + 1)Q(x) + R(x)$$

$$d^\circ R < d^\circ B \Rightarrow d^\circ R = 0 \Rightarrow R(x) = \beta \Rightarrow A(x) = (x + 1)Q(x) + \beta \Rightarrow A(-1) = \beta \Rightarrow R(x) = A(-1) = 48 \Rightarrow A(x) = (x + 1)Q(x) + 48 \Rightarrow (x + 1)Q(x) = A(x) - 48 \Rightarrow 1 + d^\circ Q = 4$$

$$\Rightarrow Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Pour trouver a, b, c et d, on va dresser un tableau de 3 lignes et dont le nombre de colonnes est égal à $d^\circ(A)+1=5$. On a :

Coefficients de A(x) dans l'ordre décroissant des puissances de x	1	-7	17	-17	6
$\alpha = -1$	$\downarrow$	$\downarrow +$	$\downarrow +$	$\downarrow +$	$\downarrow +$
	$\times (-1)$	$\parallel \times (-1)$	$\parallel \times (-1)$	$\parallel \times (-1)$	$\parallel \times (-1)$
Coefficients cherchés	1	-8	25	-42	48

Sur la dernière ligne du tableau, en partant de la gauche vers la droite, les nombres réels obtenus donnent respectivement a, b, c, d et $A(-1)$. Ainsi $a = 1; b = -8; c = 25; d = -42$ et $A(-1) = 48$.

Cette méthode est connue sous le nom de la méthode de **Hörner**.

▪ Remarques

- ✓ Les trois méthodes ci-dessus se généralisent à des polynômes quelconques.
- ✓ Si $A(x)$ est un polynôme quelconque et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors pour calculer $A(\alpha)$, on peut utiliser le tableau de Hörner.

III. Méthode de factorisation d'un polynôme connaissant au moins une racine

1. Racine (zéro) d'un polynôme

a. Définition et exemple

On dit qu'un réel fixé a est une racine d'un polynôme $P(x)$ si $P(a) = 0$. Par exemple -1 est une racine de $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ car $P(-1) = 0$.

b. Théorème 1 (Théorème de factorisation)

Soit $P(x)$ un polynôme. Un réel fixé a est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(x)$ est divisible (factorisable) par $x - a$ c'est-à-dire si et seulement si il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - a)Q(x)$. Dans ce cas, $d^\circ Q = d^\circ P - 1$.

Preuve :

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

$P(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0$.

$P(x) - P(a) = a_n(x^n - a^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_1(x - a)$ Or $(x - a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + a^2x^{k-3} + \dots + a^{k-2}x + a^{k-1}) = x^k + ax^{k-1} + a^2x^{k-2} + \dots + a^{k-1}x - ax^{k-1} - a^2x^{k-2} - \dots - a^{k-1}x - a^k = x^k - a^k$

Ainsi $x^k - a^k = (x - a)(x^{k-1} + ax^{k-2} + a^2x^{k-3} + \dots + a^{k-2}x + a^{k-1}) = (x - a)Q_k(x)$
 $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

$P(x) - P(a) = a_n(x - a)Q_n(x) + a_{n-1}(x - a)Q_{n-1}(x) + \dots + a_1(x - a)$. Donc

$P(x) - P(a) = (x - a)(a_n Q_n(x) + \dots + a_1) = (x - a)Q(x)$.

a est une racine de $P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a)Q(x)$.

$P(x) = (x - a)Q(x) \Rightarrow d^\circ(P) = d^\circ[(x - a)Q(x)] = d^\circ(x - a) + d^\circ(Q)$ or $d^\circ(x - a) = 1$ donc $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - 1$

c. Théorème 2

Si $P(x)$ est un polynôme et $a_1, a_2, \dots, a_k$ k racines deux à deux distinctes de $P(x)$ alors il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)Q(x)$. Dans ce cas $d^\circ Q = d^\circ P - k$.

Preuve :

a_1 est une racine de $P(x)$ donc d'après le théorème de factorisation, il existe $Q_1(x)$ tel que $P(x) = (x - a_1)Q_1(x)$.

$P(a_2) = (a_2 - a_1)Q_1(a_2) = 0 \Rightarrow Q_1(a_2) = 0$ car $a_2 - a_1 \neq 0$. Ainsi, il existe $Q_2(x)$ tel que $Q_2(x) = (x - a_2)Q_1(x)$ et donc $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)Q_2(x)$. En

appliquant le théorème de factorisation à $Q_2(x)$, on obtient $Q_3(x)$ et ainsi de suite.... Ainsi on peut trouver $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_p)Q(x)$.

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)Q(x) \Rightarrow$$

$$d^{\circ}P = d^{\circ}(x - a_1) + d^{\circ}(x - a_2) + \dots + d^{\circ}(x - a_k) + d^{\circ}Q \text{ d'où } d^{\circ}Q = d^{\circ}P - k.$$

d. Corollaire 1

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes $a_1, a_2, \dots, a_n$ alors $P(x) = a_n(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$.

Preuve :

Supposons que $d^{\circ}P = n$ et que P admet n racines distinctes $a_1, a_2, \dots, a_n$ donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)Q(x)$. De plus $d^{\circ}Q = d^{\circ}P - n = 0$ donc $Q(x)$ est un réel fixé et on peut donc poser $Q(x) = \alpha$. Par suite $P(x) = \alpha(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$.

$\alpha(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Un développement du premier membre puis une identification permettent de montrer que $\alpha = a_n$.

e. Théorème 3

Si P est un polynôme non nul alors le nombre de racines de P est inférieur ou égal à son degré.

Preuve :

Supposons que $P \neq 0$ et $d^{\circ}P = n$. Raisonnons par l'absurde en supposant que P admet k racines $a_1, a_2, \dots, a_k$ tel que $k > n$.

On a : $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)Q(x)$ Ainsi $d^{\circ}P = k + d^{\circ}Q$ d'où $n = k + d^{\circ}Q$ et donc $n \geq k$ ce qui est absurde car $k > n$. Par suite $k \leq n$.

f. Corollaire 2

Si un polynôme P de degré inférieur ou égal à n admet plus de n racines (ou une infinité de racines) alors P est le polynôme nul.

Preuve :

Soit P un polynôme de degré $k \leq n$ qui admet plus de n racines. Raisonnons par l'absurde en supposant que $P \neq 0$.

$\left. \begin{array}{l} P \neq 0 \\ d^\circ P = k \end{array} \right\} \Rightarrow$ le nombre de racines de P est inférieur ou égal à $k \leq n$ ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle P admet plus de n racines. Par suite $P = 0$.

g. Corollaire 3

Si P et Q sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à n qui coïncident en $n + 1$ valeurs alors $P(x) = Q(x)$.

Preuve :

Soit P et Q deux polynômes tels que $d^\circ P, d^\circ Q \leq n$ et $P(a_1) = Q(a_1); P(a_2) = Q(a_2); \dots; P(a_n) = Q(a_n)$ et $P(a_{n+1}) = Q(a_{n+1})$.

Posons $R(x) = P(x) - Q(x)$, $d^\circ R \leq \max(d^\circ P; d^\circ Q) \leq n$.

$R(a_1) = R(a_2) = R(a_3) = \dots = R(a_n) = R(a_{n+1}) = 0$ donc $R(x) = 0$ d'où $P(x) = Q(x)$.

Exercice d'application : Soit $a \neq b; a \neq c$ et $b \neq c$

On pose $P(x) = 2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + 2 \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + 2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$

Montrer que $P(x)$ est un polynôme constant.

Solution : $d^\circ P \leq 2$ car P est une somme de trois polynômes de degré 2.

$P(a) = 2; P(b) = 2$ et $P(c) = 2$. Posons $R(x) = P(x) - 2$. $d^\circ R \leq d^\circ P \leq 2$ et $a; b$ et c sont des racines de $R(x)$ donc $R(x) = 0$ d'où $P(x) = 2$.

2. Factorisation d'un polynôme

Soit $P(x) = x^3 - 7x + 6$, l'objectif est de factoriser $P(x)$. Pour ce faire, on doit d'abord chercher une racine : on peut calculer dans le brouillon $P(a)$ avec $a \in \{1; -1; 2; -2; 3; -3\}$. On a : $P(1) = 0$ donc 1 est une racine. Ainsi, d'après le théorème de factorisation, il existe $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 1)Q(x)$ avec $d^\circ Q = d^\circ(P) - 1 = 2$. Pour trouver $Q(x)$, on peut utiliser la méthode d'identification, la division euclidienne ou la méthode d'Horner.

a. Méthode d'identification

$P(x) = (x - 1)Q(x)$ avec $d^0Q = d^0(P) - 1 = 2$. Par suite $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Ainsi $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

$$= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c. \text{ Par identification, on a :}$$

On a : $a = 1, b - a = -7, -c = 6$ d'où $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$

Pour $x^2 + x - 6$, on a : $\Delta = 25, x_1 = 2; x_2 = -3$ donc $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$ d'où $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

Exercice à faire: Factoriser par la méthode d'identification $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$.

b. Méthode de Horner

On se propose de factoriser $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$.

Etape 1 : Chercher une racine de $P(x)$.

Même principe que la méthode précédente : $P(-1) = 0$ donc -1 est racine.

$P(x) = (x + 1)Q(x)$ avec $d^0Q = d^0(P) - 1 = 2$. Par suite $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

Dressons un tableau de 3 lignes et dont le nombre de colonnes est égal à $d^0(P) + 1 = 4$. On a :

Coefficients de $P(x)$ dans l'ordre décroissant des puissances	2	-9	-6	5
Racine -1	↓ × -1	↓+ × -1	↓+ × -1	↓+
Coefficients de $Q(x)$ dans l'ordre décroissant des puissances	2	-11	5	0

Les coefficients a, b et c dans cet ordre sont donnés par la dernière ligne du tableau en partant de la gauche vers la droite, on a : $a = 2; b = -11; c = 5$ d'où

$$P(x) = (x + 1)(2x^2 - 11x + 5) \text{ or } 2x^2 - 11x + 5 = (2x - 1)(x - 5) \text{ donc}$$

$$\text{On a : } P(x) = (x + 1)(2x - 1)(x - 5)$$

Exercice d'application : Factoriser $P(x) = x^3 - 7x + 6$ par la méthode de Horner.

c. Méthode de la division euclidienne

On se propose de factoriser $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$

$P(-1) = 0$ donc -1 est une racine.

Effectuons la division euclidienne de $2x^3 - 9x^2 - 6x + 5$ par $x + 1$

On a : $P(x) = (x + 1)Q(x)$ donc $Q(x) = \frac{P(x)}{x+1} = \frac{2x^3 - 9x^2 - 6x + 5}{x+1}$.

$Q(x)$ est le quotient de cette division euclidienne. On a donc $2x^2 - 11x + 5$ et $P(x) = (x + 1)(2x^2 - 11x + 5)$

On a : $P(x) = (x + 1)(2x - 1)(x - 5)$

Exercice à faire : Factoriser $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x - 2$ par la division euclidienne

Chapitre 3 : Equations-inéquations-systèmes

Durée : 15h (Cours +Td)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Utiliser la somme et/ou le produit des racines d'une équation du 2nd degré pour résoudre des problèmes.
- ✓ Résoudre des équations irrationnelles du type $\sqrt{f(x)} = g(x); \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k; k \in \mathbb{R}, f \text{ et } g \text{ des polynômes de degré } \leq 2$.
- ✓ Résoudre des inéquations irrationnelles du type $\sqrt{f(x)} \leq g(x); \sqrt{f(x)} \geq g(x); |f(x)| \geq a \text{ et } |f(x)| \leq g(x); a \in \mathbb{R}, f \text{ et } g \text{ des polynômes de degré } \leq 2$.
- ✓ Résoudre des systèmes de deux ou 3 équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss et des combinaisons.

Prérequis :

- ✓ Equations du second degré ;
- ✓ Polynômes

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;
- ✓ Mon cours de 1^{ère} S₂ au Lycée Kennedy ;
- ✓ CIAM 1^{ère} SE ;
- ✓ Fractale 1^{ère} STT ;
- ✓ Hachette technique 1^{ère} G.

Plan du chapitre

I. Equations

1. Rappels et compléments sur les équations et trinômes du 2nd degré

- a. Somme et produit des racines d'une équation du 2nd degré
- b. Signe des racines d'une équation du 2nd degré
- c. Position d'un nombre par rapport aux racines d'un trinôme
- d. Equations paramétriques

2. Equations irrationnelles

- a. Equations du type $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$
- b. Equations du type $\sqrt{f(x)} = g(x)$
- c. Equations du type $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k$

II. Inéquations irrationnelles

1. Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$
2. Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$
3. Inéquations du type $|f(x)| \geq a$
4. Inéquations du type $|f(x)| \geq g(x)$

III. Systèmes

1. Systèmes de 3 équations linéaires à 3 inconnues
2. Systèmes d'inéquations linéaires
 - a. Inéquation linéaire
 - b. Système de 2 inéquations linéaires
 - c. Programmation linéaire

Déroulement du cours :

I. Equations

1. Rappels et compléments sur les équations et trinômes du 2nd degré
 - a. Somme et produit des racines

Propriété 1: Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines distinctes ou confondues : x_1 et x_2 (i.e $\Delta \geq 0$) alors leur somme $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et leur produit $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Propriété 2: Si la somme S et le produit P de deux nombres sont donnés alors ces deux nombres (s'ils existent) sont racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

NB : Si x_1 est une racine de $ax^2 + bx + c = 0$ qui est connue alors l'autre racine x_2 peut se calculer en utilisant $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ou $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

b. Signe des racines d'une équation du 2nd degré

Soit (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du 2nd degré telle que $\Delta \geq 0$. S et P désignent respectivement la somme et le produit des racines de (E). Le tableau suivant permet de connaître le signe des racines de (E) sans les calculer.

$\Delta \geq 0$ (2 racines)	$P > 0$ (2 racines de même signe)	$S > 0$	2 racines positives	
		$S < 0$	2 racines négatives	
	$P = 0$ (Au moins une racine nulle)	$S > 0$	Une racine nulle et l'autre positive	
		$S < 0$	Une racine nulle et l'autre négative	
		$S = 0$	2 racines nulles	
	$P < 0$ (2 racines de signes contraires)	$S > 0$	$x_1 < 0 < x_2$	$ x_2 > x_1 $
		$S < 0$	$x_1 < 0 < x_2$	$ x_1 > x_2 $
		$S = 0$	$x_1 = -x_2$	

NB : $P < 0 \Leftrightarrow (E)$ admet deux racines distinctes de signes contraires.

Exercice d'application: Déterminer le signe des racines des équations suivantes : $2x^2 + 7x + 3 = 0$ et $x^2 - x - 6 = 0$

c. Position d'un nombre par rapport aux racines d'un trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Théorème 1

Si $af(\alpha) < 0$ alors $f(x)$ a deux racines distinctes x_1 et x_2 et α est entre ces deux racines.

Preuve :

Supposons que $af(\alpha) < 0$.

$$f(\alpha) = a \left[\left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ donc } af(\alpha) = a^2 \left[\left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

$$af(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2} > \left(\alpha + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \Delta > 0$ donc $f(x)$ a deux racines distinctes x_1 et x_2 :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ donc } af(\alpha) = a^2(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)$$

$$af(\alpha) < 0 \Leftrightarrow (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) < 0 \Leftrightarrow \alpha > x_1 \text{ et } \alpha < x_2 \text{ ou } \alpha > x_2 \text{ et } \alpha < x_1$$

$$\Leftrightarrow x_1 < \alpha < x_2 \text{ ou } x_2 < \alpha < x_1$$

Théorème 2 :

Si $\Delta \geq 0$, x_1 et x_2 les racines de $f(x)$ et S leur somme alors le tableau suivant donne la position de α par rapport à x_1 et x_2 .

$\Delta > 0$ $x_1 \neq x_2$	$af(\alpha) > 0$	$\frac{S}{2} - \alpha > 0$	$\alpha < x_1 \text{ et } \alpha < x_2$
		$\frac{S}{2} - \alpha < 0$	$\alpha > x_1 \text{ et } \alpha > x_2$
	$af(\alpha) = 0$ a est racine de $f(x)$	$\frac{S}{2} - \alpha > 0$	$\alpha = x_1 < x_2$
		$\frac{S}{2} - \alpha < 0$	$\alpha = x_2 > x_1$
$\Delta = 0$ $x_1 = x_2 = x_0$	$\frac{S}{2} - \alpha > 0$		$\alpha < x_0$
	$\frac{S}{2} - \alpha < 0$		$\alpha > x_0$
	$\frac{S}{2} - \alpha = 0$		$\alpha = x_0$

Preuve :

- Supposons que $\Delta > 0$. $f(x)$ a deux racines x_1 et x_2 ($x_1 \neq x_2$). On a :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ et } af(\alpha) = a^2(\alpha - x_1)(\alpha - x_2)$$

- $af(\alpha) > 0$ et $\frac{S}{2} - \alpha > 0$.

$$af(\alpha) > 0 \Leftrightarrow (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) > 0 \Leftrightarrow \alpha > x_1 \text{ et } \alpha > x_2 \text{ ou } x_1 > \alpha \text{ et } x_2 > \alpha$$

Si $\alpha > x_1$ et $\alpha > x_2$ alors $2\alpha > x_1 + x_2 = S$ donc $\frac{S}{2} - \alpha < 0$ impossible car

$\frac{S}{2} - \alpha > 0$. Ainsi $x_1 > \alpha$ et $x_2 > \alpha$.

- $af(\alpha) > 0$ et $\frac{S}{2} - \alpha < 0$.

$af(\alpha) > 0 \Leftrightarrow (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) > 0 \Leftrightarrow x_1 < \alpha$ et $x_2 < \alpha$ ou $\alpha < x_1$ et $\alpha < x_2$

Si $\alpha < x_1$ et $\alpha < x_2$ alors $2\alpha < x_1 + x_2 = S$ donc $\frac{S}{2} - \alpha > 0$ impossible car

$\frac{S}{2} - \alpha < 0$. Ainsi $x_1 < \alpha$ et $x_2 < \alpha$

- $af(\alpha) = 0$ et $\frac{S}{2} - \alpha > 0$.

$af(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ est une racine de $f(x)$. Supposons que $\alpha = x_1$.

$\frac{S}{2} - \alpha > 0 \Leftrightarrow \frac{S}{2} > x_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2x_1 \Leftrightarrow \alpha = x_1 < x_2$.

- $af(\alpha) = 0$ et $\frac{S}{2} - \alpha < 0$.

$af(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ est une racine de $f(x)$. Supposons que $\alpha = x_1$.

$\frac{S}{2} - \alpha < 0 \Leftrightarrow \frac{S}{2} < x_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 < 2x_1 \Leftrightarrow \alpha = x_1 > x_2$.

- Supposons que $\Delta = 0$. $f(x)$ a racine double $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{S}{2}$

- $\frac{S}{2} - \alpha > 0$.

$\frac{S}{2} - \alpha > 0 \Leftrightarrow x_0 - \alpha > 0 \Leftrightarrow x_0 > \alpha$

- $\frac{S}{2} - \alpha < 0 \Leftrightarrow x_0 - \alpha < 0 \Leftrightarrow x_0 < \alpha$

- $\frac{S}{2} - \alpha = 0 \Leftrightarrow x_0 - \alpha = 0 \Leftrightarrow x_0 = \alpha$

Exercice d'application : $f(x) = 2x^2 - x - 1$. Etudier la position de 3 et $\frac{1}{2}$ par rapport aux racines de $f(x)$.

Solution : $2f(3) = 28 > 0$; $\Delta = 9 > 0$; $\frac{S}{2} - 3 = -\frac{11}{12}$ donc $x' < x'' < 3$.

$2f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0$ donc $x' < \frac{1}{2} < x''$. Ainsi $x' < \frac{1}{2} < x'' < 3$.

d. Equations paramétriques

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $(E): (m-1)x^2 + 2\sqrt{2}mx - 2m - 3 = 0$ une équation d'inconnue x . Les coefficients de (E) sont : $a = m-1$; $b = 2\sqrt{2}m$ et $c = -2m-3$. Ils dépendent de m dit

paramètre : on dit que (E) est une équation paramétrique. La résolution de (E) se fait selon les valeurs de m .

- Si $m - 1 = 0$ i.e $m = 1$ alors (E) est du 1^{er} degré et on a $(E) \Leftrightarrow 2\sqrt{2}x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{4}$ donc $S = \left\{\frac{5\sqrt{2}}{4}\right\}$.
- Si $m - 1 \neq 0$ i.e $m \neq 1$ alors (E) est une équation du second degré :
 $\Delta' = b'^2 - ac = 2m^2 - (m - 1)(-2m - 3) = 4m^2 + m - 3$
 Δ' est un trinôme du 2nd degré en m . $m_1 = -1$ et $m_2 = \frac{3}{4}$ sont ces racines
 - ❖ Si $m \in]-1; \frac{3}{4}[$ alors $\Delta' < 0$ et donc $S = \emptyset$.
 - ❖ Si $m \in]-\infty; -1[\cup]\frac{3}{4}; +\infty[$ alors $\Delta' > 0$ et donc l'équation a deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\sqrt{2}m - \sqrt{4m^2 + m - 3}}{m - 1}$ et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-\sqrt{2}m + \sqrt{4m^2 + m - 3}}{m - 1}$
d'où $S = \left\{\frac{-\sqrt{2}m - \sqrt{4m^2 + m - 3}}{m - 1}; \frac{-\sqrt{2}m + \sqrt{4m^2 + m - 3}}{m - 1}\right\}$.
 - ❖ Si $m = -1$ alors $\Delta' = 0$ et donc l'équation a une solution double $x_0 = -\frac{b'}{a} = \frac{-\sqrt{2}m}{m - 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
 - ❖ Si $m = \frac{3}{4}$ alors $\Delta' = 0$ et donc l'équation a une solution double $x_0 = -\frac{b'}{a} = \frac{-\sqrt{2}m}{m - 1} = 3\sqrt{2}$ d'où $S = \{3\sqrt{2}\}$.

Exercice d'application : Etudier suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de l'équation $(m + 3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0$

$$(m + 3)x^2 + 2mx + m - 5 = 0.$$

Réponse :

- Si $m = -3$, l'équation est du premier degré et s'écrit : $-6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$. Elle a une solution négative.
- Si $m \neq -3$, l'équation est du second degré et a pour discriminant : $\Delta' = m^2 - (m + 3)(m - 5)$, soit : $\Delta' = 2m + 15$. Lorsqu'ils existent, le produit et la somme des racines sont donnés respectivement par : $P = \frac{m - 5}{m + 3}$ et $S = \frac{-2m}{m + 3}$.

Il est plus commode d'observer la situation dans un tableau de signes conjoint :

m	$-\infty$	$-\frac{15}{2}$	-3	0	5	$+\infty$
Δ	-	+	+	+	+	
P		+	-	-	+	
S		-	+	-	-	
Discussion	Pas de racines	$x_1 < x_2 < 0$	$x_1 < 0 < x_2$ et $ x_1 < x_2$	$x_1 < 0 < x_2$ et $ x_1 > x_2$	$x_1 < x_2 < 0$	

Cas particuliers :

- Si $m = -\frac{15}{2}$, alors l'équation a une racine double négative ($\Delta = 0$ et $S < 0$) : $x_0 = -\frac{5}{2}$
- Si $m = 0$, l'équation a 2 racines opposées ($S = 0$).
- Si $m = 5$, l'équation a une racine nulle ($P = 0$), l'autre étant négative.

2. Equations irrationnelles : Soient $f(x)$ et $g(x)$ des polynômes de degré ≤ 2 .

Pour résoudre les inéquations irrationnelles, on utilisera deux méthodes.

a. Equations du type $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

• Méthode par implication

1^{ère} étape : On écrit $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$ puis on résout l'équation $f(x) = g(x)$. Oralement : Les solutions éventuelles de $f(x) = g(x)$ sont les potentiels candidats pour être solution de l'équation $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

2^{ème} étape : Pour toutes les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, on vérifie celles qui satisfont à l'équation $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$. Ce sont ces réels qui sont les solutions de l'équation $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ par la méthode d'implication l'équation suivante: $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = \sqrt{x + 2}$

Exercice d'application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante: $\sqrt{x^2 + 2x - 5} = \sqrt{x + 1}$

• Méthode par équivalence

1^{ère} étape : On écrit : $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

2^{ème} étape : On résout le système $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$. L'ensemble des solutions de l'un de ces systèmes est l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante par la méthode d'équivalence
l'équation $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = \sqrt{x + 2}$

Exercice d'application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ par la méthode d'équivalence l'équation suivante
 $\sqrt{x^2 + 2x - 5} = \sqrt{x + 1}$

b. Equations du type $\sqrt{f(x)} = g(x)$

• Méthode par implication

1^{ère} étape : on écrit : $\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = (g(x))^2$ puis on résout l'équation $f(x) = (g(x))^2$.

2^{ème} étape : Pour toutes les solutions de l'équation $f(x) = (g(x))^2$, on vérifie celles qui satisfont à l'équation $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Celles-ci sont solutions de l'équation $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ par la méthode d'implication l'équation suivante :

$$\sqrt{2 - x} = x + 10$$

Méthode par équivalence

1^{ère} étape : On écrit : $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^2 \end{cases}$

2^{ème} étape : On résout le système $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = (g(x))^2 \end{cases}$. L'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ par la méthode d'équivalence l'équation suivante

$$\sqrt{2 - x} = x + 10$$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{4 - x^2} = x - 1$ par les 2 méthodes :

c. Equations du type $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k$

- ✓ Si $k < 0$ alors $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k$ n'a pas de solution donc $S = \emptyset$.
- ✓ Si $k = 0$ alors $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) = 0$
- ✓ Si $k > 0$ alors :

Pour la méthode d'implication : on écrit $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \Rightarrow (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = k^2$
 puis on résout l'équation $(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = k^2$ et on procède à une vérification
 pour toutes les solutions trouvées dans $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k$.

Pour la méthode d'équivalence :

On écrit $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = k^2 \end{cases}$ puis on résout ce système.

L'ensemble des solutions de ce système est l'ensemble des solutions de

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = k$$

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{-x+1} + \sqrt{x+3} = 2$

$$\sqrt{-x+1} + \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ (\sqrt{-x+1} + \sqrt{x+3})^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; 1] \\ \sqrt{-x^2 - 2x + 3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; 1] \\ x = 1 \text{ ou } x = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3 \text{ donc } S = \{1; -3\}$$

II. Inéquations irrationnelles

Les inéquations irrationnelles se résolvent toujours par la méthode d'équivalence.

1. Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq (g(x))^2 \end{cases}$$

Exemple

Réolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $\sqrt{x+1} \leq x+3$

$$\sqrt{x+1} \leq x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x+1 \leq (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x^2 + 5x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x \in]-\infty; +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \text{ d'où } S = [-1; +\infty[$$

2. Inéquations du type $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq (g(x))^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \right)$$

Exemple : Réolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $\sqrt{2-x} \geq x+4$

3. Inéquations du type $|f(x)| \geq a; a \in \mathbb{R}$.

✓ Si $a \leq 0$ alors $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ donc $S = \mathbb{R}$.

✓ Si $a > 0$ alors $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow (f(x))^2 \geq a^2$

Exemple : Réolvons dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $|2-x| \geq \sqrt{3}$

$$|2-x| \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 2-\sqrt{3}] \cup [2+\sqrt{3}; +\infty[$$

4. Inéquations du type $|f(x)| \geq g(x)$

$$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ (f(x))^2 \geq (g(x))^2 \end{cases} \text{ ou } g(x) < 0 \right)$$

Exemple: Résoudre dans $\mathbb{R}$ $|x+1| \geq -x-1$

$$|x+1| \geq -x-1 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} -x-1 \geq 0 \\ (x+1)^2 \geq (-x-1)^2 \end{cases} \text{ ou } -x-1 < 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 0 \geq 0 \end{cases} \text{ ou } x > -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ou } x > -1 \text{ donc } S = \mathbb{R}$$

Remarques :

✓ Si $a > 0$ alors $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow f(x) \geq a \text{ ou } f(x) \leq -a$.

✓ $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \text{ ou } f(x) \leq -g(x)$

III. Systèmes

1. Systèmes de 3 équations linéaires à 3 inconnues

a. Exemple

Le système
$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$
 est un système de 3 équations linéaires à trois inconnues x ; y et z .

Résoudre un tel système c'est trouver tous les triplets (x, y, z) de nombres réels qui vérifient les trois équations du système. Nous allons voir une méthode permettant de résoudre un tel système : la méthode du pivot de Gauss.

b. Méthode du pivot de Gauss

Exemple : Résolvons par la méthode du pivot de Gauss, le système suivant :

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$$

1^{ère} étape : On considère le sous-système formé par les deux premières équations du système puis on élimine x en utilisant une combinaison de ces deux équations :
$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-2 \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 20y + 6z = -10 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases} \text{ ainsi on a :}$$

$-21y + 8z = -8$. On obtient ainsi une équation sans l'inconnue x .

2^{ème} étape : On considère le sous-système formé par la 1^{ère} et la 3^{ème} équation du système puis on élimine x en utilisant une combinaison de ces deux équations.

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow 11y - 2z = 2. \text{ Ainsi on obtient une 2ème équation sans l'inconnue } x.$$

3^{ème} étape : On écrit un nouveau système de 3 équations formé par la 1^{ère} équation de l'ancien système et les 2 nouvelles équations obtenues sans l'inconnue x . Ainsi, on a :

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ -21y + 8z = -8 \\ 11y - 2z = 2 \end{cases}$$

4^{ème} étape : On considère le sous-système formé par les deux dernières équations du nouveau système puis on élimine y en utilisant une combinaison.

$$\begin{cases} -21y + 8z = -8 \\ 11y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow 46z = -46. \text{ Ainsi on obtient une nouvelle équation qui n'a ni } x \text{ ni } y.$$

5^{ème} étape : On écrit le nouveau système de 3 équations formé par les deux premières équations du système précédent et de la dernière équation obtenue dans l'étape précédente.

On obtient le système équivalent suivant dit système triangulaire S'' :

$$\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ -21y + 8z = -8 \\ 46z = -46 \end{cases}$$

Un système de la forme de S'' est dit système triangulaire.

6^{ème} étape : Pour terminer la résolution, on détermine z dans la dernière équation du dernier système puis on remplace z par cette valeur dans la 2^{ème} équation du dernier système pour trouver y et enfin on y et z par leurs valeurs respectives dans la 1^{ère} équation du système pour trouver x . Ainsi on a : $S = \{(2; 0; -1)\}$

Exercice d'application

Réolvons le système suivant par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x - 5y - 7z = 3 \\ 5x + 3y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

2. Systèmes d'inéquations linéaires

a. Inéquation linéaire à deux inconnues

L'ensemble des couples $(x; y)$ de nombres réels tels que $ax + by + c > (\geq, <, \leq) 0$ avec a, b et c des réels fixés (a et b non tous nuls) est dite inéquation linéaire à deux inconnues x et y . L'ensemble des solutions de cette inéquation est représentée graphiquement par les points d'un demi-plan dont la frontière est la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Par exemple

$2x + y - 5 > 0$ est une inéquation linéaire à deux inconnues x et y .

Résolution graphique : Pour résoudre graphiquement l'inéquation $2x + y - 5 > 0$, on représente la droite $(D) : 2x + y - 5 = 0$ dans un repère orthonormé (O, I, J)

x	0	1
y	5	3

Ensuite, on choisit un point qui n'est pas sur (D) et dont ses coordonnées sont connues. Par exemple : le point $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis on remplace dans l'inéquation x et y respectivement par les coordonnées de O. Ainsi, on a $2(0) + 0 - 5 > 0$ c'est à dire $-5 > 0$ faux donc les coordonnées de O ne vérifient pas l'inéquation. On barre donc le demi-plan de frontière (D) contenant O. Ainsi l'ensemble des solutions est l'ensemble des couples (x; y), coordonnées des points du demi-plan dont la frontière est (D) ne contenant pas O.

b. Systèmes de deux inéquations linéaires à deux inconnues

Résolution graphique : Résolvons graphiquement le système $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0 \\ 2x + y - 3 < 0 \end{cases}$

On commence par représenter graphiquement les droites (D_1) d'équation $x - 2y + 1 = 0$ et (D_2) d'équation $2x + y - 3 = 0$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

x	-1	1
y	0	1

x	0	1
y	3	1

Puis on choisit un point qui n'est ni sur (D_1) , ni sur (D_2) et dont les coordonnées sont connues. Par exemple le point $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En remplaçant x et y par les coordonnées de O dans l'inéquation 1, on a : $0 - 2(0) + 1 \geq 0$ c'est à dire $1 \geq 0$ vrai donc les coordonnées de O vérifie l'inéquation 1. On barre donc le demi-plan de frontière (D_1) ne contenant pas O.

En remplaçant x et y par les coordonnées de O, dans l'inéquation 2, on a : $2(0) + 0 - 3 < 0$ c'est à dire $-3 < 0$ vrai donc les coordonnées de O vérifie l'inéquation 2. On barre donc le demi-plan de frontière (D_2) ne contenant pas O.

c. Programmation linéaire

Un atelier mécanique produit deux types de pièces : type A et type B à l'aide de deux machines : M_1 et M_2 . Chaque pièce en cours de fabrication doit passer successivement sur ces deux machines dans un ordre indifférent.

Durée de passage d'une pièce de type A	Durée de passage d'une pièce de type B
dans la machine M_1 : 30 minutes	dans la machine M_1 : 20 minutes
dans la machine M_2 : 40 minutes	dans la machine M_2 : 10 minutes
Bénéfice sur une pièce de type A : 400 F	Bénéfice sur une pièce de type B : 200 F

La machine M_1 est disponible 3000 minutes par mois et la machine M_2 est disponible 2000 minutes par mois. On suppose que toutes les pièces fabriquées seront vendues. Déterminons le nombre de pièces de type A et de type B que l'atelier doit fabriquer par mois pour avoir un bénéfice maximal puis déterminons ce bénéfice maximal.

Solution :

1^{ère} étape : Désignation des inconnues

Les valeurs cherchées sont le nombre de pièces de type A et celui de type B pour avoir un bénéfice maximal mais aussi le bénéfice maximal. Donc, on peut désigner respectivement par x et y le nombre de pièces de type A et de type B fabriqués par mois et par b le bénéfice réalisé par mois par l'atelier.

2^{ème} étape : Etablir la liste des contraintes

- Contraintes relatives à x et y .

$x, y \in \mathbb{N}$ donc $x \geq 0$ et $y \geq 0$

- Contraintes relatives à la disponibilité des machines M_1 et M_2

- ✓ La machine M_1 étant disponible 3000 minutes par mois donc la durée de passage dans M_1 des x pièces de type A fabriqués par mois ajoutée à celle des y pièces de type B fabriqués par mois est inférieure ou égale à 3000 donc $30x + 20y \leq 3000$ d'où $3x + 2y \leq 300$.
- ✓ La machine M_2 étant disponible 2000 minutes par mois donc la durée de passage dans M_2 des x pièces de type A fabriqués par mois ajoutée à celle des y pièces de type B fabriqués par mois est inférieure ou égale à 2000 donc $40x + 10y \leq 2000$ d'où $4x + y \leq 200$.

3^{ème} étape : Système de contraintes : Le système de contraintes est (S):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ 4x + y \leq 200 \end{cases}$$

4^{ème} étape : Résolution du système de contraintes :

Tracer les droites (Ox) , (Oy) , (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = 0$; $x = 0$;

$$3x + 2y = 300 \text{ et } 4x + y = 200.$$

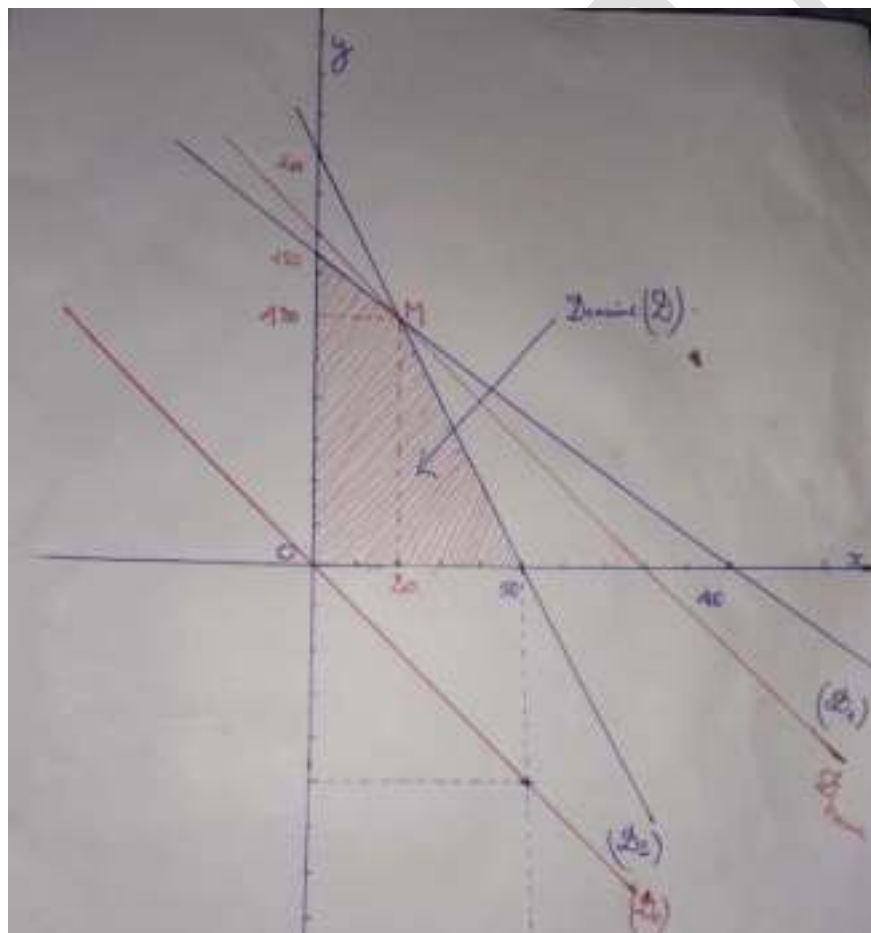
Les coordonnées des points d'intersection de (D_1) et (D_2) avec (Ox) et (Oy) peuvent indiquer quelles unités choisir sur les axes (Ox) et (Oy) .

$$(D_1) \cap (Ox): \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} ; (D_2) \cap (Ox): \begin{cases} y = 0 \\ 4x + y = 200 \end{cases} \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(D_1) \cap (Oy): \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 2y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \end{pmatrix} ; (D_2) \cap (Oy): \begin{cases} x = 0 \\ 4x + y = 200 \end{cases} \Leftrightarrow B' \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Donc on peut choisir les échelles suivantes sur les deux axes : $(Ox) : 1 \text{ cm} \rightarrow 10$ et $(Oy) : 1 \text{ cm} \rightarrow 20$.

Comme $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors on peut travailler seulement dans le premier quadrant.



L'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) avec $x, y \in \mathbb{N}$ sont solutions de (S) est dit domaine (D) des fabrications possibles.

5^{ème} étape : Détermination de la fonction à optimiser

On veut maximiser le bénéfice b . Le bénéfice b réalisé sur un programme de production (x, y) est $b = 400x + 200y$.

Soit (D_b) la droite d'équation $400x + 200y = b$. Déterminons l'équation réduite de (D_b) :

$(D_b): y = -2x + \frac{b}{200}$. Ainsi (D_b) a pour coefficient directeur -2 et coupe l'axe (Oy) au point $M_b \left(0, \frac{b}{200}\right)$. On dit que (D_b) a pour ordonnée à l'origine $\frac{b}{200}$. On remarque que même si le bénéfice varie alors toutes les droites (D_b) sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur -2 et que si l'ordonnée $\frac{b}{200}$ de M_b augmente alors le bénéfice b augmente aussi et donc si l'ordonnée de M_b est maximal alors le bénéfice l'est aussi. Donc pour trouver le bénéfice maximal b_{max} on est amené à déterminer la droite $(D_{b_{max}})$ coupant (Oy) en un point d'ordonnée maximale et passant par un point du domaine (D) des productions possibles. Pour trouver $(D_{b_{max}})$, on peut tracer $(D_0): y = -2x$ puis effectuer un balayage du domaine (D) par des droites parallèles à (D_0) . On constate que c'est droite parallèle à (D_0) et passant par $M \left(20, 120\right)$ est celle cherchée.

6^{ème} étape : Conclusion : Donc c'est $x = 20$ et $y = 120$ qui donne un bénéfice maximal et

$$b_{max} = 400 \times 20 + 200 \times 120 = 32000 f.$$

Chapitre 4 : Barycentre de quatre points pondérés dans le plan

Durée : 6h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer les relations vectorielles caractérisant le barycentre de quatre points pondérés;
- ✓ Réduire un vecteur du type $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + d\overrightarrow{MD}$: a, b, c et d sont des réels;
- ✓ Construire le barycentre de quatre points pondérés ;
- ✓ Calculer les coordonnées du barycentre de 4 points pondérés.

Prérequis :

- ✓ Barycentre de deux points et de trois points pondérés.

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue ;
- ✓ Mon cours de 1^{ère} S₂ au lycée de Ndongol
- ✓ CIAM 1^{ère} SM ;
- ✓ Cours de Demoulin ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

- I. Rappels et compléments sur les vecteurs du plan**
 - 1. Définitions et propriétés
 - 2. Propriété (Axiome d'Euclide)
 - 3. Opérations sur les vecteurs
 - a. Addition de deux vecteurs
 - b. Multiplication d'un vecteur par un réel
 - c. Différence de deux vecteurs
 - 4. Colinéarité de vecteurs non nuls
 - a. Définition
 - b. Remarque
 - c. Théorème
- II. Barycentre de quatre points pondérés**
 - 1. Théorème-définition
 - 2. Propriétés du barycentre
 - a. Homogénéité du barycentre
 - b. Associativité du barycentre
 - 3. Réduction du vecteur $\overrightarrow{V_M} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} + d\overrightarrow{MD}$
- III. Bases et repères du plan**
 - 2. Repères d'une droite
 - 3. Coordonnées d'un vecteur et d'un point
 - 4. Propriétés
 - 5. Représentation analytique d'une droite
 - a. Equations cartésiennes d'une droite
 - b. Système d'équations paramétriques d'une droite

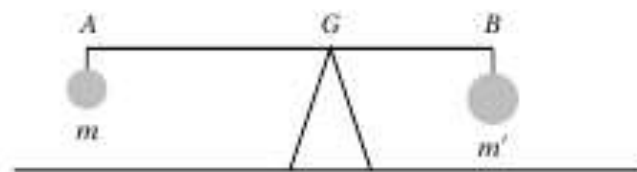
c. Propriétés

Déroulement du chapitre

Introduction (Orale)

La notion de barycentre n'est pas une notion nouvelle pour l'élève de première S car elle a été vue en classe de seconde S. Donc ici, il ne s'agit pas de refaire le cours de seconde mais plutôt d'étendre le barycentre de deux points et de trois points pondérés déjà vus au barycentre de quatre points pondérés.

La notion de barycentre (qui vient du grec barus qui signifie : lourd, massif) a été introduite par Archimède au 3^{ème} siècle avant notre ère alors qu'il s'intéressait à l'équilibre des leviers. C'est d'ailleurs à cette occasion qu'il aurait prononcé la célèbre phrase : « Donnez-moi un point d'appui, je soulèverai le monde ». Archimède apporta une solution au problème simple suivant :



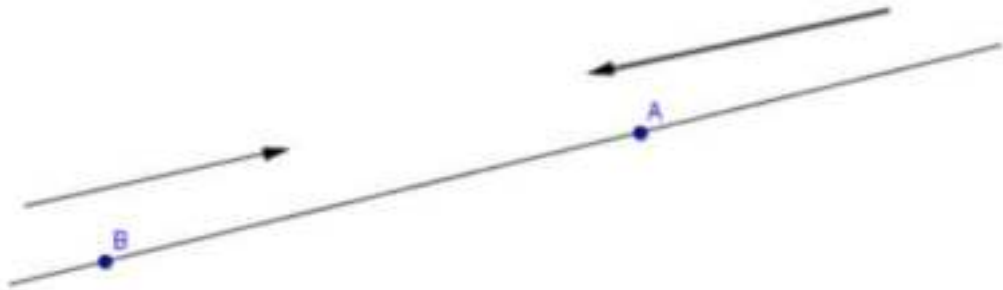
Sur une tige de masse négligeable, on suspend deux masses m et m' en A et en B. Comment positionner le pivot G pour que l'ensemble soit en équilibre ?

Les barycentres sont donc considérés d'un point de vue physique et concret. Il faut attendre le 19^{ème} siècle pour les considérer d'un point de vue purement mathématique. Le mathématicien August Ferdinand Möbius, dans son mémoire de 1827, utilise des systèmes de points auxquels il affecte un coefficient pouvant être aussi bien positif que négatif. La notion de barycentre devient alors indépendante de la physique.

Toute notion géométrique, aussi importante soit-elle ne l'est pas seulement pour elle-même. Ainsi la notion de barycentre joue un rôle important en géométrie (permet de régler des problèmes liés à l'alignement de points, aux concours de droites....) mais aussi dans d'autres disciplines telles que les sciences physiques (problèmes d'équilibre de balance, détermination de centre d'inertie), la statistique (calcul de la moyenne), la colorimétrie....

I. Rappels et compléments sur les vecteurs du plan

- Sur une droite (AB) , on admet qu'il y a seulement deux sens de parcours possibles (de A vers B et de B vers A).



- Sur une demi-droite $[Ax)$, on admet qu'il y a un seul sens de parcours possible :



1. Définitions et propriétés

- Un bipoint noté (A, B) est un couple de points A et B du plan donnés dans cet ordre. Ainsi si $A \neq B$ alors $(A, B) \neq (B, A)$.
- Un axe est droite sur laquelle, on a choisi (une fois pour toutes) un sens de parcours.
- Soient A et B des points d'un même axe (D). On appelle mesure algébrique du bipoint (A, B) , le réel noté $\overline{AB}$ et défini par :

$$\begin{cases} \overline{AB} = AB & \text{si le sens de (D) est celui de A vers B.} \\ \overline{AB} = -AB & \text{si le sens de (D) est celui de B vers A.} \end{cases}$$

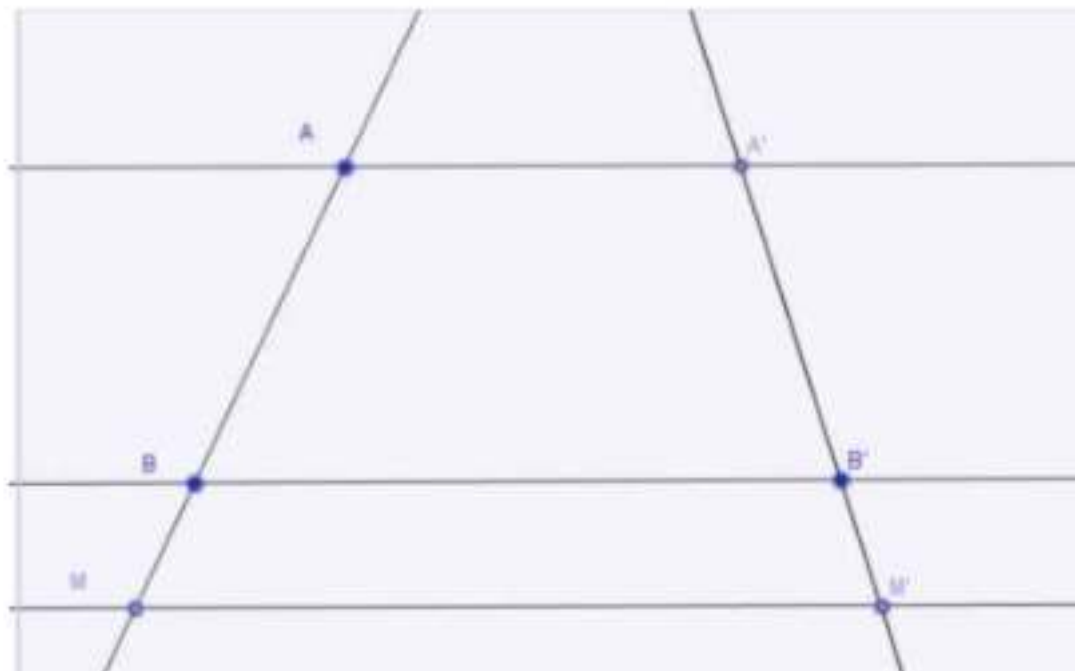
Ainsi, on a : $|\overline{AB}| = AB$; $\overline{AB} = -\overline{BA}$ et $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ pour tous points A, B et C d'un même axe (D). Cette relation est dite relation de Chasles pour les mesures algébriques.

Remarques : Pour tous points A, B et C d'un même axe (D), on a :

- $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$.
- $\overline{AB}^2 = AB^2$.
- $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{cases} AB \times AC & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AC} \text{ colinéaires et de même sens.} \\ -AB \times AC & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AC} \text{ colinéaires et de sens contraires.} \end{cases}$

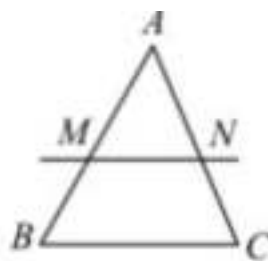
- Si $k \in \mathbb{R}$ alors $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overline{AB} = k \overline{AC}$

Version algébrique du théorème de Thalès



Si (D) et (D') sont des axes distincts, A, B et M des points 2 à 2 distincts de (D) , A', B' et M' des points de (D') tels que $(AA') \parallel (BB') \parallel (MM')$ alors $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'M'}}$.

Cas particulier :



Si ABC est un triangle, M un point de (AB) distinct de A et B et M' un point de (AC) tel que $(MM') \parallel (BC)$ alors $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{BC}}$.

Version algébrique de la réciproque du théorème de Thalès

Si (D) et (D') sont des axes distincts, A, B, M des points 2 à 2 distincts de (D) , A', B', M' des points de (D') tels que $(AA') \parallel (BB')$ et $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'M'}}$ alors $(MM') \parallel (AA') \parallel (BB')$.

Cas particulier : Si ABC est un triangle, M un point de (AB) distinct de A et B et M' un point de (AC) tel que $\frac{AM}{AB} = \frac{AM'}{AC}$ alors $(MM') // (BC)$.

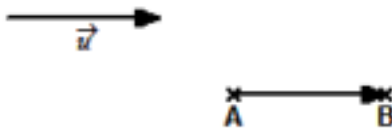
Exercices d'application

Exo 1 : On considère 2 droites (D) et (D') sécantes en O. A un point n'appartenant ni à (D) ni à (D'). B est le point d'intersection de (D) avec la parallèle à (D') passant par A et C est le point d'intersection de (D') avec la parallèle à (D) passant par A. Une droite (Δ) passant par A, non parallèle à (D) et (D') et distincte de (OA) coupe (D) en E et (D') en F. Démontrer que $\frac{OE}{OE} + \frac{OF}{OF} = 1$.

Exo 2 : Les diagonales d'un quadrilatère convexe ABCD se coupent en O. Les parallèles à (BC) et (CD) passant par O coupent respectivement (AB) en M et (AD) en N. Démontrer que (MN) // (BD).

2. Propriété (Axiome d'Euclide)

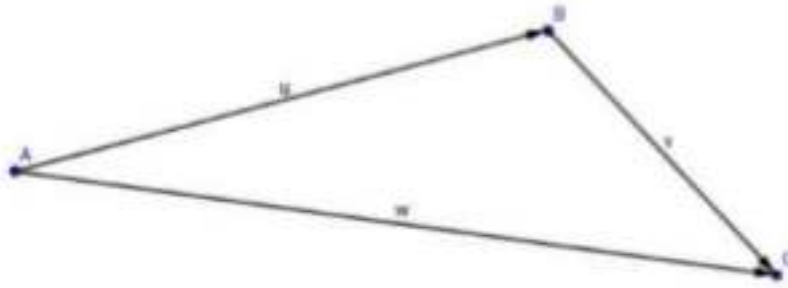
Si $\vec{u}$ est un vecteur et A un point fixé alors il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Cette propriété est dite axiome d'Euclide.



3. Opérations sur les vecteurs

a. Addition de deux vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et A un point fixé alors d'après l'axiome d'Euclide, il existe B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Par définition, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et est noté $\vec{u} + \vec{v}$. Ainsi $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles pour les vecteurs).



Remarque : Si A, B et C sont des points non alignés alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point tel que ABDC parallélogramme.

b. Multiplication d'un vecteur par un réel

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. Le produit du réel k par le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $k\vec{u}$ et défini par :

- $k\vec{u} = \vec{0}$ si $k = 0$.
- $k\vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$ et $\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$ si $k > 0$.
- $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction, sont de sens contraires et $\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$ si $k < 0$.

Opposé d'un vecteur

Le produit de -1 par le vecteur $\vec{u}$ noté $-\vec{u}$ est dit opposé du vecteur $\vec{u}$ et on a : $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$.

c. Différence de deux vecteurs

La différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre est le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ et défini par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

4. Colinéarité de vecteurs non nuls

a. Définition

On dit que des vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires (de même direction) si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



b. Remarque

Par convention, le vecteur nul ($\vec{0}$) est colinéaire à tous les vecteurs.

c. Théorème

Des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou bien s'il existe un réel k' non nul tel que $\vec{v} = k'\vec{u}$).

II. Barycentre de quatre points pondérés

1. Théorème et définition

Si α, β, γ et δ sont des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ et A, B, C et D des points du plan alors il existe un unique point G vérifiant $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (1).

Ce point G est dit barycentre du système de points pondérés $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ et est noté $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Preuve :

Cherchons un point G vérifiant la relation (1)

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) + \delta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \delta \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{AG} = -\beta \overrightarrow{AB} - \gamma \overrightarrow{AC} - \delta \overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{AG} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \delta \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Or } \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0 \text{ donc (1) } \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Posons } \vec{u} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AD}. \text{ Ainsi (1) } \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \vec{u}.$$

Comme les réels α, β, γ et δ et les points A, B, C et D sont donnés alors $\vec{u}$ est un vecteur fixe donc d'après l'axiome d'Euclide le point G existe et est unique point G. Par suite le point G

cherché est l'unique point vérifiant la relation $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AC} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{AD}$

(2)

Remarques :

- On montre aussi que le barycentre G vérifie les trois relations équivalentes suivantes :

$$\triangleright \overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{BA} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{BC} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{BD} \quad (3)$$

$$\triangleright \overrightarrow{CG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{CB} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \overrightarrow{CD} \quad (4)$$

$$\text{➤ } \overrightarrow{DG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \overrightarrow{DA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \overrightarrow{DB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \overrightarrow{DC} \quad (5)$$

Oralement : Chacune des relations (2), (3), (4) et (5) permet de construire vectoriellement le barycentre G du système de points pondérés $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$.

- Si $\alpha \neq 0$ alors $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha); (D, \alpha)\}$ est dit isobarycentre de A, B, C et D.

Exercice d'application

Soit ABCD un parallélogramme et $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3); (D, -2)\}$. Construire ABCD et G.

2. Propriétés du barycentre

a. Homogénéité du barycentre

Si $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ et k est un réel non nul alors $G = \text{bary}\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma); (D, k\delta)\}$. Cette propriété est appelée homogénéité du barycentre.

Oralement : On dit que le barycentre d'un système de quatre points pondérés reste inchangé si on multiplie chacun des coefficients des quatre points par un même réel non nul.

Preuve : (exo à faire sur feuille)

Cas particuliers

Si G est l'isobarycentre des points A, B, C et D alors $G = \text{bary}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$

Preuve

Si G est l'isobarycentre des points A, B, C et D alors $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha); (D, \alpha)\}$ avec $\alpha \neq 0$. Comme $\alpha \neq 0$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est un réel non nul et donc d'après la propriété d'homogénéité, on a : $G = \text{bary}\left\{\left(A; \frac{1}{\alpha} \times \alpha\right); \left(B; \frac{1}{\alpha} \times \alpha\right); \left(C; \frac{1}{\alpha} \times \alpha\right); \left(D; \frac{1}{\alpha} \times \alpha\right)\right\} = \text{bary}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$.

b. Associativité du barycentre

Si G est le barycentre d'un système de 4 points alors on peut regrouper des points dont la somme des coefficients est non nulle et les remplacer par leur barycentre dit barycentre partiel affecté de cette somme. Cette propriété est dite associativité du barycentre.

Exemple : $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, -1); (D, 3)\} = \text{bary}\{(I, -2); (J, 5)\}$ où $I = \text{bary}\{(A, -1); (C, -1)\}$ et $J = \text{bary}\{(B, 2); (D, 3)\}$

Exercice d'application : Soient A, B, C et D 4 points 2 à 2 distincts et $G = \text{bary}\{(A, -1); (B, 2); (C, 3); (D, -2)\}$. En utilisant la propriété d'associativité, construire G.

3. Réduction du vecteur $\vec{V}(M) = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD}$

Soient α, β, γ et δ des réels donnés, A, B, C et D des points fixés du plan et M est un point quelconque du plan. L'objet de cette partie est de donner une écriture réduite du vecteur $\vec{V}(M) = \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD}$.

a. Propriété 1

Si $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ alors $\vec{V}(M) = \vec{V}(A) = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \delta \overrightarrow{AD}$ donc $\vec{V}(M)$ est un vecteur constant (il est indépendant de M).

Preuve :

$$\begin{aligned} \vec{V}(M) &= \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD} \\ &= \alpha \overrightarrow{MA} + \beta (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) + \delta (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MA} + \gamma \overrightarrow{MA} + \delta \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \delta \overrightarrow{AD} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \delta \overrightarrow{AD} \text{ or } \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \text{ donc } (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \overrightarrow{MA} = \vec{0} \end{aligned}$$

Par suite $\vec{V}(M) = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} + \delta \overrightarrow{AD} = \vec{V}(A)$. Ainsi pour tout point M du plan, $\vec{V}(M)$ est indépendant de M donc il est constant.

NB : On montre aussi que $\vec{V}(M) = \alpha \overrightarrow{BA} + \gamma \overrightarrow{BC} + \delta \overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{CA} + \beta \overrightarrow{CB} + \delta \overrightarrow{CD} = \alpha \overrightarrow{DA} + \beta \overrightarrow{DB} + \gamma \overrightarrow{DC}$.

b. Propriété 2

Si $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ alors $\vec{V}(M) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \overrightarrow{MG}$ où $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

Preuve :

Comme $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ alors soit $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$

$$\begin{aligned} \vec{V}(M) &= \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD} = \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + \delta (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) \\ &= \alpha \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{MG} + \gamma \overrightarrow{MG} + \delta \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} \end{aligned}$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} \text{ or } G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} \text{ donc}$$

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ d'où } \vec{V}(M) = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{MG}.$$

Exercice d'application

$$\vec{U} = -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD} \text{ et } \vec{V} = 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}. \text{ Réduire } \vec{U} \text{ et } \vec{V}$$

III. Bases et repères du plan

1. Repères d'une droite

a. Définition

Soit (D) une droite. On appelle repère de (D), tout couple $(A, \vec{u})$ où A est un point de (D) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D). On note $(D) = (A, \vec{u})$.

b. Remarques

- Une droite (D) admet une infinité de repères.
- Si (D) est une droite et A, B des points distincts de (D) alors $(A, \overrightarrow{AB})$ est un repère de (D).

c. Théorème et définition

Soit $(D) = (A, \vec{u})$. Un point $M \in (D)$ si et seulement si il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \vec{u}$. Dans ce cas, le réel t est dit paramètre de M ou abscisse de M dans le repère $(A, \vec{u})$. Le point A a pour abscisse 0 dans le repère $(A, \vec{u})$.

Exemple : Soit (D) une droite et A, B des points distincts de (D). Déterminons les abscisses de B, de I milieu de $[AB]$ et de $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, 1)\}$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB})$.

d. Propriétés : Soient A et B des points distincts

- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$ avec t qui décrit (qui appartient à) $\mathbb{R}$ est la droite (AB) .
- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0; 1]$ est le segment $[AB]$
- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0; +\infty[$ est la demi-droite $[AB)$.

2. Bases du plan

a. Définition

On appelle base du plan tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.

b. Théorème et définition : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ce couple (x, y) est dit couple de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $\vec{u}(x, y)$) et on lit « $\vec{u}$ de coordonnées x et y ».

Preuve :

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan et $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit O un point du plan, (D) et (D') les droites telles que $(D) = (O, \vec{i})$ et $(D') = (O, \vec{j})$.

$O \in (D) \cap (D')$ donc (D) et (D') sont sécantes en O soit confondues. Si elles sont confondues alors $\vec{i}$ et $\vec{j}$ seraient colinéaires ce qui est absurde car $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base donc (D) et (D') sont sécantes en O .

Soit M l'unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Soient P le point d'intersection de (D) avec la parallèle à (D') passant par M et Q celui de (D') avec la parallèle à (D) passant par M . Ainsi $OPMQ$ est un parallélogramme donc

$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Comme $P \in (D) = (O, \vec{i})$ donc il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$ et $Q \in (D') = (O, \vec{j})$ donc il existe un unique $y \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$ donc il existe un unique couple (x, y) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

c. Propriétés : Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et $k \in \mathbb{R}$. Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a :

- $\vec{u} + \vec{u}'(x + x'; y + y')$; $\vec{u} - \vec{u}'(x - x'; y - y')$.
- $k\vec{u}(kx; ky)$.
- $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{u}'$ si et seulement si $xy' - yx' = 0$. Le réel $xy' - yx'$ est dit déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{u}')$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et est noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Preuve : (Exo)

3. Repères d'un plan

a. Définition

On appelle repère du plan tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point du plan et $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan. Le point O est dit origine du repère. Les droites $(D) = (O, \vec{i})$ et $(D') = (O, \vec{j})$ sont respectivement dites axe des abscisses et axe des ordonnées et sont respectivement notées (xx') et (yy') .

b. Exemple

Si ABC est un triangle alors le triplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan car A est un point et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan.

c. Théorème et définition : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Ce couple (x, y) est dit couple de coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $M(x, y)$) et on lit « M de coordonnées x et y ». Le réel x est dit abscisse de M et est noté x_M et y est dit ordonnée de M et est noté y_M .

Preuve :

Comme $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère donc $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan donc d'après le théorème ci-dessus, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a un unique couple de coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Ainsi, il existe un unique (x, y) de nombres réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

d. Propriétés : Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$ et $G(x_G, y_G)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a :

- $\overrightarrow{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- $G = \text{bary}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \end{cases}$

Preuve (EXO)

Exercice d'application :

Nous savons déjà que les trois médianes d'un triangle sont concourantes en point appelé centre de gravité. L'objectif de cet exo est de le démontrer analytiquement.

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

- Déterminer les coordonnées de A, B, C, A', B' et C' dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Démontrer que (AA') et (BB') sont sécantes en un point G dont on déterminera les coordonnées.
- Démontrer que la médiane (CC') passe par G puis conclure.

4. Représentation analytique d'une droite

- Equations cartésiennes d'une droite :** Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Théorème et définition : Si (D) est une droite passant par $A(x_A, y_A)$ dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$ alors il existe des réels a, b et c tels que $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. L'égalité $ax + by + c = 0$ où $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ (i.e $(a, b) \neq (0; 0)$) est dite équation cartésienne de (D) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note : $(D): ax + by + c = 0$

Preuve :

Soit (D) une droite passant par $A(x_A, y_A)$ dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$. Ainsi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires car ils sont tous des vecteurs directeurs de (D) donc le déterminant de $(\overrightarrow{AM}, \vec{u})$ est nul. Ainsi $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$

D'où $\beta x - \alpha y + (\alpha y_A - \beta x_A) = 0$. En posant $a = \beta$; $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$, on a :

$ax + by + c = 0$. Si $a = 0$ et $b = 0$ alors $\alpha = \beta = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$ ce qui est absurde d'où $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Théorème : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan, l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan tels qu'il existe des réels a, b et c vérifiant $ax + by + c = 0$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ est une droite dont $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

Preuve :

Posons $(E) = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : ax + by + c = 0 ; a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0 \text{ et } c \in \mathbb{R} \right\}$

Si $a \neq 0$ alors $A_0 \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \end{pmatrix} \in (E)$ et si $b \neq 0$ alors $A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix} \in (E)$ donc (E) est non vide. Soit $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in (E)$ fixé. On a donc $ax_0 + by_0 + c = 0$ d'où $c = -ax_0 - by_0$.

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E)$; $ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by - ax_0 - by_0 = 0$

$$\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -b \\ y - y_0 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM_0} \text{ colinéaire à } \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M \in (D) = (M_0, \vec{u})$$

Donc $(E) \subseteq (D) = (M_0, \vec{u})$

$(D) = (M_0, \vec{u})$ avec $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) donc si $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D)$ alors d'après un résultat ci-dessus, on a $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_0 - by_0$ donc $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E)$ d'où $(D) \subseteq (E)$. Par suite $(E) = (D)$.

Remarque : Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, toute droite (D) admet une infinité d'équations cartésiennes car si $ax + by + c = 0$ en est une alors pour tout $\alpha \neq 0$, $\alpha ax + \alpha by + \alpha c = 0$ en est une autre.

Propriétés : Soit $(D): ax + by + c = 0$ et $(D'): a'x + b'y + c' = 0$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$(D) // (D') \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

Preuve :

$(D): ax + by + c = 0 \Rightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) et $(D'): a'x + b'y + c' = 0 \Rightarrow \vec{u'} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D') . Ainsi :

$$(D) // (D') \Leftrightarrow \vec{u} \text{ colinéaire à } \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0.$$

Corollaire : Soit $(D): ax + by + c = 0$ et $(D'): a'x + b'y + c' = 0$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(D) et (D') sont sécantes si et seulement si $ab' - ba' \neq 0$. Dans ce cas, leur point d'intersection est le point dont les coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Equation réduite d'une droite : Soit $(D): ax + by + c = 0$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -b\vec{i} + a\vec{j}$ est un vecteur directeur de (D) .

- Si $b = 0$ alors $a \neq 0$; $\vec{u} = a\vec{j}$ donc $(D) //$ à l'axe des ordonnées ($y'y$). De plus $(D): x = -\frac{c}{a}$. Cette équation est dite l'équation réduite de (D) .
- Si $b \neq 0$ alors (D) n'est pas parallèle à ($y'y$) et on a : $(D): y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. En posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ on a : $(D): y = mx + p$. Cette équation est dite l'équation réduite de (D) . m est dit coefficient directeur de (D) et p est l'ordonnée du point d'intersection de (D) avec l'axe des ordonnées et est dit l'ordonnée à l'origine de (D) . On notera que $\vec{v}_m\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ m \end{smallmatrix}\right)$ est aussi un vecteur directeur de (D) .

Remarques : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan

- Une droite (D) admet une seule équation réduite.
- Une droite (D) est verticale (parallèle à l'axe (yy')) si et seulement si son équation réduite est de la forme $(D): x = k$ où k est une constante.
- Une droite (D) est horizontale (parallèle à l'axe (xx')) si et seulement si son équation réduite est de la forme $(D): y = k$ où k est une constante. Dans ce cas, son coefficient directeur est nul.
- Une droite (D) est oblique (ni parallèle à (xx'), ni parallèle à (yy')) si et seulement si son équation réduite est de la forme $(D): y = mx + p$ avec $m \neq 0$. Dans ce cas, m est son coefficient directeur et $\vec{v}_m\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ m \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur directeur de (D) .

b. Système d'équations paramétriques d'une droite

Théorème et définition : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère et (D) une droite passant par $A\left(\begin{smallmatrix} x_A \\ y_A \end{smallmatrix}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$. $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (D) \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$. Le système $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ est dit système d'équations paramétriques de (D) .

Preuve :

Si $M=A$ alors $\begin{cases} x = x_A + \alpha(0) \\ y = y_A + \beta(0) \end{cases}$ donc $t=0$.

Si $M \neq A$ alors $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = \alpha t \\ y - y_A = \beta t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}$$

Remarques : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

- Toute droite (D) admet une infinité de systèmes d'équations paramétriques.
- Si $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ est un système d'équations paramétriques de (D) alors le point dont les coordonnées sont obtenues en remplaçant t par un même réel quelconque dans les deux équations du système est un point de (D). Ainsi, on obtient le point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ si on pose $t = 0$. On dit que le point A est de paramètre 0.

Exercice d'application : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

- 1/ Donner un système d'équations paramétriques de (D) passant par $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 2/ En déduire une équation cartésienne de (D).
- 3/ Les points $C \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont-ils des points de (D) ?
- 4/ Déterminer les points d'intersection de (D) avec les axes de coordonnées.

Chapitre 5 : Applications du produit scalaire

Durée : 10h

Objectifs spécifiques :

- ✓ donner la définition du produit scalaire ;
- ✓ donner la définition de la norme d'un vecteur ;
- ✓ donner la définition de l'orthogonalité de deux vecteurs ;
- ✓ utiliser le produit scalaire pour calculer des distances et des normes ;
- ✓ développer des expressions vectorielles ;
- ✓ déterminer des mesures d'angles géométriques ;
- ✓ établir des relations métriques dans un triangle rectangle ;

- ✓ démontrer des propriétés géométriques (alignement, parallélisme, orthogonalité) ;
- ✓ déterminer une équation de droite connaissant un point de cette droite et un vecteur normal à cette droite ;
- ✓ déterminer une équation de cercle ;
- ✓ utiliser les relations métriques dans un triangle rectangle.
- ✓ déterminer les lignes de niveau qui sont au programme.

Prérequis :

- ✓ Projection orthogonale
- ✓ Mesure algébrique d'un bipoint
- ✓ Calcul vectoriel

Supports didactiques :

- ✓ Notre exposé Fastef 2015/2016 ;
- ✓ Collection Terracher : Géométrie 1^{ère} S ;
- ✓ Collection Hachette : Géométrie 1^{ère} S et E
- ✓ Collection N. Dimathème : 1^{ère} S/ E Géométrie
- ✓ Déclic première S : Géométrie ;
- ✓ Collection SPM 2nd ;
- ✓ CIAM 1^{ère} SM ;
- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue
- ✓ CIAM 2^{nde} S ;
- ✓ USAID ;

Plan du chapitre

- I. Généralités sur le produit scalaire
 1. Définitions
 2. Propriétés
 3. Carré scalaire
 4. Autres expressions du produit scalaire
 5. Orthogonalité
- II. Expression analytique du produit scalaire

1. Expression analytique dans une base orthonormée
2. Distance d'un point à une droite
3. Equation cartésienne d'un cercle

III. Produit scalaire et triangle

1. Relations métriques dans un triangle rectangle
2. Théorème d'Al Kashi
3. Théorème de la médiane
4. Théorème des sinus

IV. Lignes de niveau

1. Définition
2. Ligne de niveau de l'application $f: M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$
3. Ligne de niveau de l'application $f: M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$
4. Ligne de niveau de l'application $f: M \mapsto aMA^2 + bMB^2$
5. Ligne de niveau de l'application $f: M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Déroulement

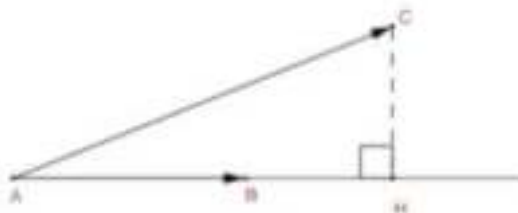
I. Généralités sur le produit scalaire

1. Définitions

a. Définition 1

Soient A, B et C trois points du plan. Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et défini par :

- ✓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ si $A=B$ ou $A=C$.
- ✓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) si $A \neq B$ et $A \neq C$.



b. Définition 2

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

c. Remarques

✓ Si $\widehat{BAC}$ est un angle aigu alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$. En effet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AH$.

✓ Si $\widehat{BAC}$ est obtus alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$. En effet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$.

✓ Si $\widehat{BAC}$ est un angle droit alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. En effet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA} = 0$ car $H = A$.

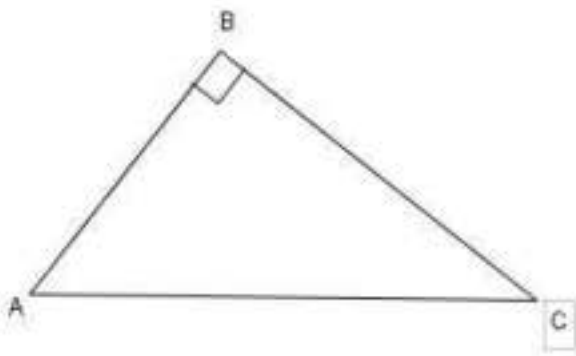
✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$. En effet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = AB \times AC$ car $H = C$ et $\widehat{BAC}$ est un angle aigu (ici il est nul).

✓ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de sens opposés alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$. En effet $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$ car $H = C$ et $\widehat{BAC}$ est un angle obtus (ici il est plat).

d. Exemple

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB=2\text{cm}$ et $BC=3\text{cm}$. Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

Solution



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB}$ car le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2$$

$$= AB^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$$

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CB}$ car le projeté orthogonal de A sur (BC) est B, donc on a :

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}^2$$

$$= CB^2$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 9$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ car } \widehat{ABC} \text{ est un angle droit.}$$

Exercice à faire : Soit EFG un triangle isocèle en E tel que FG=4cm. Calculer $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FE}$

2. Propriétés : $A \neq B$

a. Premières propriétés

- ✓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
- ✓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ où D est un point quelconque appartenant à la perpendiculaire à (AB) passant par C.
- ✓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{HH'}$ où H et H' sont respectivement les projetés orthogonaux de C et D sur (AB).
- ✓ Plus généralement $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$ où E et F sont des points quelconques appartenant respectivement à la perpendiculaire à (AB) passant par C et à la perpendiculaire à (AB) passant par D.

Preuve :

$$✓ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} ?$$

$$\text{Si } A = B \text{ ou } A = C \text{ alors } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Si $A \neq B$ et $A \neq C$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AK}$ où K est le projeté orthogonal de B sur (AC).

1^{er} cas : $\widehat{BAC}$ est droit alors $A = H = K$ donc $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} = 0$. Ainsi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AK} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

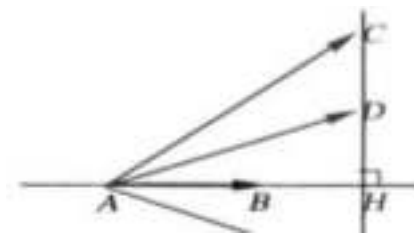
2^{ème} Cas : $\widehat{BAC}$ est aigu.

Dans ABK, $\cos \widehat{BAC} = \frac{AK}{AB}$; Dans CAH, $\cos \widehat{BAC} = \frac{AH}{AC}$. On a donc $\frac{AK}{AB} = \frac{AH}{AC}$ d'où $AB \times AH = AC \times AK$. Comme $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AH$ et $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AK} = AC \times AK$ donc $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AK}$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

3^{ème} cas : $\widehat{BAC}$ est obtus.

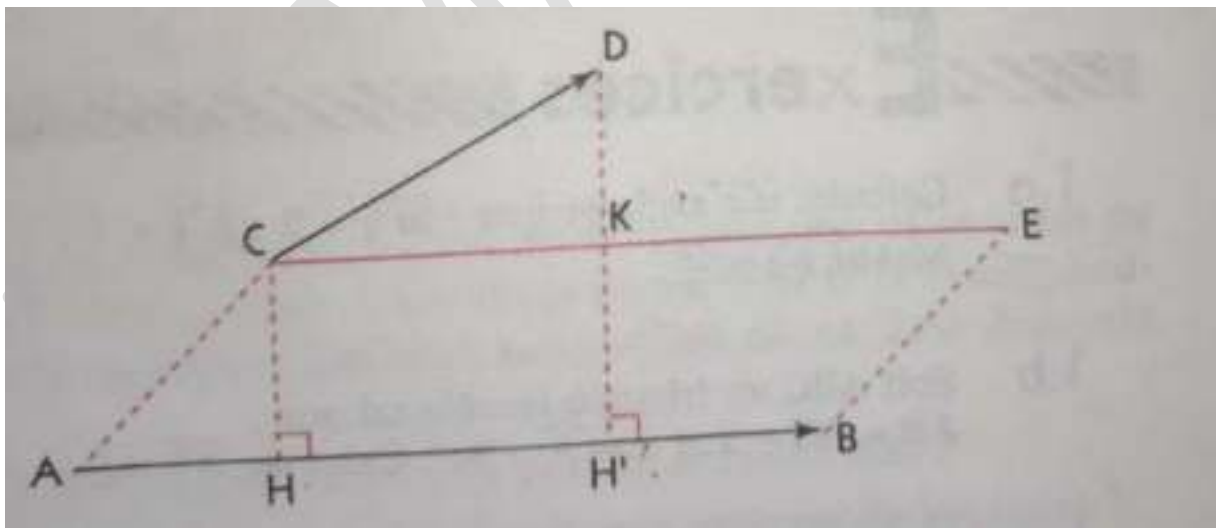
$\cos \widehat{BAK} = \frac{AK}{AB}$ et $\cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC}$. Comme $\widehat{BAK}$ et $\widehat{CAH}$ sont opposés par le sommet A donc $\frac{AK}{AB} = \frac{AH}{AC}$. Il s'en suit que $AB \times AH = AC \times AK$. Comme $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$ et $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AK} = -AC \times AK$ donc $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AK}$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

✓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$? D est un point quelconque appartenant à la perpendiculaire à (AB) passant par C.



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH}$ car C et D ont le même projeté orthogonal H sur (AB) d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

✓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{HH'}$? H et H' sont respectivement les projetés orthogonaux de C et D sur (AB).



Soit E le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CK}$ où K est le projeté orthogonal de D sur (CE). Soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB). On a donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{HH'}$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'}$ or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{HH'}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{HH'}$.

- ✓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$? E et F sont des points quelconques appartenant respectivement à la perpendiculaire à (AB) passant par C et à la perpendiculaire à (AB) passant par D.

Soient H et H' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'}$ car H et H' sont les projetés orthogonaux respectifs de E et F sur (AB).

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$.

Exercice d'application : Soit ABCD un carré de côté 4 cm et de centre O. Calculer de deux manières différentes $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{OB}$.

b. Autres propriétés : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et α un réel.

- ✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
 ✓ $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$
 ✓ $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Preuve :

- ✓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$?

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Soient A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

- ✓ $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$?

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Soient O, A, B et A' des points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OA'} = \alpha \vec{u}$

$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'} \times \overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA')=(OA).

$= (\alpha \overrightarrow{OA}) \times \overrightarrow{OH}$ car $\overrightarrow{OA'} = \alpha \overrightarrow{OA}$

$= \alpha (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH})$

$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$ car $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH}$

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{v}) \cdot \vec{u} = \alpha (\vec{v} \cdot \vec{u}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}). \text{ Ainsi, } (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

$$\checkmark \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} ?$$

$$\text{Si } \vec{u} = \vec{0} \text{ alors } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \text{ donc } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{Si } \vec{v} = \vec{0} \text{ alors } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ donc } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{Si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}. \text{ Soient A, B, C et D des points tels que } \vec{u} = \overrightarrow{OA}, \vec{v} = \overrightarrow{OB}, \vec{w} = \overrightarrow{OC} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$$

Soient C', B' et D' les projetés orthogonaux respectifs respectivement de C, B et D sur (OA).

On a donc

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD'}, \vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC'}$$

Par suite, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC'}$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'})$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD'}$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$$

3. Carré scalaire

a. **Définition** : Soit $\vec{u}$ un vecteur.

Le carré scalaire de $\vec{u}$ noté $\vec{u}^2$ est le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

b. Propriétés

$$\checkmark \quad \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \text{ donc } \vec{u}^2 \geq 0 \text{ et } \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}. \text{ En particulier } \overrightarrow{AB}^2 = AB^2.$$

- ✓ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- ✓ $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- ✓ $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- ✓ $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- ✓ $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
- ✓ $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Inégalité triangulaire)

Preuve

✓ $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 ?$

Soient A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. $\vec{u}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\vec{u}\|^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

$\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2.$

✓ $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ?$

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \end{aligned}$$

✓ $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 ?$

$$[\vec{u} + (-\vec{v})]^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot (-\vec{v}) + (-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

✓ $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 ?$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$$

✓ $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} ?$

Soient A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$$\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow AB = 0 \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

✓ $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| ?$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(x\vec{u} + \vec{v})^2 = \|x\vec{u} + \vec{v}\|^2 \geq 0$

$$(x\vec{u} + \vec{v})^2 = x^2 \vec{u}^2 + 2x\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{donc } \Delta' = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - \vec{u}^2 \vec{v}^2 \leq 0 \text{ d'où}$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 \vec{v}^2 \text{ donc } |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| ?$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad \text{or} \quad x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{donc} \quad (\vec{u} + \vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 + 2|\vec{u} \cdot \vec{v}| + \vec{v}^2 \leq \vec{u}^2 + 2\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| + \vec{v}^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \text{ donc } \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

4. Autres expressions du produit scalaire

a. Propriété

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2]$. En particulier, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2]$.

Preuve :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2].$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} [\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2] = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2] \end{aligned}$$

Exercice d'application : Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$; $AC = 2$ et $BC = 4$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\text{Solution : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2] = \frac{-3}{2}$$

b. Expression trigonométrique du produit scalaire

Si A, B et C sont des points 2 à 2 distincts alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC}$. Plus généralement $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Preuve :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} \text{ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB).}$$

Si $\widehat{BAC}$ est droit alors $H = A$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\cos \widehat{BAC} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 0.$$

Si $\widehat{BAC}$ est aigu alors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = AB \times AH$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

Comme $\cos \widehat{BAC} = \frac{AH}{AC}$ donc $AH = AC \times \cos \widehat{BAC}$. Par suite $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC}$

Si $\widehat{BAC}$ est obtus alors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.

Comme $\cos \widehat{BAC} = -\cos \widehat{HAC} = -\frac{AH}{AC}$ car $\widehat{BAC}$ et $\widehat{HAC}$ sont supplémentaires donc

$-AH = AC \times \cos \widehat{BAC}$. Par suite $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC}$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls. Il existe A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

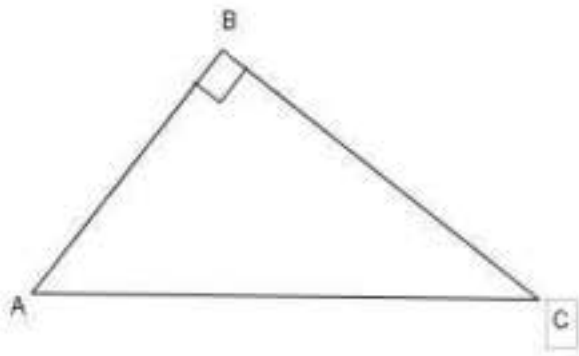
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC}$. L'angle $\widehat{BAC}$ est dit associé aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et

nous admettons que $\cos \widehat{BAC} = \cos(\vec{u}, \vec{v})$. Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice d'application : Soit ABC un triangle rectangle en B tel que AB=2cm et BC=3cm.

Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$

Solution



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC}$; $AC^2 = 13$ donc $AC = \sqrt{13}$. $\cos \widehat{BAC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \times CA \cos \widehat{ACB} = 3\sqrt{13} \times \frac{3}{\sqrt{13}} = 9$.

5. Orthogonalité

a. Définitions

- ✓ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (on note $\vec{u} \perp \vec{v}$) si ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou bien si leurs directions sont perpendiculaires lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

- ✓ Un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal à une droite (D) si $\vec{n} \neq \vec{0}$ et sa direction est perpendiculaire à celle de la droite (D).

b. Propriétés

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Preuve :

$\Rightarrow$) Supposons que $\vec{u} \perp \vec{v}$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors par définition $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Par suite $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

($\Leftarrow$) Supposons que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Comme $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$ donc $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Par suite $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c. Remarques

- ✓ Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si tout vecteur directeur de l'une est un vecteur normal à l'autre. Autrement dit le produit scalaire de deux vecteurs directeurs respectifs de ces deux droites est nul.
- ✓ Une droite (D) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Autrement dit $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Exercice d'application : Soit ABCD un carré, I et J les milieux respectifs de [AB] et [BC]. Montrer que (AJ) $\perp$ (DI).

Solution :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et } \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) \text{ donc } \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB})$$

$$= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}) \text{ car } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \text{ (ABCD est un carré)}$$

$$= \frac{1}{4} (AB^2 - AD^2) \text{ car } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 \text{ et } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = -AD^2.$$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0 \text{ donc } (AJ) \perp (DI).$$

II. Expression analytique du produit scalaire

Une unité de longueur est choisie.

1. Expression analytique dans une base orthonormée

a. Base orthonormée et repère orthonormé

- ✓ Une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite orthonormée (orthonormale) si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs unitaires et $\vec{i} \perp \vec{j}$ c'est-à-dire $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.
- ✓ Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dit orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

b. Théorème

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Preuve :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ et } \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \text{ donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = xx' \vec{i} \cdot \vec{i} + xy' \vec{i} \cdot \vec{j} + yx' \vec{j} \cdot \vec{i} + yy' \vec{j} \cdot \vec{j} \text{ or } \vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = 1 = \vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\|^2 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \text{ donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

c. Conséquences : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans

$(\vec{i}, \vec{j})$, $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- ✓ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.
- ✓ $\begin{cases} x = \vec{u} \cdot \vec{i} \\ y = \vec{u} \cdot \vec{j} \end{cases}$.
- ✓ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. En particulier $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- ✓ $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

d. Propriétés : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé et (D) et (D') des droites.

- ✓ Si (D): $ax + by + c = 0$ alors $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D).
- ✓ Si $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) et $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \in (D)$ alors (D): $ax + by - ax_A - by_A = 0$.
- ✓ Si (D): $ax + by + c = 0$ et (D'): $a'x + b'y + c' = 0$ alors $(D) \perp (D') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

✓ Si $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$ alors $(D) \perp (D') \Leftrightarrow mm' = -1$.

Preuve :

✓ Supposons que $(D): ax + by + c = 0$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) ; $\vec{u} \cdot \vec{n} = -ab + ba = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) .

✓ Supposons que $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) et $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \in (D)$. Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b = 0 \Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0.$$

✓ Supposons que $(D): ax + by + c = 0$ et $(D'): a'x + b'y + c' = 0$. $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D') . $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

✓ Supposons que $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$; $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D') . $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow 1 + mm' = 0$.

Exemple : Dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. La droite (D) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ a pour équation $(D): 3x + y - 3 = 0$.

2. Distance d'un point à une droite

a. Définition

Soit (D) une droite du plan, A un point du plan et H le projeté orthogonal de A sur (D) .

La distance AH est dite distance de A à la droite (D) . On la note $d(A, (D))$.

b. Propriété

Si $(D): ax + by + c = 0$ et $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors $d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Preuve

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (D) . Soit H le projeté orthogonal de A sur (D) . On

$$a: ax_H + by_H + c = 0$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = -ax_A - by_A + ax_H + by_H = -ax_A - by_A - c \text{ donc } |\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}| = |ax_A + by_A + c|$$

Donc $\|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| |\cos(\widehat{\overrightarrow{AH}, \vec{n}})| = |ax_A + by_A + c|$ d'où $\|\overrightarrow{AH}\| \cdot \|\vec{n}\| = |ax_A + by_A + c|$

$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\|\vec{n}\|} \text{ par suite } AH = d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple : Soient $(D): 2x - y - 6 = 0$ et $A(\frac{1}{4})$ un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$d(A, (D)) = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

3. Equation cartésienne d'un cercle

a. Rappel

Soit I un point et $r > 0$. Le cercle de centre I et de rayon r noté $C(I; r)$ est l'ensemble des points M vérifiant $IM = r$. Ainsi $M \in C(I; r) \Leftrightarrow IM = r$.

b. Théorème : Soient A et B des points distincts fixés.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. Autrement dit $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Preuve :

Soit I le milieu de $[AB]$. On a $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$ donc

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$$

$$= MI^2 - IA^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \text{ car } \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA^2$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 \text{ car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

Ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \Leftrightarrow MI = IA \Leftrightarrow M \in C(I; IA) = \text{cercle de diamètre } [AB]$.

Conséquence: Un triangle AMB est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$. Ainsi le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de son hypoténuse.

c. Théorème et définition : Soient $I \begin{pmatrix} x_I \\ y_I \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $r > 0$.

$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(I; r) \Leftrightarrow (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$. L'égalité $(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$ est dite une équation cartésienne du cercle de centre I et de rayon r dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Preuve :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(I; r) \Leftrightarrow IM = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2.$$

Exemple : Soit $I \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une équation cartésienne du cercle $C(I; 4)$ est $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Exercice d'application : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. (E) est l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$. Déterminer la nature de (E).

Solution :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 8y = -9$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 = -9$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$$

$$\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(I \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, 4)$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (E) \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C(I \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, 4) \text{ d'où (E) est le cercle de centre } I \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et de rayon 4.}$$

d. Théorème : Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

M appartient au cercle de diamètre [AB] $\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.
L'égalité $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$ est aussi une équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Preuve :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ appartient au cercle de diamètre [AB] } \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$

Exemple : Soient $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est $(x-1)(x+1) + (y-2)(y-3) = 0$. Ce qui peut aussi s'écrire $x^2 + y^2 - 5y + 5 = 0$.

e. Propriété : Soient (C) un cercle de centre I et A un point de (C) .

La tangente (T) à (C) en A est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$. Autrement dit $M \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$.

Preuve :

$$M \in (T) \Leftrightarrow (AM) \perp (AI) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0.$$

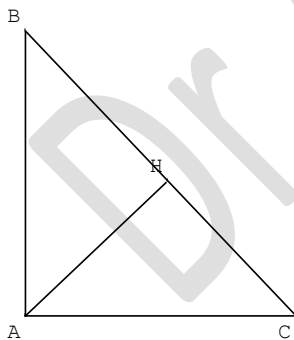
Exercice d'application : Soient $I\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ et $A\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) en A au cercle de centre I passant par A .

Solution : $M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \Leftrightarrow (x-5)(-4) + (y+1)(-3) = 0$

$M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in (T) \Leftrightarrow 4x + 3y - 17 = 0$. Ainsi, $(T): 4x + 3y - 17 = 0$.

III. Produit scalaire et triangle

1. Relations métriques dans un triangle rectangle



Si ABC est un triangle rectangle en A et H son projeté orthogonal sur (BC) alors on a :

1) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Théorème de Pythagore)

2) $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

3) $CA^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$

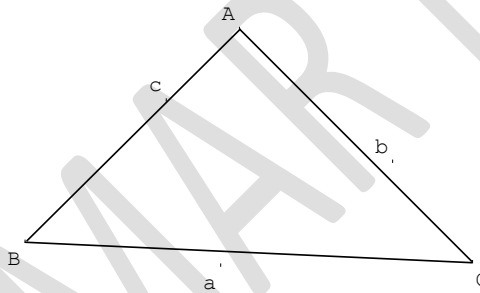
4) $HA^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$

5) $AB \times AC = BC \times AH$

Preuve :

- 1) $BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ Or $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. D'où $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- 2) $BA^2 = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BH}$
- 3) $CA^2 = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CH}$
- 4) $HA^2 = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB} \times \overrightarrow{HC}$
- 5) Dans le triangle BHA rectangle en H, $\sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB}$. Dans ABC rectangle en A, $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ or $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ donc $\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC}$ d'où $AB \times AC = BC \times AH$.

2. Théorème d'Al-Kashi



Si ABC est un triangle alors on a :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 AC \times BC \cos \hat{C}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \times BC \cos \hat{B}$
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \times AC \cos \hat{A}$

Preuve :

$$\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

Or $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \times BC \cos \widehat{ACB}$ donc $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 AC \times BC \cos \widehat{ACB}$.

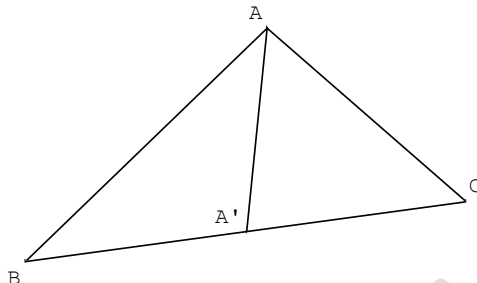
Les deux autres relations se démontrent de la même façon.

Conséquences :

- $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 AC \times BC}$. De même, on peut aussi déterminer $\cos \widehat{ABC}$ et $\cos \widehat{BAC}$.

- Dans un triangle, si deux côtés et l'angle qu'ils forment sont connus alors on peut connaître le troisième côté en utilisant le théorème d'Al-Kashi puis les deux autres angles en utilisant la formule ci-dessus.

3. Théorème de la médiane



Si ABC est un triangle et A' le milieu de [BC] alors $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$

Preuve :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B})^2 + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C})^2 \\ &= \overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{A'B}^2 + 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{A'C}^2 + 2\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'C} \end{aligned}$$

$$\text{Or } A'B = A'C = \frac{BC}{2} \text{ donc } \overrightarrow{A'B}^2 = \overrightarrow{A'C}^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$$\text{On obtient alors } AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2} + 2\overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$$

Comme $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ (car A' est le milieu de [BC])

$$\text{Donc } AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Remarques : Si B' et C' sont les milieux respectifs de [AC] et [AB] alors :

- $AB^2 + BC^2 = 2BB'^2 + \frac{AC^2}{2}$ et $BC^2 + AC^2 = 2CC'^2 + \frac{AB^2}{2}$.
- Ces relations permettent de calculer les médianes d'un triangle connaissant ses côtés.

4. Théorème ou formules des sinus

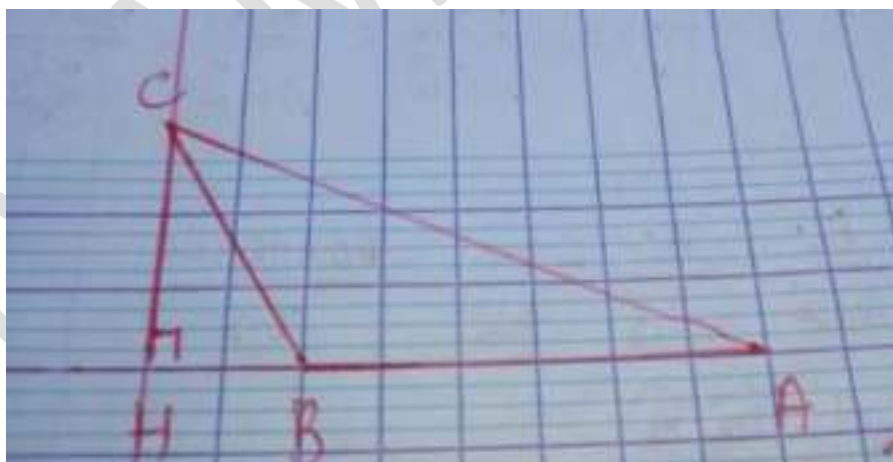
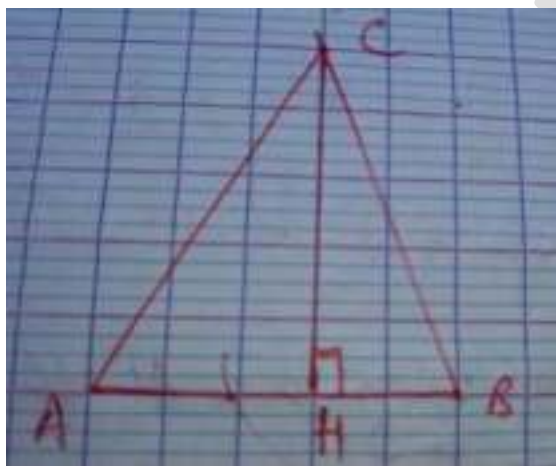
a. Aire d'un triangle

Si ABC est un triangle alors son aire est donnée aussi par $\mathcal{A} = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \hat{B} = \frac{1}{2} AC \times BC \sin \hat{C}$

Preuve :

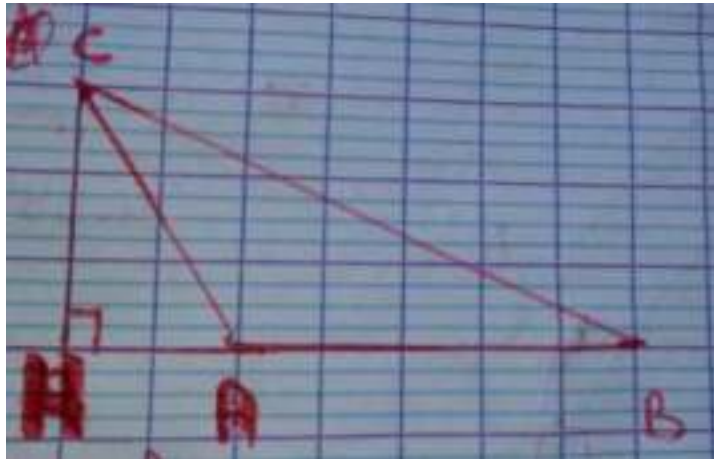
$S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A} = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \hat{B} = \frac{1}{2} AC \times BC \sin \hat{C}$. En effet, prenons (AB) comme Base et soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). On distingue 2 cas :

1^{er} cas : $\hat{A}$ aigu et $\hat{B}$ quelconque. Pour ce cas, on a les deux configurations suivantes :



$$S = \frac{1}{2} CH \times AB \text{ or } CH = AC \sin \hat{A} \text{ donc } S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A}$$

2^{ème} cas : $\hat{A}$ obtus



$S = \frac{1}{2} CH \times AB$ or $CH = AC \sin \widehat{HAC} = AC \sin(\pi - \widehat{BAC}) = AC \sin \widehat{BAC} = AC \sin \hat{A}$ donc
 $S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A}$. On montre de la même manière que $S = \frac{1}{2} AB \times BC \sin \hat{B} = \frac{1}{2} AC \times BC \sin \hat{C}$.

b. Formule des sinus

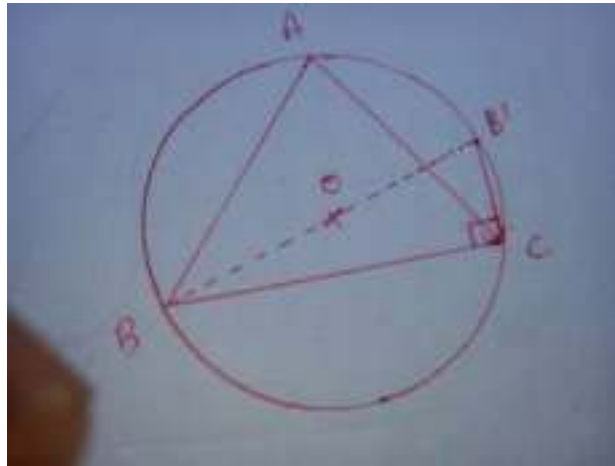
Si ABC est un triangle, $\mathcal{A}$ son aire et R le rayon de son cercle circonscrit alors : $\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} =$
 $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AB \times AC \times BC}{2\mathcal{A}} = 2R$

Preuve :

Ainsi $2\mathcal{A} = AB \times AC \sin \hat{A} = AB \times BC \sin \hat{B} = AC \times BC \sin \hat{C}$ d'où

$$\frac{2\mathcal{A}}{AB \times AC \times BC} = \frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}. \text{ Par conséquent : } \frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AB \times AC \times BC}{2\mathcal{A}}.$$

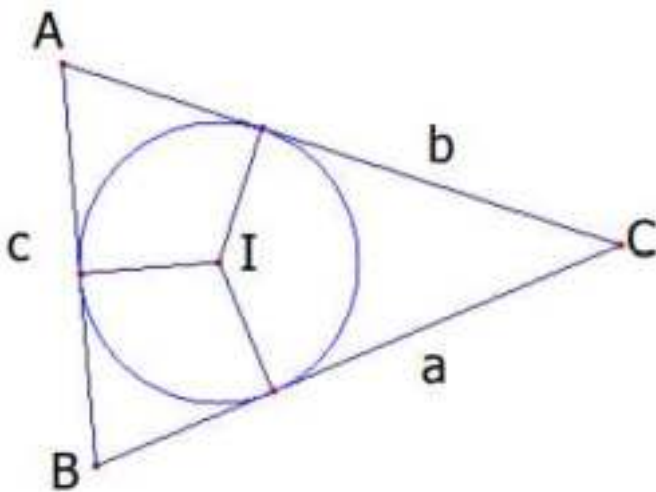
Soit B' le point diamétralement opposé à B.



D'après le théorème des sinus appliqué à $BB'C$, on a : $\frac{BC}{\sin \widehat{B'}} = \frac{BB'}{\sin \widehat{BCB'}}$ or $\sin \widehat{B'} = \sin \widehat{A}$; $BB' = 2R$ et $\widehat{BCB'} = \frac{\pi}{2}$ donc $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R$. Ainsi, on a : $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{AB \times AC \times BC}{2\mathcal{A}} = 2R$

c. Remarques

- $\mathcal{A} = \frac{AB \times AC \times BC}{4R}$. En effet, $\frac{AB \times AC \times BC}{2\mathcal{A}} = 2R \Rightarrow 4\mathcal{A}R = AB \times AC \times BC$ d'où $\mathcal{A} = \frac{AB \times AC \times BC}{4R}$.
- Dans un triangle, si deux angles et un côté sont connus alors on peut déterminer le troisième angle en utilisant la somme de ses angles qui vaut 180° ou π rad puis le théorème des sinus pour déterminer les deux autres côtés.
- Si ABC est un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, r le rayon du cercle inscrit dans ABC et p le demi-périmètre de ABC . On a : $\mathcal{A} = p r$. En effet :



$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(IAB) + \mathcal{A}(IAC) + \mathcal{A}(IBC)$$

$$= \frac{1}{2}(r \times AB) + \frac{1}{2}(r \times AC) + \frac{1}{2}(r \times BC)$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC) = pr$$

A RETENIR : $\mathcal{A} = \frac{AB \times AC \times BC}{4R} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)r$

IV. Lignes de niveau

1. **Définition :** Soit $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ et k un réel.

$$M \mapsto f(M)$$

La ligne de niveau k de f (ou bien la ligne de niveau de f relativement à k) notée L_k est l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$. Ainsi $L_k = \{M \in \mathcal{P}: f(M) = k\}$.

2. Propriété

Si $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application alors il existe une unique ligne de niveau de f passant par un point donné. Autrement dit 2 lignes de niveau d'une même application qui ont un point commun sont égales.

Preuve :

Soit $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ une application, O un point donné, k et $k' \in \mathbb{R}$ tels que L_k et $L_{k'}$ sont des lignes de niveau de f passant par O . On a : $L_k = \{M \in \mathcal{P}: f(M) = k\}$ et $L_{k'} = \{M \in \mathcal{P}: f(M) = k'\}$. Ainsi $O \in L_k \Leftrightarrow f(O) = k$ et $O \in L_{k'} \Leftrightarrow f(O) = k'$ d'où $k = k'$ et par conséquent $L_k = L_{k'}$.

3. Ligne de niveau de l'application $f: M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$

a. Théorème

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, O un point, $f: M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors la ligne de niveau k de f ($\{M \in \mathcal{P}: \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = k\}$) est la droite perpendiculaire à (OA) en H où A et H sont les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH} = \frac{k}{\overrightarrow{OA}}$.

Preuve :

Soit A tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ donc $f(M) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ et $L_k = \{M \in \mathcal{P} : \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = k\}$. Soit $M \in L_k$ et H son projeté orthogonal sur (OA).

$$M \in L_k \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = k$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH} = k$$

$$M \in L_k \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{k}{\overrightarrow{OA}}$$

Ainsi L_k est l'ensemble des points M dont le projeté orthogonal sur (OA) est le point H vérifiant $\overrightarrow{OH} = \frac{k}{\overrightarrow{OA}}$ or l'ensemble des points M dont le projeté orthogonal sur (OA) est le point H est la droite perpendiculaire à (OA) en H. Ainsi L_k est la droite perpendiculaire à (OA) en H où A et H sont les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH} = \frac{k}{\overrightarrow{OA}}$.

b. Remarques

- Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $\vec{u}$ est un vecteur normal de la ligne de niveau k de $f: M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$.
- Si $k > 0$ alors H est le point de la demi-droite $[OA)$ vérifiant $OH = \frac{k}{OA}$.
- Si $k < 0$ alors H est le point de la demi-droite $[AO)$ vérifiant $OH = \frac{-k}{OA}$.
- Si $k = 0$ alors $H = O$ et donc la ligne de niveau 0 de $f: M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$ est la droite perpendiculaire à (OA) en O.

c. Exemple

On donne un vecteur $\vec{u}$ et un point O tels que $\|\vec{u}\| = 6 \text{ cm}$. Déterminons puis construisons la ligne de niveau 12 de $f: M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Soit A tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ donc $f(M) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$. Soit $M \in L_{12}$ et H son projeté orthogonal sur (OA).

$$M \in L_{12} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 12$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OH} = 12$$

$$M \in L_{12} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{12}{\overrightarrow{OA}}$$

Comme $12 > 0$ donc L_{12} est la droite perpendiculaire à (OA) en H où A est le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et H celui de la demi-droite $[OA)$ vérifiant $OH = \frac{12}{6} = 2$.

d. Exercice à faire

Soient A et B des points tels que $AB=2$ cm. Déterminer puis construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -12$

4. Ligne de niveau de l'application $f : M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

a. Théorème

Si A et B sont des points donnés, $f : M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors la ligne de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit réduit à un singleton, soit un cercle.

Preuve :

Soit I le milieu de $[AB]$.

$$M \in L_k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = k \text{ car } \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \text{ car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$$

$$M \in L_k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

- Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$ alors $M \in L_k \Leftrightarrow MI^2 < 0$ impossible donc $L_k = \emptyset$.
- Si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$ alors $M \in L_k \Leftrightarrow MI^2 = 0 \Leftrightarrow M = I$ donc $L_k = \{I\}$.
- Si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ alors $M \in L_k \Leftrightarrow MI = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}} \Leftrightarrow M \in C(I; \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}})$

b. Exemple

Soient A et B des points du plan tels que $AB = 10$ et $f : M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$. Déterminons puis construisons la ligne de niveau -9 de f.

Solution

Soit I le milieu de $[AB]$.

$$M \in L_{-9} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = -9$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -9$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = -9 \text{ car } \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 - 25 = -9 \text{ car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow MI = 4$$

$$M \in L_{-9} \Leftrightarrow M \in C(I; 4)$$

c. Remarque

la ligne de niveau 0 de $f: M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

d. Exercice à faire

Soient A et B tels que $AB = 2 \text{ cm}$. Déterminer et construire la ligne de niveau -8 de $f: M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

5. Ligne de niveau de l'application $f: M \mapsto aMA^2 + bMB^2$

a. Théorème

Si A et B sont des points donnés, $a \neq 0, b \neq 0, f: M \mapsto aMA^2 + bMB^2$ et $k \in \mathbb{R}$ alors la ligne de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit un cercle, soit une droite.

Preuve :

- Si $a + b = 0$ alors $b = -a$ donc $f(M) = a(MA^2 - MB^2)$

$$M \in L_k \Leftrightarrow a(MA^2 - MB^2) = k$$

$$\Leftrightarrow a(\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2) = k$$

$$\Leftrightarrow a (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = k$$

$$\Leftrightarrow a (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = k$$

$$\Leftrightarrow a \overrightarrow{BA}.2 \overrightarrow{MI} = k \text{ où } I \text{ milieu de } [AB]$$

$$\Leftrightarrow 2a \overrightarrow{AB}. \overrightarrow{IM} = k$$

$$\Leftrightarrow 2a \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{IH} = k \text{ où } H \text{ est le projeté orthogonal de } M \text{ sur } (AB).$$

$$M \in L_k \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{k}{2a \overrightarrow{AB}}$$

Ainsi L_k est la droite perpendiculaire à (AB) en H tel que $\overrightarrow{IH} = \frac{k}{2a \overrightarrow{AB}}$ avec I le milieu de $[AB]$.

- Si $a + b \neq 0$ alors soit $G = \text{bary}\{(A, a); (B, b)\}$.

$$M \in L_k \Leftrightarrow aMA^2 + bMB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow a(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + b(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow a(MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2) + b(MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2) = k$$

$$\Leftrightarrow aMG^2 + 2a\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + aGA^2 + bMG^2 + 2b\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + bGB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (a+b)MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}) + aGA^2 + bGB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (a+b)MG^2 + aGA^2 + bGB^2 = k \text{ car } a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)MG^2 + a\frac{b^2}{(a+b)^2}AB^2 + b\frac{a^2}{(a+b)^2}AB^2 = k \text{ car } \begin{cases} \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{BA} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)MG^2 + \frac{ab}{(a+b)^2}AB^2(a+b) = k$$

$$\Leftrightarrow (a+b)MG^2 + \frac{ab}{a+b}AB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (a+b)MG^2 = k - \frac{ab}{a+b}AB^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{k}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2}AB^2$$

✓ Si $\frac{k}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2}AB^2 < 0$ alors $M \in L_k \Leftrightarrow MG^2 < 0$ impossible d'où $L_k = \emptyset$.

✓ Si $\frac{k}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2}AB^2 = 0$ alors $M \in L_k \Leftrightarrow MG^2 = 0 \Leftrightarrow M = G$ donc $L_k = \{G\}$.

$$\checkmark \text{ Si } \frac{k}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2} AB^2 > 0 \text{ alors } M \in L_k \Leftrightarrow MG = \sqrt{\frac{k}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2} AB^2}$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(G; \sqrt{\frac{k}{a+b} - \frac{ab}{(a+b)^2} AB^2})$$

b. Exemple

On donne un segment $[AB]$ tel que $AB=3\sqrt{2}$ cm, déterminons et construisons la ligne de niveau 0 de $f : M \mapsto 2MA^2 - MB^2$

Solution :

Soit $G = \text{bary}\{(A, 2); (B, -1)\}$

$$M \in L_0 \Leftrightarrow 2MA^2 - MB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2) - (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2MG^2 + 4\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + 2GA^2 - MG^2 - 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} - GB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) + 2GA^2 - GB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MG^2 + 2GA^2 - GB^2 = 0 \text{ car } 2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 + 2AB^2 - 4AB^2 = 0 \text{ car } \begin{cases} \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BA} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow MG^2 - 2AB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = 2AB^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow MG = 6$$

$$M \in L_0 \Leftrightarrow M \in \mathcal{C}(G, 6)$$

c. Exercice à faire : (Exo 12 question 3))

6. Ligne de niveau de l'application $f: M \mapsto \frac{MA}{MB}$

a. Théorème

Si A et B sont des points du plan, $f: M \mapsto \frac{MA}{MB}$ une application de $\mathcal{P} \setminus \{B\}$ dans $\mathbb{R}$ et $k \neq 0$ alors la ligne de niveau k de f est soit l'ensemble vide, soit la médiatrice de $[AB]$, soit un cercle.

Preuve :

$$M \in L_k \Leftrightarrow f(M) = k$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = k$$

- Si $k < 0$ alors $M \in L_k \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} < 0$ impossible d'où $L_k = \emptyset$.
- Si $k = 1$ alors $M \in L_k \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 1$

$$\Leftrightarrow MA = MB$$

$$M \in L_k \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de } [AB]$$

- Si $k \in]0; +\infty[\setminus \{1\}$ alors

$$M \in L_k \Leftrightarrow MA = k MB$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - k^2 \overrightarrow{MB}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - k)\overrightarrow{MI} \cdot (1 + k)\overrightarrow{MJ} = 0 ; I = \text{bary}\{(A, 1); (B, -k)\} \text{ et } J = \text{bary}\{(A, 1); (B, k)\}$$

$$\Leftrightarrow (1 - k^2)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0 \text{ car } 1 - k^2 \neq 0$$

$$M \in L_k \Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [IJ].$$

b. Exemple

On donne un segment $[AB]$ tel que $AB=4 \text{ cm}$. Déterminer et construire la ligne de niveau 4 de $f: M \mapsto \frac{MA}{MB}$.

Solution :

$$M \in L_4 \Leftrightarrow MA = 4 MB$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = 16 MB^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 4^2 \overrightarrow{MB}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3)\overrightarrow{MI} \cdot (5)\overrightarrow{MJ} = 0 \text{ } I = \text{bary}\{(A, 1); (B, -4)\} \text{ et } J = \text{bary}\{(A, 1); (B, 4)\}$$

$$\Leftrightarrow (-15)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$$

$$M \in L_4 \Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [IJ].$$

d. Exercice à faire :(Exo 12 question 5))

Chapitre 6: ANGLES ORIENTES

Ce cours est destiné à l'élève de 1 S1 qui n'a pas fait les angles orientés en seconde. Il ramasse la partie sur les angles orientés qui devait être vue en seconde ainsi que celle qui doit être vue en première.

Durée : 15h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition du radian ;
- ✓ Calculer la longueur d'un arc de cercle ;
- ✓ Convertir les degrés en radians et inversement ;
- ✓ Reconnaître sur un dessin codé un angle orienté de demi-droites ou de vecteurs ;
- ✓ Restituer le vocabulaire : mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Déterminer la mesure principale d'un angle orienté ;
- ✓ Construire un angle orienté connaissant sa mesure principale ;
- ✓ Connaître les notations $(\vec{u}, \vec{v}) = \hat{\alpha}$ pour les angles ; $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{v})$, α pour les mesures et $x \equiv y [2\pi]$
- ✓ Utiliser les angles orientés pour :
 - Calculer des mesures d'angles ;
 - Démontrer des propriétés ;
 - Déterminer des lignes de niveau de la forme $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha [2\pi]$
- ✓ Construire un arc capable.

Prérequis :

- ✓ Angles géométriques

Supports didactiques :

- ✓ C.I.A.M 2^{nde} S ; 1^{ère} SM ; 1^{ère} SE
- ✓ Collection Spirale 2^{nde} ;
- ✓ Collection perspectives 2^{nde} ;
- ✓ USAID 2^{nde} ;
- ✓ Collection Fractale 2^{nde} ;
- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue ;

Plan de la leçon

I. Rappels

1. Rappels sur les angles géométriques (ou angles non orientés)

1. Définition

2. Définition et notation radian

- Relation entre le degré et le radian
- Tableau de conversion en radians des mesures en degrés des angles remarquables

3. Angle inscrit et angle au centre

4. Quadrilatères inscrits

5. Arcs capables

II. Angles orientés

1. Orientation

2. Angles orientés de deux demi-droites de même origine

- a. Définition, notation et représentation
- b. Remarque
- c. Exercices d'application
- d. Orientation d'un angle orienté de deux demi-droites de même origine
- e. Mesure principale
- f. Exercices d'application
- g. Remarque

3. Angles orientés d'un couple de vecteurs non nuls

- a. Définition, notation et représentation
- b. Remarque
- c. Exercice d'application
- d. Définitions
- e. Exemple
- f. Exercice d'application

4. Repérage sur le cercle trigonométrique

- a. Cercle trigonométrique
- b. Image d'un réel sur le cercle trigonométrique
- c. Congruence modulo 2π
- d. Mesures d'un arc orienté
- e. Mesures d'un angle orienté

III. Addition d'angles orientés

1. Définitions

2. Propriétés

IV. Angles inscrits-angles au centre

1. Définition

2. Théorème

3. Caractérisation du cercle

4. Théorème

5. Caractérisation d'une tangente à un cercle

6. Arcs capables

a. Ligne de niveau $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha[\pi]$

b. Ligne de niveau $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha[2\pi]$

Déroulement du cours

Introduction orale

Imaginons, une personne étrangère qui veut prier et par manque de repère se dirige vers le sud. Si tu veux qu'il se retourne pour faire face à l'Est alors quelle consigne vous allez lui donner ?

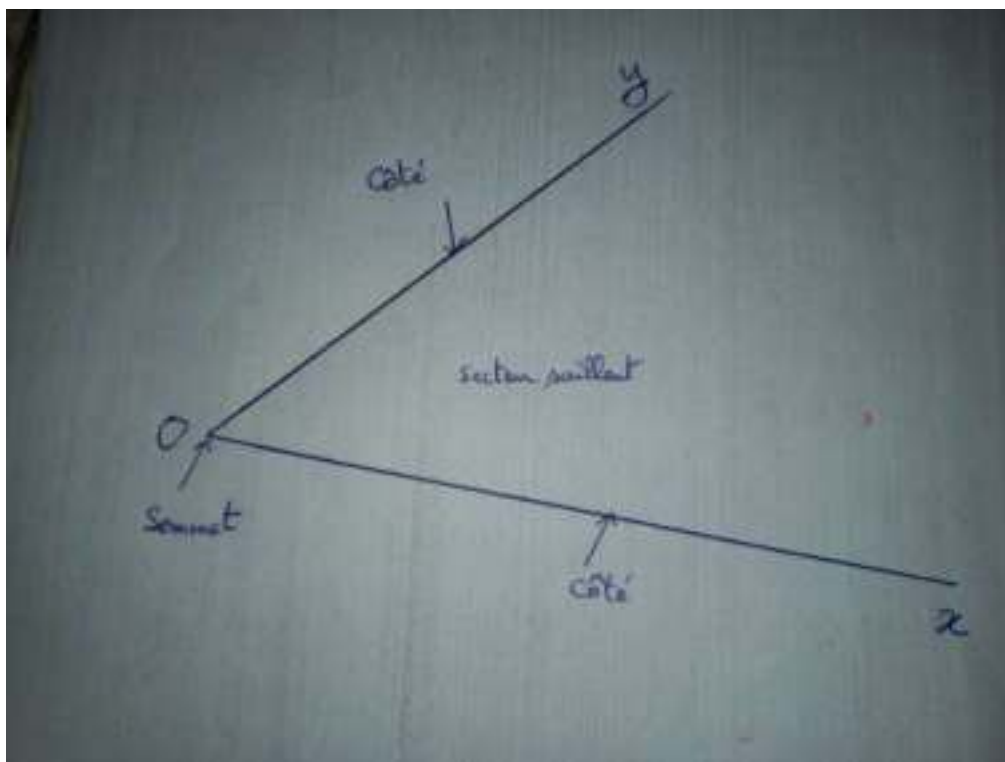
Naturellement, tu dois lui demander de tourner d'un angle de 90° . Mais si tu te limites à ça, l'étranger peut tourner de 90° vers la droite et dans ce cas, il fera face à l'Ouest au lieu de l'Est, donc il est nécessaire de lui indiquer qu'il doit tourner de 90° vers la gauche pour faire face à l'Est. Ainsi pour cet étranger, il ne s'agit pas seulement de tourner d'un angle de 90° mais il y a aussi un sens dans lequel il doit tourner. Ce problème met en évidence l'importance des angles définis avec un sens d'orientation. La notion d'angles orientés s'impose et contribuera sans doute plus que les angles géométriques.

I. Angle orienté

1. Rappels sur les angles géométriques (ou angles non orientés)

1. Définition

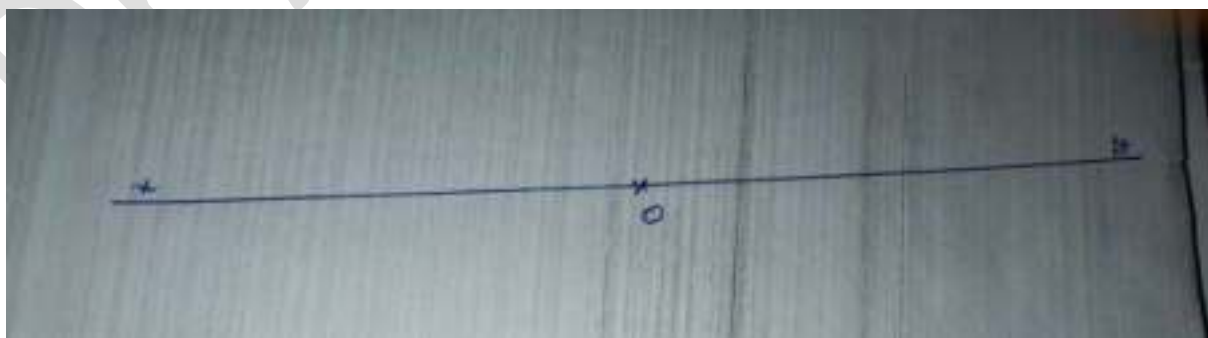
Deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ de même origine O définissent un angle noté $\widehat{xOy}$ ou $\widehat{yOx}$ dit angle géométrique ou angle non orienté. O est le sommet de l'angle ; $[Ox)$ et $[Oy)$ sont les côtés de l'angle.



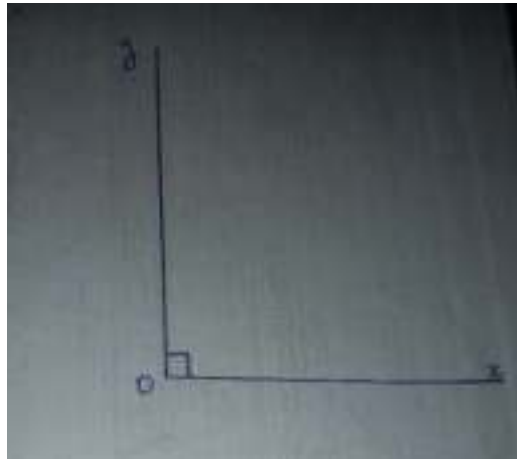
- Si les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont confondues alors l'angle $\widehat{xOy}$ est dit angle nul.



- Si les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont opposées alors l'angle $\widehat{xOy}$ est dit angle plat.



- Si les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ sont perpendiculaires alors l'angle $\widehat{xOy}$ est dit angle droit.



b. Définition et notation du radian

Le radian noté rad est une unité de mesure d'angles choisie de telle sorte qu'un angle plat mesure π rad.

➤ Relation entre le degré et le radian

Si x est la mesure en degrés et y la mesure en radians d'un même angle géométrique alors: $\frac{x}{y} = \frac{180}{\pi}$. Ce qui équivaut aussi à $180y = \pi x$.

➤ Tableau de conversion en radians des mesures en degrés des angles remarquables

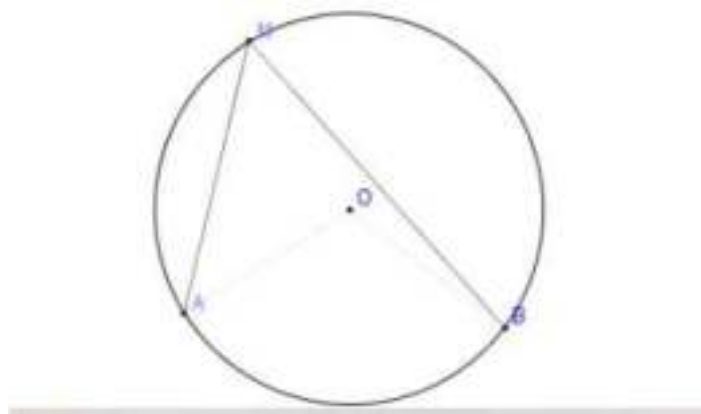
La relation $180y = \pi x$ a permis de convertir en radians les mesures en degrés ci-dessous d'angles dits angles remarquables. On obtient le tableau suivant.

0°	30°	45°	60°	90°	180°
0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad

NB : Généralement, dans la pratique, on confond un angle géométrique et sa mesure.

c. Angle inscrit dans un cercle et angle au centre d'un cercle.

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r , A, B et M des points deux à deux distincts sur (C).

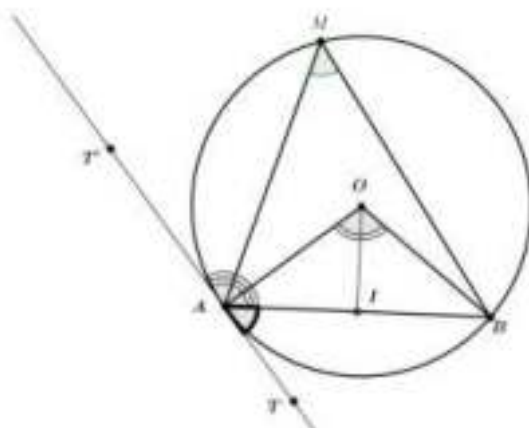


- Un angle inscrit dans (C) est un angle dont le sommet est sur (C) et ses cotés recoupent (C). Par exemple : sur la figure ci-dessus, l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans (C).
- Un angle au centre de (C) est un angle dont le sommet est le centre O de (C). Par exemple : sur la figure ci-dessus, l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre de (C).
- L'arc de cercle intercepté par un angle inscrit dans un cercle (C) est l'arc de (C) ne contenant pas le sommet de l'angle inscrit.
- L'arc de cercle intercepté par un angle au centre d'un cercle (C) est l'arc de ce cercle contenu dans le secteur saillant de l'angle au centre.

Par exemple, sur la figure ci-dessus, le petit arc noté $\widehat{AB}$ est l'arc intercepté par l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ mais aussi par l'angle au centre $\widehat{AOB}$. On dit que $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$ sont associés.

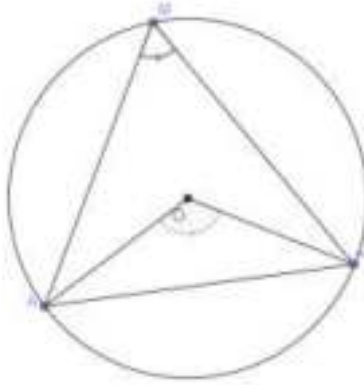
➤ Remarque

Si le sommet d'un angle est sur un cercle (C), l'un de ses cotés recoupe (C) et l'autre côté est tangent à (C) alors on dit aussi que cet angle est un angle inscrit dans (C). Par exemple, sur la figure ci-dessous, l'angle $\widehat{TAB}$ est angle inscrit dans (C) qui intercepte l'arc $\widehat{AB}$.

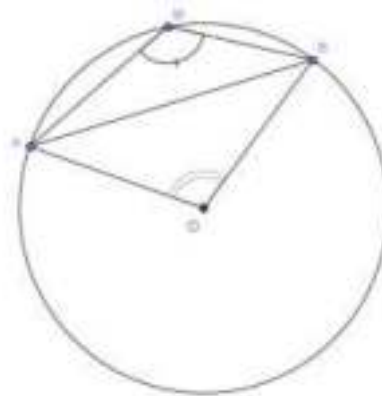


➤ Propriétés

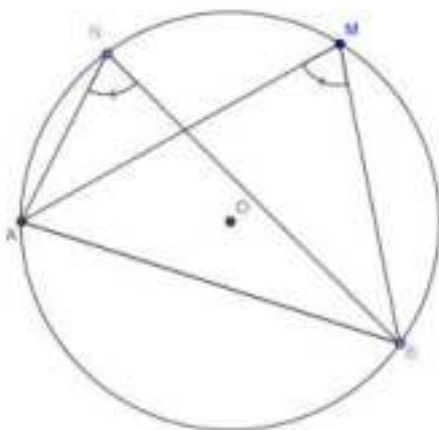
P₁) Si un angle inscrit dans un cercle et un angle au centre de ce cercle interceptent le même arc de cercle alors la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit. Par exemple, sur la figure ci-dessous, on a : $\widehat{AOB} = 2 \widehat{AMB}$ (ou bien $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$).



P₂) Si dans un cercle, l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte le grand arc $\widehat{AB}$ alors $\widehat{AOB} = 2(\pi - \widehat{AMB})$ (ou bien $\widehat{AMB} = \pi - \frac{1}{2} \widehat{AOB}$).



P₃) Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc alors ils ont la même mesure. Par exemple, sur la figure ci-dessous, on a : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.

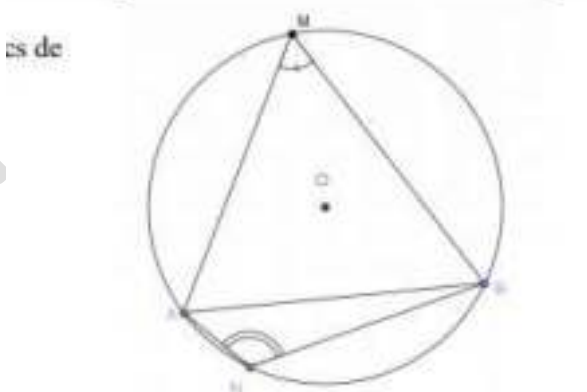


P4) Si deux angles inscrits dans un même cercle interceptent des arcs de même longueur alors ils sont égaux.



Les arcs $\widehat{BC}$ et $\widehat{DF}$ ont même longueur.
 $\text{mes}\widehat{CAB} = \text{mes}\widehat{DEF}$.

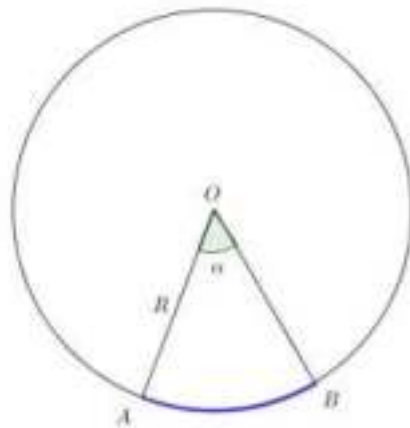
P5) Si deux angles inscrits interceptent des arcs de même extrémité alors ils sont supplémentaires.



$$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \pi$$

P6) La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur

P7) La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte. Plus précisément, si A et B sont sur un cercle de centre O et de rayon r et α est la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$ alors la longueur l de l'arc $\widehat{AB}$ intercepté par $\widehat{AOB}$ est $l = r\alpha$.



Exercice d'application

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon 2 cm, A, B et M des points deux à deux distincts sur (C) tel que $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$. En déduire celle de l'arc $\widehat{AB}$.

d. Quadrilatères inscrits

Définitions

D1) Un quadrilatère ABCD est dit convexe si les sommets opposés A et C n'appartiennent pas au même demi-plan de frontière (BD) et les sommets opposés B et D n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (AC). Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est convexe.

Rappelons que si un quadrilatère est convexe alors la somme de ses 4 angles est égale à 2π rad (360°). (Exo : Démontrer cette propriété).

D2) Un quadrilatère ABCD est dit croisé si les sommets opposés A et C appartiennent au même demi-plan de frontière (BD) et les sommets opposés B et D appartiennent au même demi-plan de frontière (AC). Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est croisé.

D3) Un quadrilatère ABCD qui n'est ni convexe ni croisé est dit non convexe et non croisé. Par exemple, le quadrilatère ABCD ci-dessous est non convexe et non croisé.

D4) Un quadrilatère est dit inscriptible dans un cercle si ses 4 sommets appartiennent au cercle. Par exemple, sur la figure ci-dessous, le quadrilatère ABCD est inscriptible dans le cercle (C).

Propriétés

P1) Si deux angles opposés d'un quadrilatère convexe sont supplémentaires alors le quadrilatère est inscriptible dans un cercle. En réalité, si deux de ces angles sont supplémentaires alors les deux autres le sont aussi. La propriété **P1)** est admise.

P2) Si un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle alors ses angles opposés sont deux à deux supplémentaires.

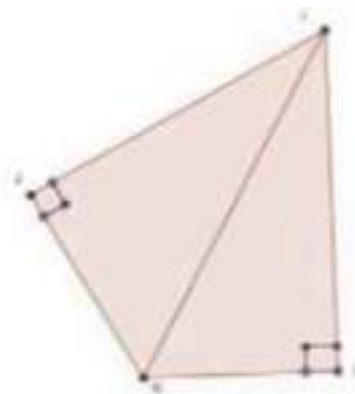
Exercice :

1. Soit (C) un cercle de centre O. ABCD un quadrilatère convexe inscriptible dans (C) tel que A et C soient diamétralement opposés.
 - a. Faire une figure.
 - b. Montrer que $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont supplémentaires.
 - c. En déduire que $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires.
- ✓ Soit (C) un cercle de centre O. ABCD un quadrilatère convexe inscriptible dans (C) tel que $\widehat{ABC}$ obtus. Soit A', le point diamétralement opposé à A.
 - a. Faire une figure puis justifier que $\widehat{A'BC} = \widehat{A'DC}$.
 - b. Montrer que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} + \widehat{A'BC}$ et $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{A'DC}$.
 - c. Montrer que $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont supplémentaires.
 - d. En déduire que $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires.

NB : Cet exercice est une preuve de P2)

Exercices d'application :

Exo 1: Soit IJKL le quadrilatère ci-dessous.



Montrer que IJKL est inscriptible dans un cercle. Préciser ce cercle.

Exo 2 : Soient ABCD un trapèze isocèle. Montrer que ABCD est inscriptible dans un cercle.

e. Arcs capables :

Activité : Soient A et B des points tels que $AB = 4 \text{ cm}$. Soit $(E) = \{M \in \mathcal{P} : \widehat{AMB} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}\}$

1. Construire un point C tel que $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$. En déduire que (E) n'est pas vide.
2. Soit (C) le cercle circonscrit à ABC et (Γ) l'arc de cercle d'extrémités A et B contenant C privé de A et B. Montrer que $M \in (\Gamma) \Rightarrow M \in (E)$.
3. Soit (Γ') , le symétrique de (Γ) par rapport à (AB). Montrer que $M' \in (\Gamma') \Rightarrow M' \in (E)$. En déduire que $(\Gamma) \cup (\Gamma') \subset (E)$.

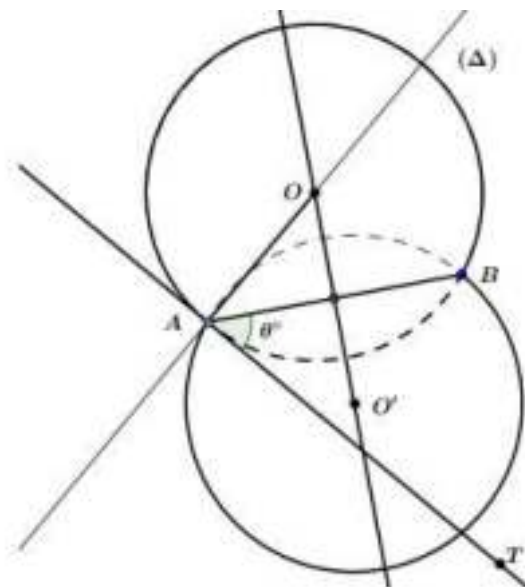
Nous Admettrons que $(E) = (\Gamma) \cup (\Gamma')$.

Théorème et définition : Si A et B sont des points distincts et $\theta \in]0; \pi[$ alors l'ensemble des points M tels que $\widehat{AMB} = \theta \text{ rad}$ est la réunion de deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB) privé de A et B. Ces deux arcs sont dits arcs capables d'angle θ d'extrémités A et B.

Méthode de construction

- On construit un point T tel que $\widehat{TAB} = \theta \text{ rad}$.
- On construit (Δ) , la perpendiculaire à (AT) en A.
- On construit O le point d'intersection de (Δ) et de la médiatrice de [AB].
- On construit l'arc de cercle (Γ) de centre O passant par A ou B situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas T.

- On construit (Γ') le symétrique de (Γ) par rapport à (AB) . (E) est la réunion de (Γ) et (Γ') privée de A et B.



Remarque : l'ensemble des points M tels que $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B.

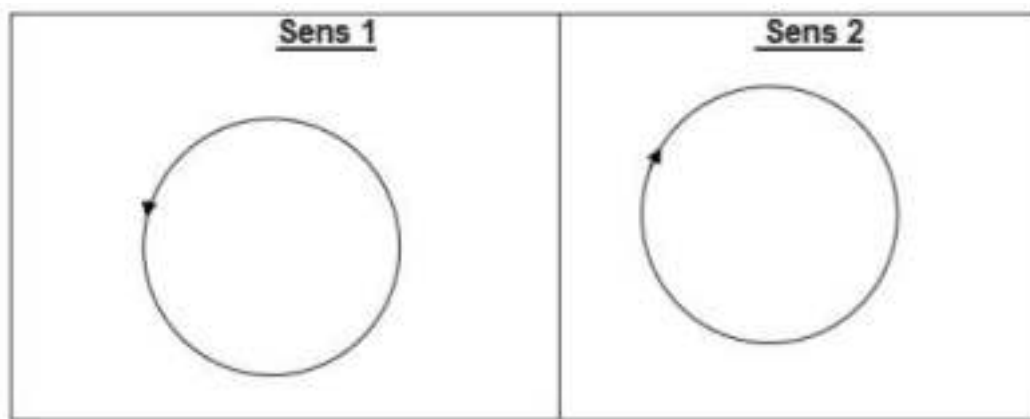
Exercice : Soit A et B des points. Construire l'ensemble des points M tels $\widehat{AMB} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$.

II. Angles orientés

1. Orientation

a. Orientation du cercle

Soit (C) un cercle donné du plan. On admet qu'il n'y a que deux sens de parcours possibles sur (C) : le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens 1) et le sens des aiguilles d'une montre (sens 2).



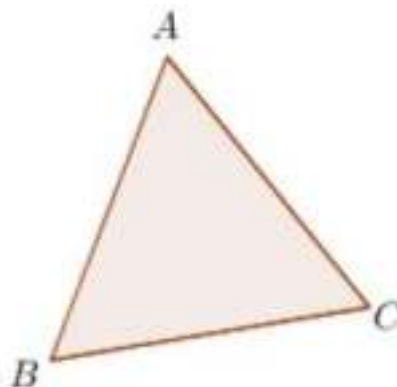
- Orienter le cercle, c'est choisir l'un de ces deux sens de parcours et décider qu'il est le sens direct. Dans ce cas, l'autre sens sera dit sens indirect.

b. Orientation du plan

- Orienter le plan, c'est choisir une bonne fois pour toutes :
 - a. un point fixe O appelé origine.
 - b. le même sens de parcours sur tous les cercles du plan. Ce sens choisi est dit sens direct (ou sens positif ou sens trigonométrique). Le sens contraire à celui choisi est dit sens indirect (ou sens négatif ou sens rétrograde).

c. Remarques

- Généralement, le sens contraire des aiguilles d'une montre est choisi comme sens direct et donc le sens des aiguilles d'une montre comme sens indirect. Dans toute la suite du cours, nous prenons cette convention.
- Un triangle ABC du plan orienté est dit direct (respectivement indirect) si en le parcourant de A à C en passant par B , le mouvement se fait dans le sens direct (respectivement dans le sens indirect).



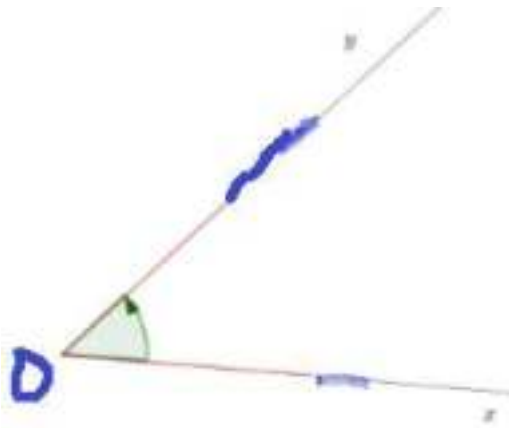
ABC est direct.

2. Angles orientés de deux demi-droites de même origine

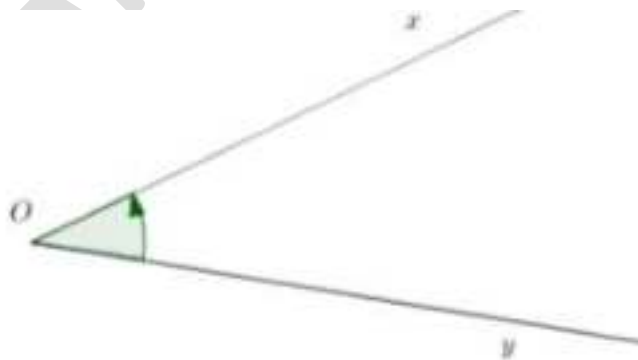
a. Définition, notation et représentation

Soient $[Ox)$ et $[Oy)$, des demi-droites de même origine O . $[Ox)$ et $[Oy)$ définissent deux angles orientés de demi-droites :

- L'angle orienté de demi-droites $([Ox);[Oy))$ noté $(\widehat{[Ox);[Oy)})$. O est son sommet, $[Ox)$ est la demi-droite origine et $[Oy)$ est la demi-droite extrémité. Il est représenté comme suit :



- L'angle orienté de demi-droites $([Oy);[Ox))$ noté $(\widehat{[Oy);[Ox)})$. O est son sommet, $[Oy)$ est la demi-droite origine et $[Ox)$ est la demi-droite extrémité. Il est représenté comme suit :



Oralement

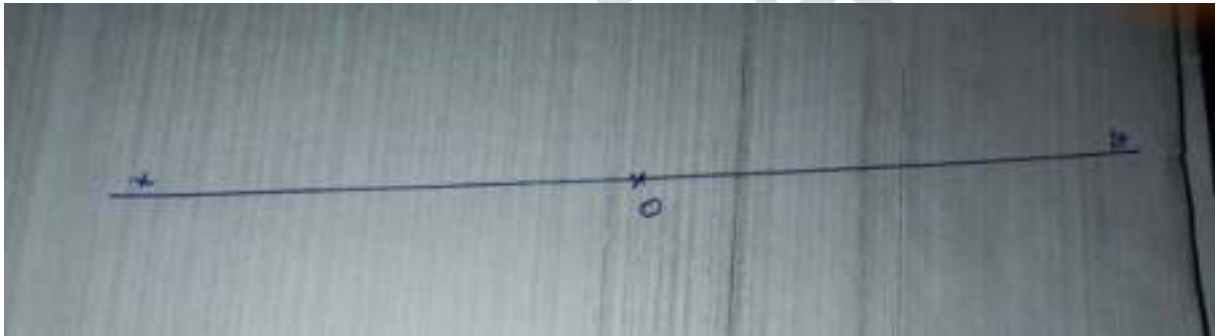
Pour représenter un angle orienté de demi-droites sur une figure, on dessine une flèche en forme d'arc dont l'origine indique la demi-droite origine et l'extrémité indique la demi-droite extrémité.

b. Remarques

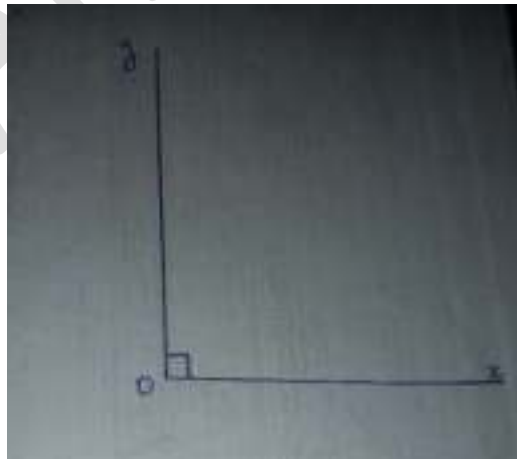
- Si $[Ox]=[Oy]$ (c'est-à-dire les deux demi-droites sont confondues) alors $(\widehat{[Ox];[Oy]}) = (\widehat{[Oy];[Ox]})$ et est dit angle orienté nul.



- Si $[Ox]$ et $[Oy]$ sont opposées (c'est-à-dire les demi-droites se complètent pour former une droite) alors $(\widehat{[Ox];[Oy]}) = (\widehat{[Oy];[Ox]})$ et est dit angle orienté plat.



- Si $[Ox]$ et $[Oy]$ sont perpendiculaires alors chacun des angles orientés $(\widehat{[Ox];[Oy]})$ et $(\widehat{[Oy];[Ox]})$ est dit angle orienté droit.



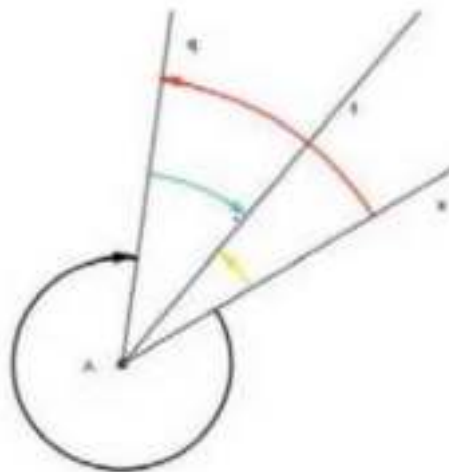
c. Exercices d'application

Exo1 :

Tracer trois demi-droites $[Ox]$, $[Oy]$ et $[Oz]$ deux à deux distinctes. Représenter sur la figure les angles orientés de demi-droites : $(\widehat{[Ox];[Oy]})$; $(\widehat{[Oy];[Oz]})$ et $(\widehat{[Oz];[Ox]})$.

Exo2 :

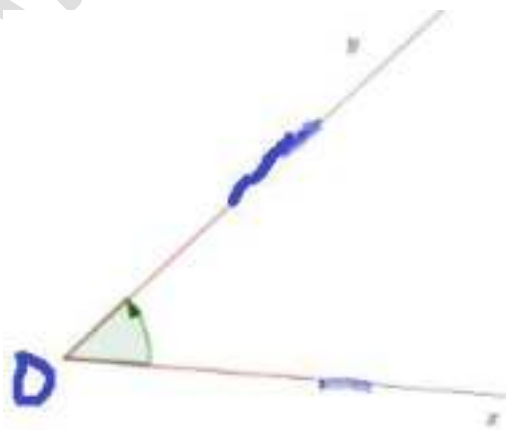
Sur la figure ci-dessous sont représentés des angles orientés de demi-droites. Noter chacun de ces angles orientés.



d. Orientation

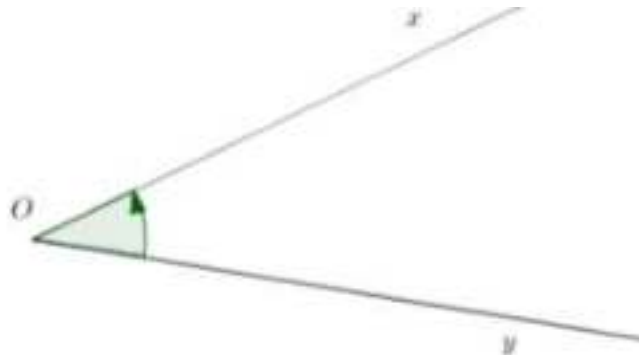
Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ non confondues et non opposées. La mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{xOy}$ est strictement comprise entre 0 et π . Dans le secteur saillant de $\widehat{xOy}$.

- Si le sens de déplacement de $[Ox)$ vers $[Oy)$ s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre alors $([Ox), [Oy))$ est un angle orienté dans le sens direct.



$([Ox), [Oy))$ est un angle orienté dans le sens direct.

- Si le sens de déplacement de $[Ox)$ vers $[Oy)$ s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre alors $([Ox), [Oy))$ est un angle orienté dans le sens indirect.



$([Ox), [Oy))$ est un angle orienté dans le sens indirect.

e. Mesure principale

Soit $([Ox), [Oy))$. La mesure principale en radians de $([Ox), [Oy))$ est le réel que l'on peut noter θ défini par :

- Si $([Ox), [Oy))$ est l'angle orienté nul alors $\theta = 0 \text{ rad}$.
- Si $([Ox), [Oy))$ est l'angle orienté plat alors $\theta = \pi \text{ rad}$.
- Si $([Ox), [Oy))$ n'est ni nul, ni plat et est orienté dans le sens direct alors $\theta = \text{mes } x\widehat{O}y$.
- Si $([Ox), [Oy))$ n'est ni nul, ni plat et est orienté dans le sens indirect alors $\theta = -\text{mes } x\widehat{O}y$.

f. Remarques

- Si θ est la mesure principale en radians d'un angle orienté alors $\theta \in]-\pi; \pi]$.
- Deux angles orientés de demi-droites sont égaux si et seulement si ils ont la même mesure principale.
- Soient $([Ox), [Oy))$ et $([O'x'), [O'y'))$ de mesures principales en radians θ et θ' respectivement alors :
 - ✓ $([Ox), [Oy))$ et $([O'x'), [O'y'))$ sont dits complémentaires si $\theta + \theta' = \pm \frac{\pi}{2}$.
 - ✓ $([Ox), [Oy))$ et $([O'x'), [O'y'))$ sont dits supplémentaires si $\theta + \theta' = \pm \pi$.

g. Exercices d'application

Exercice 1 :

Tracer un triangle équilatéral direct ABC puis donner les mesures principales en radians des angles orientés : $(\widehat{[AB]}, \widehat{[AC]})$ et $(\widehat{[CB]}, \widehat{[CA]})$.

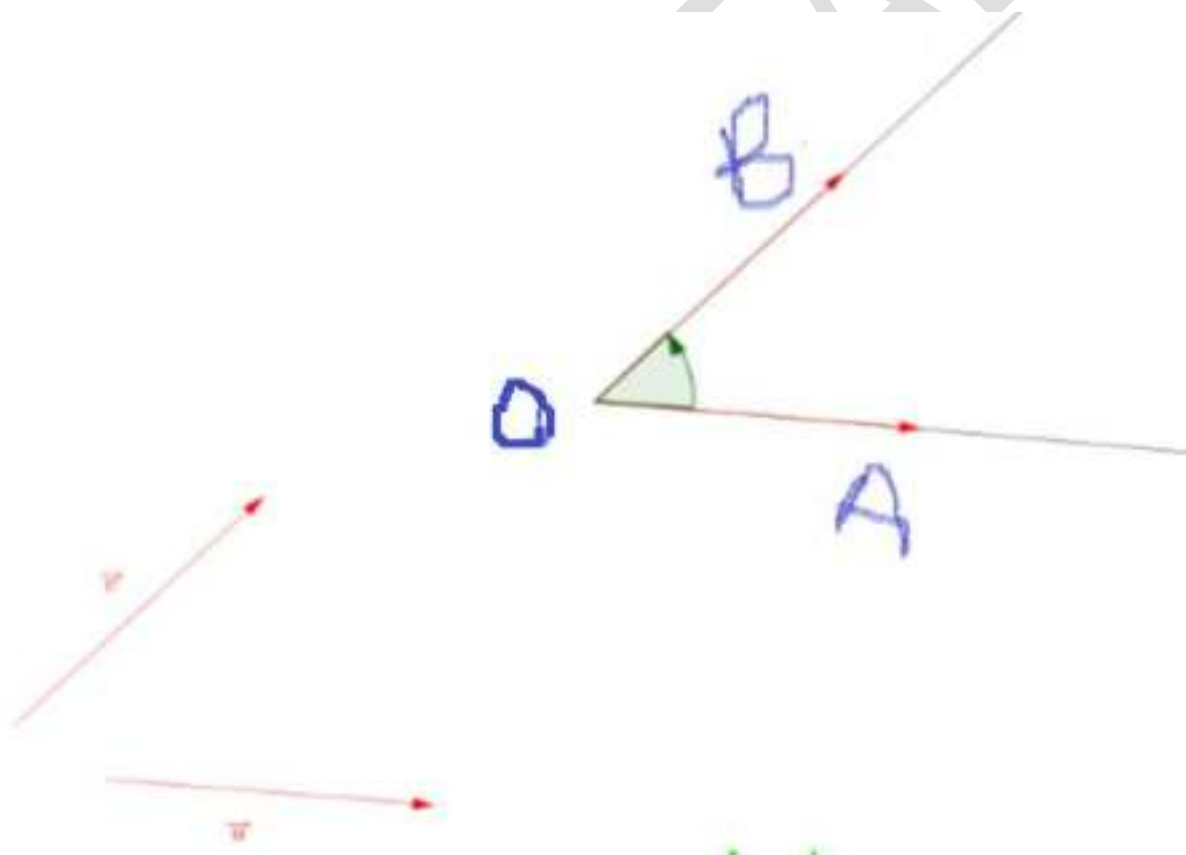
Exercice 2 :

Tracer EFG, un triangle rectangle et isocèle en E indirect puis donner les mesures principales en radians des angles orientés : $(\widehat{[EF]}, \widehat{[EG]})$ et $(\widehat{[GF]}, \widehat{[GE]})$.

3. Angles orientés de deux vecteurs non nuls

a. Définition, notation et représentation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs non nuls, Pour tout point O du plan, il existe des points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



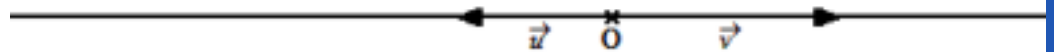
L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre est noté $(\vec{u}, \vec{v})$ et est défini par $(\vec{u}, \vec{v}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}}, \widehat{\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{[OA]}, \widehat{[OB]})$. $(\vec{u}, \vec{v})$ se lit : « angle orienté $\vec{u} \vec{v}$ ». Dans ce cas, $(\widehat{[OA]}, \widehat{[OB]})$ est dit représentant de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ ou bien associé à l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

b. Remarques

- Une représentation d'un angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est celle d'un angle orienté de demi-droites avec la possibilité de choisir n'importe quel point comme sommet. Ainsi un angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ a une infinité de représentants mais tous ses représentants sont égaux.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est dit angle orienté nul et est noté $\hat{0}$.



- Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est dit angle orienté plat et est noté $\hat{\pi}$.



c. Exercices d'application

Exercice 1:

Tracer deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Placer un point O puis représenter $(\vec{u}, \vec{v})$ en prenant O pour sommet.
2. Placer un autre point O' puis représenter $(\vec{u}, \vec{v})$ en prenant O' pour sommet.

Exercice 2 :

Placer trois points non alignés A, B et C.

1. Représenter $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Représenter $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en prenant B pour sommet.

d. Définitions

- La mesure principale d'un angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure principale d'un angle orienté de demi-droites qui représente $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Deux angles orientés de vecteurs sont égaux s'ils ont la même mesure principale.
- Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ de mesures principales en radians θ et θ' respectivement alors :
 - ✓ $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont dits complémentaires si $\theta + \theta' = \pm \frac{\pi}{2}$
 - ✓ $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ sont dits supplémentaires si $\theta + \theta' = \pm \pi$.

e. Exemple

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A direct.

- La mesure principale en radians de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est $\frac{\pi}{2}$.
- La mesure principale en radians de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ est $-\frac{\pi}{4}$.

f. Exercice d'application

Soit ABC un triangle équilatéral direct, O est son centre de gravité et I est le milieu de $[BC]$.

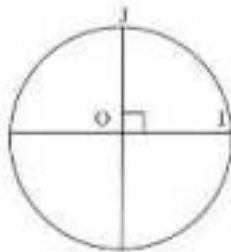
Donner les mesures principales en radians de $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

4. Repérage sur le cercle trigonométrique

Dans le plan orienté, on choisit une unité de longueur une fois pour toute et on considère le repère orthonormé direct (O, I, J) .

a. Cercle trigonométrique

Définition : Le cercle trigonométrique est le cercle (C) de centre O et de rayon 1 sur lequel I est pris comme origine du parcours.



Activité 1 : Soit $\alpha \in]-\pi; \pi]$.

1. Tracer une demi-droite quelconque $[Ox)$.
2. On suppose que $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad.
 - a. Tracer une demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale de $([Ox), [Oy))$ soit égale à $\frac{\pi}{3}$ rad
 - b. Soit $[Oy')$ une demi-droite telle que la mesure principale de $([Ox), [Oy'))$ soit égale à $\frac{\pi}{3}$ rad. Justifier que $[Oy)$ et $[Oy')$ sont confondues.
 - c. Quelle conclusion peut-on tirer de b) ?

Solution

1. C'est une simple construction à faire.
2. a. C'est une construction que l'on peut faire en prenant $\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$ et en utilisant le rapporteur.
b. $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ et $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy']})$ ont la même mesure principale $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ donc ils sont égaux.
De plus ils ont la même demi-droite origine $[Ox)$ donc leurs demi-droites extrémités $[Oy)$ et $[Oy')$ sont confondues.
c. D'après b), on peut dire qu'il existe une unique demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale de $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ soit égale à α .

D'après l'activité ci-dessus, on peut dire que pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ et pour une demi-droite $[Ox)$ donnée, il existe une et une seule demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale de $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ soit égale à α . Cette propriété peut être généralisée pour n'importe quelle valeur de α appartenant à $]-\pi; \pi]$ et on a la propriété suivante :

Propriété

Si $\alpha \in]-\pi; \pi]$ et $[Ox)$ est une demi-droite quelconque donnée alors il existe une et une seule demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale en radians de $(\widehat{[Ox]}, \widehat{[Oy]})$ soit égale à α .

Activité 2 : Soit (C) le cercle trigonométrique et $\alpha \in]-\pi; \pi]$.

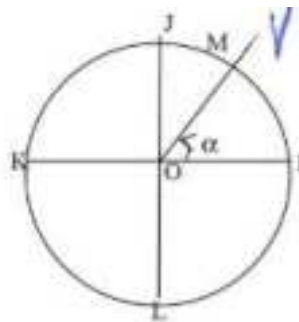
1. Justifier qu'il existe une et une seule demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale en radians de $(\widehat{[OI]}, \widehat{[Oy]})$ soit égale à α .
2. Justifier que cette demi-droite $[Oy)$ coupe le cercle (C) en un seul point M.
3. Montrer que la mesure principale en radians de $(\widehat{OI}, \widehat{OM})$ est égale à α .

Solution

1. Comme $\alpha \in]-\pi; \pi]$ et $[OI)$ est une demi-droite donnée donc d'après la propriété précédente, il existe une et une seule demi-droite $[Oy)$ telle que la mesure principale en radians de $(\widehat{[OI]}, \widehat{[Oy]})$ soit égale à α .
2. Comme la demi-droite $[Oy)$ a pour origine le centre O de (C) alors elle le coupe en un et un seul point M.

3. $[Oy) = [OM)$ donc la mesure principale de $([OI), [OM)) = ([OI), [Oy))$ est α . Comme $([OI), [OM))$ est un représentant de $(\vec{OI}, \vec{OM})$ donc la mesure principale de $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est α .

Définition : Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) , soit (C) le cercle trigonométrique et $\alpha \in]-\pi; \pi]$. Il existe un et un seul point M du cercle trigonométrique (C) tel que la mesure principale en radians de $(\vec{OI}, \vec{OM})$ soit égale à α . Ce point M est dit image de α sur le cercle trigonométrique.



Exemples

- L'image de 0 sur le cercle trigonométrique est le point I.
- L'image de $\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point J.
- L'image de $-\frac{\pi}{2}$ sur le cercle trigonométrique est le point J', diamétralement opposé à J.
- L'image de π sur le cercle trigonométrique est le point I', diamétralement opposé à I.

Exercice : Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) , soit (C) le cercle trigonométrique. Construire les images M et N de $\frac{\pi}{4}$ et de $-\frac{\pi}{3}$ respectivement sur le cercle trigonométrique.

b. Image d'un réel sur le cercle trigonométrique

Soit (C) , le cercle trigonométrique, on considère la droite (Δ) tangente à (C) en I munie du repère $(I, \vec{j})$ où $\|\vec{j}\| = 1$. Ainsi (Δ) représente l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

On enroule la droite (Δ) autour de (C) de la façon suivante :

- la demi-droite $[Ix)$ des points de (Δ) d'abscisses positives est enroulée dans le sens direct ;
- la demi-droite $[Ix')$ des points de (Δ) d'abscisses négatives est enroulée dans le sens indirect.

Ainsi, chaque point m de (Δ) d'abscisse x vient se superposer sur un seul point M de (C) . On dit que M est l'image du réel x sur le cercle trigonométrique et x est dit abscisse curviligne du point M de (C) . Par exemple, l'image de 0 sur (C) est I , celle de $\frac{\pi}{2}$ est J , l'image de π est le point I' diamétralement opposé à I , celle de $-\frac{\pi}{2}$ est J' , diamétralement opposé à J .

Par ce procédé d'enroulement de la droite des réels (Δ) autour de (C) , chaque réel x a une et une seule image M sur (C) . On remarque que $x, x + 2\pi; x + 4\pi \dots x - 2\pi; x - 4\pi$ ou plus généralement $x + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ont la même image M sur le cercle (C) .

Chacun des nombres réels, $\dots x - 4\pi, x - 2\pi, x, x + 2\pi; x + 4\pi, \dots, x + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ est une abscisse curviligne de M . Ainsi tout point M de (C) a une infinité d'abscisses curvilignes.

c. Congruence modulo 2π

Définition : Soient x et x' des réels. On dit que x est congru à x' modulo 2π s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x' = 2k\pi$ (ou encore $x = x' + 2k\pi$). Dans ce cas, on note $x \equiv x' [2\pi]$.

On lit : « x congru à x' modulo 2π ».

Exemple : $\frac{\pi}{2}$ est congru à $\frac{9\pi}{2}$ modulo 2π . En effet $\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{2} = -4\pi = 2(-2)\pi, k = -2$. On note $\frac{\pi}{2} \equiv \frac{9\pi}{2} [2\pi]$.

π n'est pas congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π . Supposons que π est congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π . Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$. Or $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ donc $2k\pi = \frac{3\pi}{4}$ d'où $k = \frac{3}{8} \notin \mathbb{Z}$. Absurde donc π n'est pas congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π .

Remarque

$x \equiv x' [2\pi] \Leftrightarrow x' \equiv x [2\pi]$. En effet : $x' - x = -(x - x')$ et comme x est congru à x' modulo 2π alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x' = 2k\pi$. Ainsi $x' - x = 2(-k)\pi$ or $-k \in \mathbb{Z}$

Propriété : Si M est un point de (C) , x et x' deux abscisses curvilignes de M alors $x \equiv x' [2\pi]$. Autrement dit $x = x' + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

d. Mesures d'un arc orienté

Définitions : Soient M et N des points du cercle trigonométrique, x_M et x_N des abscisses curvilignes respectives de M et N :

- Le couple (M, N) est dit arc orienté et est noté $\widehat{MN}$.
- Le réel $x_N - x_M$ est dit mesure en radians de l'arc orienté $\widehat{MN}$.

Remarques

- L'arc orienté $\widehat{MN}$ est distinct de l'arc orienté $\widehat{NM}$.
- Un arc orienté $\widehat{MN}$ a une infinité de mesures en radians car M et N ont chacune une infinité d'abscisses curvilignes.
- Une mesure en radians quelconque de l'arc orienté $\widehat{MN}$ est notée $mes \widehat{MN}$.
- Deux mesures en radians d'un arc orienté sont congrues modulo 2π . Ainsi si α est une mesure en radians d'un arc orienté alors toute autre mesure α' de cet arc orienté est égale à $\alpha' = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ et on a : $mes \widehat{MN} \equiv \alpha [2\pi]$.
- On admet qu'il existe une seule mesure en radians d'un arc orienté appartenant à $] -\pi, \pi]$. Cette mesure est dite mesure principale en radians de l'arc orienté.

Propriétés

- $mes \widehat{MN} \equiv -mes \widehat{NM} [2\pi]$.
- Si P est un autre point du cercle trigonométrique alors $mes \widehat{MN} + mes \widehat{NP} \equiv mes \widehat{MP} [2\pi]$. Cette égalité est dite relation de Chasles.

Exercice : Déterminer toutes les mesures en radians de l'arc orienté $\widehat{IJ}$.

Solution

$$mes \widehat{IJ} \equiv (x_J - x_I)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

e. Mesures d'un angle orienté

Définition : Soient $(\vec{u}, \vec{v})$, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$; M et N les points d'intersection respectifs de $[OA)$ et $[OB)$ avec le cercle trigonométrique. On appelle mesure en radians de $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, toute mesure en radians de l'arc orienté $\widehat{MN}$. Une mesure en radians de $(\vec{u}, \vec{v})$ est notée $(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

Remarques

- $(\vec{u}, \vec{v})$ a une infinité de mesures en radians et une seule appartient à $] -\pi, \pi]$, c'est la mesure principale en radians de $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Si x est une abscisse curviligne d'un point M du cercle trigonométrique alors x est une mesure en radians de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

- La valeur absolue de la mesure principale en radians de $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{OA}, \vec{OB})$ est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ associé à $(\vec{u}, \vec{v})$.
- Si deux angles orientés de vecteurs ont la même orientation et que les angles géométriques qui leur sont associés sont égaux alors ses deux angles orientés sont égaux.
- Si x et x' sont des mesures en radians d'un même angle orienté alors $x \equiv x' [2\pi]$. Réciproquement si $x \equiv x' [2\pi]$ alors x et x' sont des mesures en radians d'un même angle orienté. Ainsi si on connaît une mesure en radians x d'un angle orienté alors on connaît toutes les autres : Ce sont les réels de la forme $x + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
- Deux angles orientés sont égaux si et seulement si une mesure en radians de l'un est une mesure en radians de l'autre.
- $x \equiv x' [2\pi] \Rightarrow x \equiv x' [\pi]$ (La réciproque est fausse).
- $x \equiv x' [\pi] \Leftrightarrow x \equiv x' [2\pi]$ ou $x \equiv (x' + \pi) [2\pi]$

Exercice : Déterminer les mesures principales en radians de chacun des angles orientés dont l'une des mesures en radians est $\frac{89}{4}\pi$; $\frac{157}{4}\pi$ et $-\frac{107}{6}\pi$ puis placer leurs images sur le cercle trigonométrique.

III. Addition d'angles orientés

1. Définitions :

Soient $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ des angles orientés de mesures en radians respectives x et x' .

- On appelle somme de $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$, l'angle orienté noté $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}', \vec{v}')$ dont une mesure en radians est $x + x'$.
- On appelle opposé de $(\vec{u}, \vec{v})$ l'angle orienté noté $-(\vec{u}, \vec{v})$ dont une mesure en radians est $-x$.
- La différence de $(\vec{u}, \vec{v})$ et de $(\vec{u}', \vec{v}')$ est l'angle orienté noté $(\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}', \vec{v}')$ et est égal à la somme de $(\vec{u}, \vec{v})$ et de $-(\vec{u}', \vec{v}')$. Ainsi $(\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}', \vec{v}') = (\vec{u}, \vec{v}) + [-(\vec{u}', \vec{v}')] par conséquent $x - x'$ est une mesure en radians de $(\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}', \vec{v}')$.$

Remarques

- Toutes les propriétés de l'addition des nombres réels sont aussi celles de l'addition des angles orientés. En particulier $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}', \vec{v}') = (\vec{u}', \vec{v}') + (\vec{u}, \vec{v})$ autrement dit

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}', \vec{v}') \equiv (\vec{u}', \vec{v}') + (\vec{u}, \vec{v}) [2\pi].$$

- La somme d'angle orienté et de son opposé est l'angle orienté nul $((\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{v}) = \hat{0}$ c'est-à-dire $(\vec{u}, \vec{v}) - (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$).

2. Propriétés : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs non nuls.

a. Relation de Chasles

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) [2\pi] \text{ (autrement dit } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \text{)}$$

Preuve :

Soient A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. M, N et P les points d'intersection respectifs de $[OA)$, $[OB)$ et $[OC)$ avec le cercle trigonométrique : $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \text{mes } \widehat{MN} [2\pi]$;

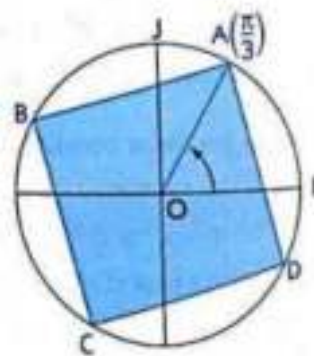
$(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \text{mes } \widehat{NP} [2\pi]$ et $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv \text{mes } \widehat{MP} [2\pi]$. Ainsi :

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\text{mes } \widehat{MN} + \text{mes } \widehat{NP}) [2\pi]$$

$\equiv \text{mes } \widehat{MP} [2\pi]$ en vertu de la relation de Chasles sur les mesures des arcs orientés.

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) [2\pi]$$

Exercice d'application :



Sur la figure ci-dessus ABCD est un carré inscrit dans le cercle trigonométrique. Déterminer une mesure en radians de chacun des angles orientés suivants : $(\widehat{OI, OA})$; $(\widehat{OI, OJ})$; $(\widehat{OI, OB})$ et $(\widehat{OI, OC})$. En déduire les angles orientés $(\widehat{OI, OA}) + (\widehat{OI, OJ})$ et $(\widehat{OI, OJ}) + (\widehat{OI, OB})$

b. Propriétés

P₁) $(\vec{u}, \vec{u}) \equiv 0[2\pi]$ (ou bien $\widehat{(\vec{u}, \vec{u})} = \hat{0}$)

P₂) $(\vec{u}, -\vec{u}) \equiv (-\vec{u}, \vec{u}) \equiv \pi [2\pi]$ (ou bien $\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} = \widehat{(-\vec{u}, \vec{u})} = \hat{\pi}$)

P₃) $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv (\vec{u}', \vec{v}')[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}') \equiv (\vec{v}, \vec{v}')[2\pi]$ (ou $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')})$

P₄) $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -(\vec{v}, \vec{u})[2\pi]$ (ou bien $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$)

P₅) Si $kk' > 0$ alors $(k\vec{u}, k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v})[2\pi]$ (ou bien $\widehat{(k\vec{u}, k'\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$)

P₆) Si $kk' < 0$ alors $(k\vec{u}, k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + \pi [2\pi]$ (ou bien $\widehat{(k\vec{u}, k'\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \hat{\pi}$)

P₇) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0[\pi]$. Ainsi A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[\pi]$.

P₈) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0[2\pi]$.

P₉) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi[2\pi]$.

P₁₀) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Remarques

Dans une égalité de mesures d'angles orientés modulo 2π , si on remplace un vecteur :

- par un vecteur qui lui est colinéaire et de même sens alors l'égalité reste modulo 2π .
- par un vecteur qui lui est colinéaire et de sens contraire alors l'égalité devient modulo π
- par un vecteur colinéaire alors l'égalité devient modulo π .

Dans une égalité de mesures d'angles orientés modulo π , si on remplace un vecteur par un vecteur qui lui est colinéaire alors l'égalité reste modulo π .

Exercice 1

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$. Calculer $(\vec{u}, -\vec{v})$; $(2\vec{u}, \vec{v})$; $(-\vec{u}, 3\vec{v})$ et $(-2\vec{u}, -3\vec{v})$

Exercice 2

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A direct. Déterminer $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$.

IV. Angles inscrits-angles au centre

1. Définition

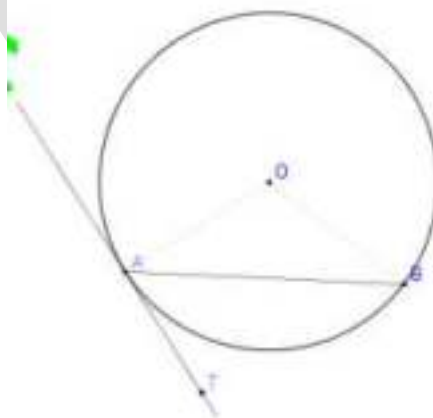
Soit (C) un cercle de centre O . A , B et M des points deux à deux distincts de (C) .

- $(\widehat{MA}, \widehat{MB})$ est un angle orienté inscrit dans (C) qui intercepte l'arc orienté $\widehat{AB}$.
- $(\widehat{OA}, \widehat{OB})$ est un angle orienté au centre qui intercepte l'arc orienté $\widehat{AB}$.



Si (AT) est la tangente en A à (C) alors

- $(\widehat{AT}, \widehat{AB})$ est un angle orienté inscrit dans (C) qui intercepte l'arc orienté $\widehat{AB}$.
- $(\widehat{AB}, \widehat{AT})$ est un angle orienté inscrit dans (C) qui intercepte l'arc orienté $\widehat{BA}$.



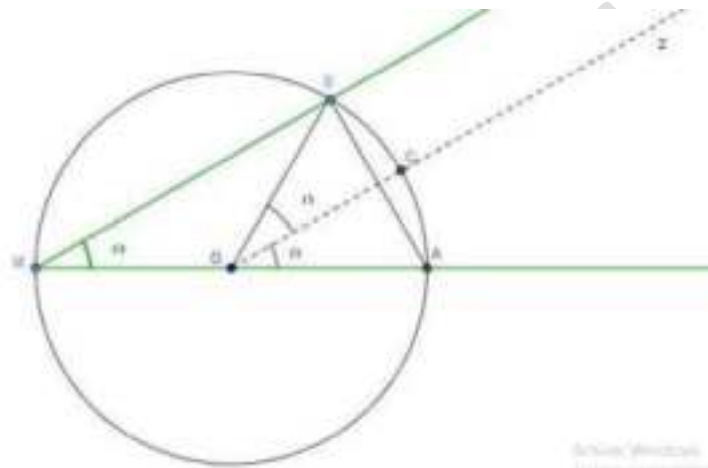
2. Théorème de l'angle inscrit

Soit (C) un cercle de centre O passant par 2 points distincts A et B . Si $M \in (C)$ alors $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$ (ou bien $(\widehat{OA, OB}) = 2(\widehat{MA, MB})$)

Preuve

1^{er} cas : $[MA]$ est un diamètre de (C)

Soit $[Oz]$ la demi-droite parallèle $[MB]$ et de même sens. Elle coupe (C) en C .



$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv ((\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})) [2\pi].$$

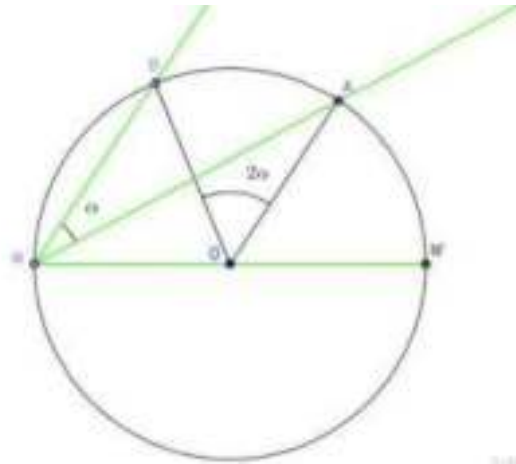
$\left\{ \begin{array}{l} (MB) \parallel (OC) \\ (AB) \perp (MB) \end{array} \right\} \Rightarrow (AB) \perp (OC) \Rightarrow (OC)$ et la médiatrice de $[AB]$ sont parallèles. De plus (OC) et la médiatrice de $[AB]$ ont le point O en commun d'où (OC) est la médiatrice de $[AB]$ et par conséquent c'est aussi la bissectrice de $\widehat{AOB}$ car AOB est isocèle en O . Par suite les angles orientés $(\widehat{OA, OC})$ et $(\widehat{OC, OB})$ sont orientés dans le même sens et ont des angles géométriques associés qui sont égaux donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})[2\pi]$ d'où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})[2\pi]$.

Les angles orientés $(\widehat{MA, MB})$ et $(\widehat{OA, OC})$ ont la même orientation et leurs angles géométriques associés sont correspondants donc ils sont égaux d'où $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})[2\pi]$.

$$\text{Ainsi } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi].$$

2^{ème} cas : $[MA]$ n'est pas un diamètre de (C) .

Soit M' le point diamétralement opposé à M



$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv ((\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB})) [2\pi]$$

$$\equiv (-(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB})) [2\pi]$$

Or d'après le 1^{er} cas, $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OA}) \equiv 2(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MA}) [2\pi]$ et $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MB}) [2\pi]$

donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv (-2(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MA}) + 2(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MB})) [2\pi]$

$$\equiv (2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) + 2(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MB})) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) [2\pi]$$

3. Caractérisation d'un cercle

Soit (C) un cercle de centre O passant par deux points distincts A et B et M un point distinct de A et B. $M \in (C) \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi] \Leftrightarrow 2(\widehat{MA, MB}) = (\widehat{OA, OB})$

Preuve :

$\Rightarrow$) Supposons que $M \in (C)$.

D'après le théorème de l'angle inscrit, $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$.

($\Leftarrow$ Supposons que $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$.

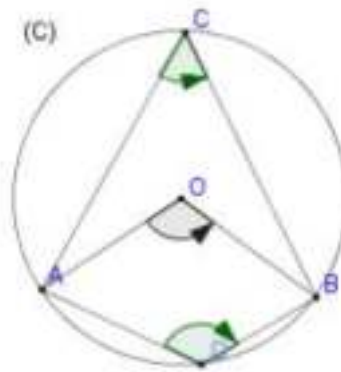
Soit (C') le cercle de centre O' passant par A, M et B. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a : $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) [2\pi]$. Ainsi les triangles isocèles OAB et O'AB sont orientés dans le même sens, ont une base commune [AB] et

$\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}$ donc OAB et O'AB sont confondus d'où $O = O'$. Ainsi $(C) = (C')$ et par conséquent $M \in (C)$.

4. Points cocycliques

a. Définition :

Quatre points du plan sont dits cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle.



A, B, C et D sont cocycliques.

Remarques

- Par deux points distincts, il passe une infinité de cercles
- Par trois points non alignés, il passe un et seul cercle.

b. Théorème

Des points A, B, C et D non alignés trois à trois sont cocycliques si et seulement si

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi] \quad (\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi])$$

Preuve :

Supposons que A, B, C et D sont non alignés trois à trois et sont cocycliques. Soit (C) le cercle de centre O qui passe par A, B, C et D. On a alors :

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi] \text{ et } 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi].$$

Ainsi $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi]$ d'où $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$.

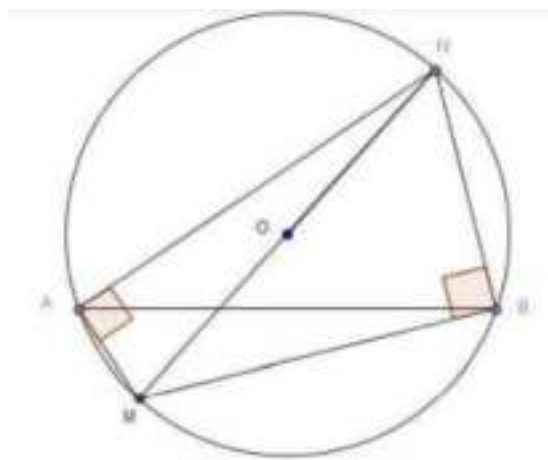
Supposons que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$. Soit (C) le cercle circonscrit à ABC, O son centre et (C') celui circonscrit à ABD et de centre O'. On a :

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi] \text{ et } 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})[2\pi] \text{ or } 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi]$$

donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})[2\pi]$. Ainsi les triangles isocèles AOB et AO'B sont orientés dans le même sens, ont une base commune $[AB]$ et $\widehat{AOB} = \widehat{AO'B}$ donc OAB et O'AB sont confondus d'où $O = O'$. Ainsi $(C) = (C')$ et par conséquent A, B, C et $D \in (C)$.

c. Remarque

Les sommets de deux triangles rectangles ayant la même hypoténuse sont cocycliques et le centre du cercle qui les contient est le milieu de leur hypoténuse.



Point méthode

Pour résoudre un problème de géométrie (parallélisme de droites, cocyclicité, alignement de points, orthogonalité) avec les angles orientés et que dans la configuration, il y a des quadruplets de points cocycliques, on peut procéder comme suit :

1. Recenser de tous les quadruplets de points cocycliques ou les cercles de la figure.
2. Choisir l'angle orienté à transformer : Il doit être à cheval sur deux des cercles recensés c'est-à-dire que l'un de ses cotés doit être sur l'un des cercles et l'autre coté sur l'autre cercle.
3. Utiliser la relation de Chasles par le biais d'un vecteur dont le support est l'axe radical des deux cercles du 2. pour transformer l'angle orienté choisi.
4. Utiliser les conditions de cocyclicité pour transformer les deux angles orientés obtenus dans 3.
5. Remplacer certains vecteurs par d'autres qui leurs sont colinéaires.

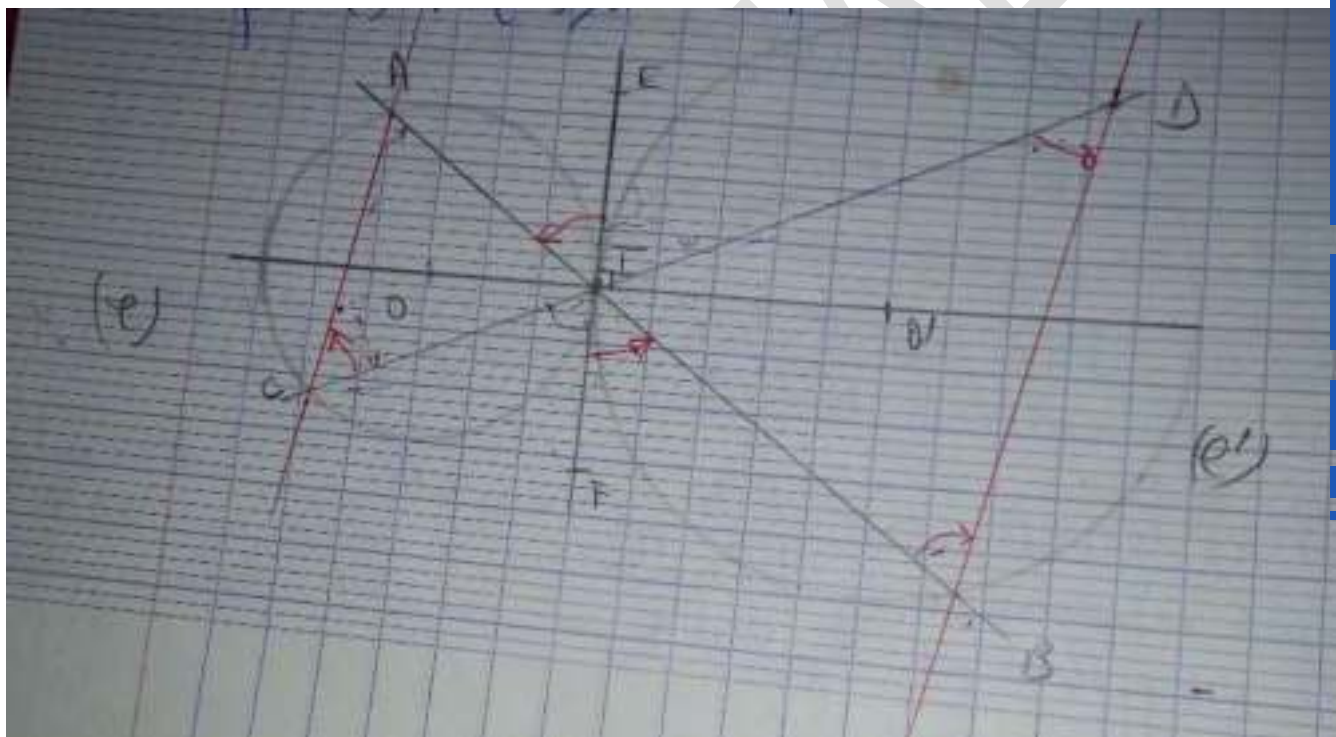
NB : Soient C_1 et C_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2 .

- Si C_1 et C_2 sont deux cercles sécants en A et B alors (AB) est l'axe radical de C_1 et C_2 .
- Si C_1 et C_2 sont tangents en A alors la tangente commune aux deux cercles (droite perpendiculaire à (O_1O_2) et passant par A) est l'axe radical de C_1 et C_2 .

d. Exercices d'application

Exo1 : Deux cercles $C(O, r)$ et $C(O', r')$ sont tangentes extérieurement en I. Une droite passant par I recoupe $C(O, r)$ en A et $C(O', r')$ en B. Une autre droite passant par I recoupe $C(O, r)$ en C et $C(O', r')$ en D. Montrer que (AC) est parallèle à (DB) .

Solution



Recensement des cercles de la figure : (C) et (C')

Choix de l'angle à transformer : $(AC) // (DB) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) \equiv 0[\pi]$. Comme $\overrightarrow{AI}$ col $\overrightarrow{AB}$ donc $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \equiv 0[\pi]$ d'où $(AC) // (DB) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) \equiv (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})[\pi]$. Ainsi, on peut choisir de transformer $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$ car il est à cheval sur les deux cercles (C) et (C') .

Axe radical de deux cercles parmi les cercles recensés : Ici, on a recensé seulement 2 cercles : (C) et (C') . Ils sont tangents en I donc leur axe radical est la perpendiculaire à (OO') passant

par I. Soit E un point de cet axe radical. Ainsi $\overrightarrow{IE}$ est un vecteur dont le support est l'axe radical de (C) et (C').

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) &\equiv (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IE}) + (\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IB}) [2\pi] \text{ (relation de Chasles)} \\&\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) + (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DB}) [\pi] \text{ Car } (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IE}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) [\pi] \text{ et } (\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IB}) \equiv (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DB}) [\pi] \\&\equiv ((\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) + (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{DB})) [\pi] \text{ car } \overrightarrow{CI} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{DI} \\&\equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}) [\pi] \\&\equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) [\pi] \text{ car } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

d'où $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) \equiv (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) [\pi] \equiv 0 [\pi]$ par suite $(AC) // (DB)$.

Exo 2 : Deux cercles (C) et (C') sont sécants en A et B, C un point de (C), D un point de (C') n'appartenant pas à (AC). Une droite passant par B recoupe (C) en M et (C') en N et R est le point d'intersection de (CM) et (DN). Montrer que A, C, D et R sont cocycliques.

Solution

Recensement des quadruplets de points cocycliques de la figure : (ABMC) et (ABND)

Choix de l'angle à transformer : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ car il est à cheval sur les deux cercles (ABMC) et (ABND). Il suffit donc de montrer que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) [\pi]$.

Axe radical de deux cercles parmi les cercles recensés : Ici, on a recensé seulement 2 cercles : (ABMC) et (ABND). Ils sont sécants en A et B donc (AB) est leur axe radical par suite $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur dont le support est l'axe radical de (ABCM) et (ABND).

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &\equiv ((\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})) [2\pi] \text{ (relation de Chasles)} \\&\equiv (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{ND}) [\pi] \text{ Car } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) [\pi] \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{ND}) [\pi] \\&\equiv ((\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{RD})) [\pi] \text{ car } \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{ND} \text{ colinéaires respectivement à } \overrightarrow{RC}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{RD} \\&(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{RC}, \overrightarrow{RD}) [\pi] \text{ d'où A, C, D et R sont cocycliques.}\end{aligned}$$

4. Caractérisation d'une tangente à un cercle

a. Théorème

Soit (C) un cercle de centre O passant par deux points distincts A, B et (D) la tangente à (C) en A. $T \in (D) \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi]$.

Preuve

- Supposons que $T \in (D)$.

Cas 1 : $[AB]$ est un diamètre.

$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AO})[\pi]$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AO}$ sont colinéaires.

$$\equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ car } ATO \text{ est rectangle en } A.$$

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv 2 \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \pi[2\pi].$$

Or $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi[2\pi]$ car $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires de sens opposés donc

$$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi]$$

Cas 2 : $[AB]$ n'est pas un diamètre.

Soit A' le point diamétralement opposé à A.

$$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv 2[(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})][2\pi]$$

$$\equiv 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AA'}) + 2(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB})[2\pi]$$

$$\equiv \underbrace{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})}_{\text{cas 1}} + \underbrace{(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB})}_{\text{cas 1}}[2\pi]$$

$$\equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi]$$

- Supposons que $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi]$.

Soit $T' \in (D)$. D'après la première partie, $2(\overrightarrow{AT'}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})[2\pi]$ donc

$$2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv 2(\overrightarrow{AT'}, \overrightarrow{AB})[2\pi] \text{ d'où } (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AT'}, \overrightarrow{AB})[\pi] \text{ et par suite}$$

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})[\pi] \equiv 0[\pi] \text{ par conséquent } T \in (AT') = (D).$$

b. Corollaire

Soit (C) un cercle de centre O passant par des points A, B et M deux à deux distincts et (D) la tangente en A à (C). On a $T \in (D) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[\pi]$.

5. Arcs capables

a. Définition

Soient A et B deux points distincts et $\theta \in \mathbb{R}$. L'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$ est dit arc capable de (ou associé à) θ (relativement aux points A et B).

b. Ligne de niveau $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[\pi]$

Théorème

- 1) Si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors l'arc capable de θ (relativement à A et B) est la droite (AB) privée de A et B.
- 2) Si $\theta \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors l'arc capable de θ est le cercle passant par A et B privé de A et B dont la tangente en A est la droite (AT) telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta[\pi]$.

Programme de construction

1er cas : Si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors on construit la droite (AB) privée de A et B.

2ème cas: Si $\theta \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors :

- Chercher la mesure principale α de θ .
- Construire T tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha$.
- Construire la médiatrice de [AB] et la perpendiculaire à (AT) passant par A. Ces deux droites se coupent en O.
- Construire le cercle de centre O passant par A (ce cercle passe nécessairement par B).
L'arc capable est ce cercle privé de A et B.

Remarque : Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[\pi]$ alors l'arc capable de θ relativement à A et B est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B.

Exemple

Soient A et B deux points distincts du plan. Construire l'arc capable de $\frac{1067\pi}{6}$ relativement à A et B.

c. Ligne de niveau $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[2\pi]$

Théorème : Soit (E) l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \theta[2\pi]$.

1. Si $\theta = 0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et k pair alors (E) est la droite (AB) privée de [AB].
2. Si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et k impair, $k \in \mathbb{Z}$ alors (E) est le segment [AB] privé de A et B.
3. Si $\theta \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors (E) est l'arc de cercle passant par A dont la tangente en A est (AT_0) telle que $(\overrightarrow{AT_0}, \overrightarrow{AB}) \equiv \theta[2\pi]$ situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas T_0 privé de A et B.

Programme de construction

1er cas : Si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et k pair alors on construit la droite (AB) privée de [AB].

2ème cas: Si $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et k impair alors on construit [AB] privé de A et B.

3ème cas: Si $\theta \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors :

- Chercher la mesure principale α de θ .
- Construire T_0 tel que $(\overrightarrow{AT_0}, \overrightarrow{AB}) = \alpha$.
- Construire la médiatrice de [AB] et la perpendiculaire à (AT_0) passant par A. Ces deux droites se coupent en O.
- Construire l'arc de cercle de centre O passant par A situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas T_0 .

Remarque

Si $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors (E) est l'un des demi-cercles de diamètre [AB].

Exemple

Soient A et B deux points distincts du plan. Construire l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$.

Chapitre 7: TRIGONOMETRIE

Durée : 10h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer et utiliser les formules d'addition et de duplication.
- ✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations du type $\cos ax = b$; $\sin ax = b$ et $\tan ax = b$.
- ✓ Résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations du type $\cos ax \leq b$; $\sin ax \leq b$ et $\tan ax \leq b$.
- ✓ Déterminer des solutions appartenant à un intervalle donné.

Prérequis :

- ✓ Angles orientés
- ✓ Trigonométrie en seconde S

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 1^{ère} SM ; 1^{ère} SE;
- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue ;
- ✓ Documents dans mon ordinateur.

Plan de la leçon

I. Lignes trigonométriques

1. Cosinus, sinus et tangente d'un réel
2. Formules des angles associés
3. Valeurs particulières du cosinus, du sinus et de la tangente
4. Formules trigonométriques

II. Equations trigonométriques

1. Du type $\cos x = \cos a$
2. Du type $\sin x = \sin a$
3. Du type $\tan x = \tan a$
4. Du type $\cos x = a$; $\sin x = a$
5. Du type $\tan x = a$
6. Du type $a \cos x + b \sin x = c$

III. Inéquations trigonométriques

1. Exemple 1

2. Exemple 2
3. Exemple 3
4. Exemple 4
5. Exemple 5

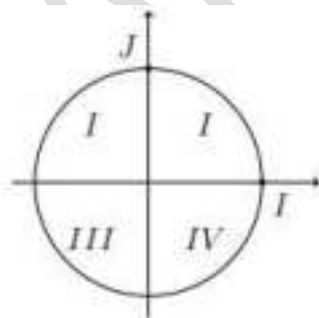
Déroulement du cours

I. Lignes trigonométriques d'un réel

1. Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel

a. Rappels

- Une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite directe si $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- Une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ est dite indirecte si $(\vec{i}, \vec{j}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- Un repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est dit direct (respectivement indirect) si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est directe (respectivement indirecte).
- Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) , le cercle trigonométrique (C) est le cercle de centre O et de rayon 1. Le cercle trigonométrique est divisé par les axes en 4 parties appelées quadrants souvent numérotés I, II, III et IV.

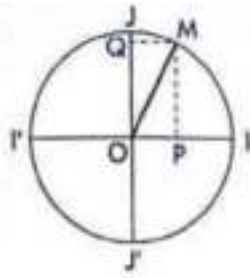


b. Définitions

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct (O, I, J) . Soit $x \in \mathbb{R}$ d'image M sur le cercle trigonométrique (C). (i.e x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$).

- Le cosinus de x noté $\cos x$ est l'abscisse x_M de M dans $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.
- Le sinus de x noté $\sin x$ est l'ordonnée y_M de M dans $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

On a donc $\vec{OM} = \cos x \vec{OI} + \sin x \vec{OJ}$ et si P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur (OI) et (OJ) alors $\cos x = \overline{OP}$ et $\sin x = \overline{OQ}$.



- Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors la tangente de x notée $\tan x$ est $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
- Si $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors la cotangente de x notée $\cotan x$ est $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
- Le cosinus, le sinus et la tangente d'un réel x sont dits lignes trigonométriques de x .

c. Propriétés : Soit $x \in \mathbb{R}$

P₁) $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ c'est-à-dire $|\cos x| \leq 1$ et $|\sin x| \leq 1$

P₂) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$; $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ et $\tan(x + 2k\pi) = \tan x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

P₃) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

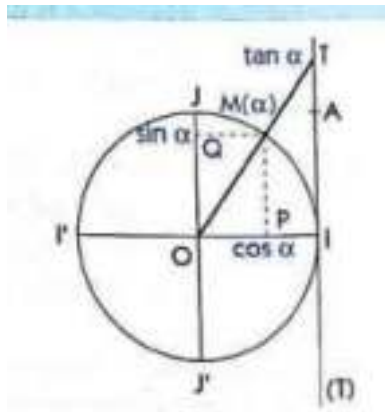
P₄) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

P₅) $1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ pour tout $x \neq k\pi$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve : (Ces propriétés se déduisent directement des définitions par conséquent, je le ferai brièvement)

d. Axe des tangentes

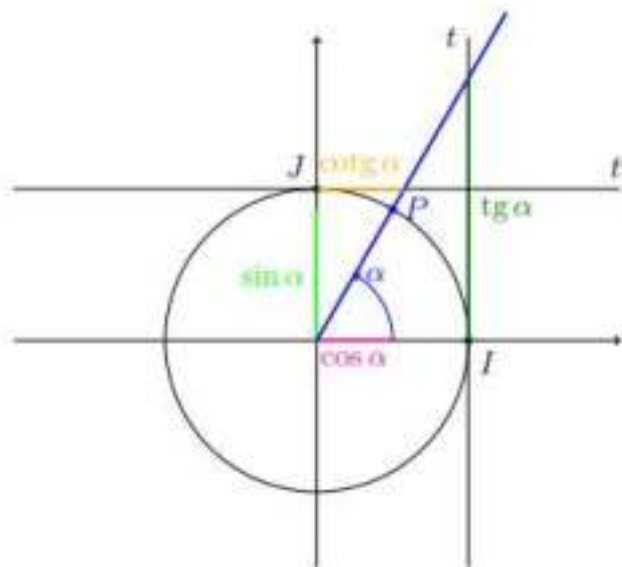
Soit $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ (i.e $M \neq J$ et $M \neq J'$). On suppose que la tangente (Δ) au cercle trigonométrique en I est munie du repère $(I, \overrightarrow{OJ})$. T est le point d'intersection de (OM) et de (Δ) . On a alors $\tan x = \overline{IT}$ c'est-à-dire $\tan x$ est l'ordonnée de T dans (O, I, J) . La droite orientée $\Delta = (I, \overrightarrow{OJ})$ est dite axe des tangentes.



En effet : dans la figure ci-dessus, OPM et OIT sont en position de Thalès donc $\frac{PM}{IT} = \frac{OP}{OI}$ d'où $\frac{PM}{IT} = OP$ car $OI = 1$ or $PM = \sin x$ et $OP = \cos x$ donc $\frac{\sin x}{IT} = \cos x$ d'où $IT = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

e. Axe des cotangentes

Soit $x \neq k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$ (i.e $M \neq I$ et $M \neq I'$). On suppose que la tangente (Δ') au cercle trigonométrique en J est munie du repère $(J, \vec{OI})$. C est le point d'intersection de (OM) et de (Δ') . On a alors $\cotan x = \overline{JC}$ c'est-à-dire $\cotan x$ est l'abscisse de C dans (O, I, J) . La droite orientée $\Delta' = (J, \vec{OI})$ est dite axe des cotangentes.



En effet : dans la figure ci-dessus, OQM et OJC sont en position de Thalès donc $\frac{QM}{JC} = \frac{OQ}{OJ}$ d'où $\frac{QM}{JC} = OQ$ car $OJ = 1$ or $QM = \cos x$ et $OQ = \sin x$ donc $\frac{\cos x}{JC} = \sin x$ d'où

$$\bar{jc} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cotan x.$$

f. Définition

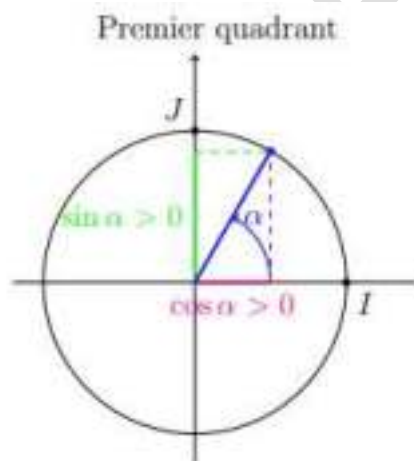
On appelle cosinus (respectivement sinus, tangente et cotangente) d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, le cosinus (respectivement sinus, tangente et cotangente) d'une mesure quelconque en radians de $(\vec{u}, \vec{v})$.

g. Remarques

Soit $x \in]-\pi; \pi[$, M son image sur le cercle trigonométrique.

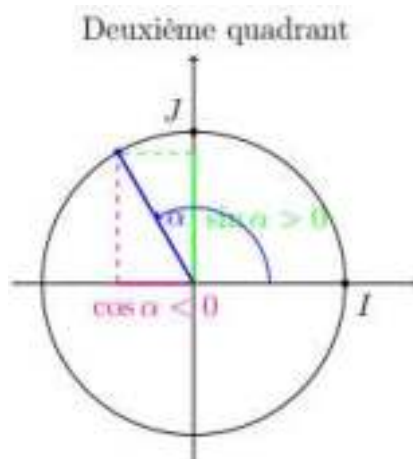
- Si $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos x > 0$ et $\sin x > 0$

Illustration graphique



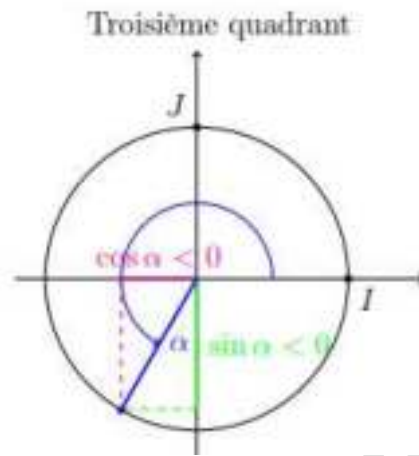
- Si $x \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ alors $\cos x < 0$ et $\sin x > 0$

Illustration graphique



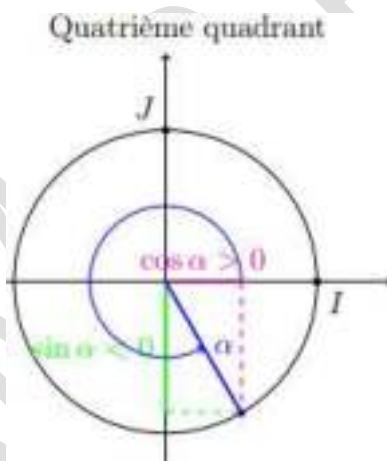
- Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ alors $\cos x > 0$ et $\sin x < 0$

Illustration graphique



- Si $x \in \left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\cos x < 0$ et $\sin x < 0$

Illustration graphique

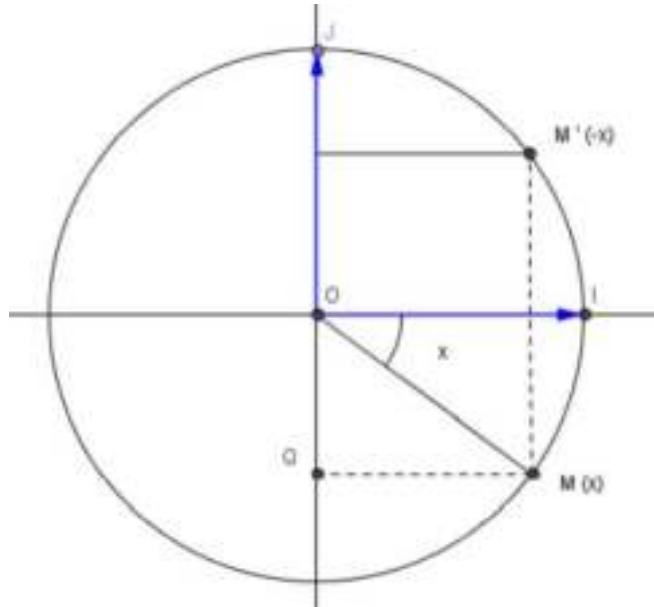


- Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base **orthonormée directe** et $\vec{u}; \vec{v}$ des vecteurs non nuls alors
 $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$ où $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2. Formules des angles associés : Soit $x \in \mathbb{R}$

Les réels $-x; \pi - x; \pi + x; \frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$ sont les réels associés à x . Les lignes trigonométriques des réels associés à x sont liées à celles de x comme le montrent les formules suivantes :

- ✓ L'image M de x et l'image M' de $-x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à (OI) (car $(\vec{OI}, \vec{OM}') \equiv -x[2\pi]$ et $(\vec{OI}, \vec{OM}) \equiv x[2\pi]$) donc ils ont même abscisse et des ordonnées opposées.



Ainsi, on a les formules suivantes :

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan x$. (Cette formule peut se déduire des 2 premières).

- ✓ L'image M de x et l'image M' de $\pi - x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à (OJ) . En effet si M_0 est le symétrique de M par rapport à (OJ) alors

$$(\vec{OM}, \vec{OJ}) \equiv (\vec{OJ}, \vec{OM_0})[2\pi] \text{ donc}$$

$$(\vec{OI}, \vec{OM_0}) \equiv ((\vec{OI}, \vec{OJ}) + (\vec{OJ}, \vec{OM_0}))[2\pi]$$

$$\equiv \left(\frac{\pi}{2} + (\vec{OM}, \vec{OJ})\right)[2\pi] \text{ car } (\vec{OM}, \vec{OJ}) \equiv (\vec{OJ}, \vec{OM_0})[2\pi]$$

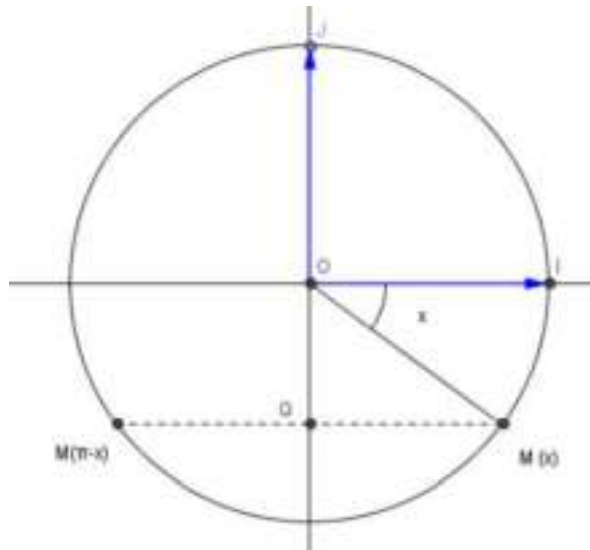
$$\equiv \left(\frac{\pi}{2} + (\vec{OM}, \vec{OI}) + (\vec{OI}, \vec{OJ})\right)[2\pi]$$

$$\equiv \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - (\vec{OI}, \vec{OM})\right)[2\pi]$$

$$\equiv (\pi - x)[2\pi]$$

$$(\vec{OI}, \vec{OM_0}) \equiv (\vec{OI}, \vec{OM'})[2\pi] \text{ car } (\vec{OI}, \vec{OM'}) \equiv (\pi - x)[2\pi]$$

D'où $M_0 = M'$ et donc M' l'image de $\pi - x$ sur le cercle trigonométrique est aussi le symétrique de M par rapport à (OJ) . Par conséquent M et M' ont des abscisses opposées et même ordonnée et on a la configuration suivante :



Ainsi, on a les formules ci-dessous :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\tan(\pi - x) = -\tan x$. (Cette formule peut se déduire des 2 premières).

Les formules suivantes ont également lieu :

- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\tan(\pi + x) = \tan x$

Preuve :

$$\cos(\pi + x) = \cos(\pi - (-x)) = -\cos(-x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = \sin(\pi - (-x)) = \sin(-x) = -\sin x$$

$\tan(\pi + x) = \tan x$ se déduit facilement des 2 premières.

✓ L'image M de x et l'image M' de $\pi + x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à O et on a la configuration suivante :

En effet si M_0 est le symétrique de M par rapport à O alors : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_0}) \equiv \pi[2\pi]$ donc

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_0}) \equiv ((\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_0})) [2\pi]$$

$$\equiv (\pi + x) [2\pi] \text{ car } (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv x[2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_0}) \equiv \pi[2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_0}) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) [2\pi] \text{ car } (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) \equiv (\pi + x) [2\pi] \text{ d'où } M_0 = M'$$

- ✓ L'image M de x et l'image M' de $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à la première bissectrice (bissectrice de $\widehat{IOJ}$). En effet si M_0 est le symétrique de M par rapport à la première bissectrice et P le point d'intersection du cercle trigonométrique avec la première bissectrice, situé sur le premier quadrant alors

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM_0}) [2\pi] \text{ donc}$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_0}) \equiv ((\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM_0})) [2\pi]$$

$$\equiv \left(\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM_0}) \right) [2\pi] \text{ car } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM_0}) [2\pi]$$

$$\equiv \left(\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) \right) [2\pi] \text{ car } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM_0}) [2\pi]$$

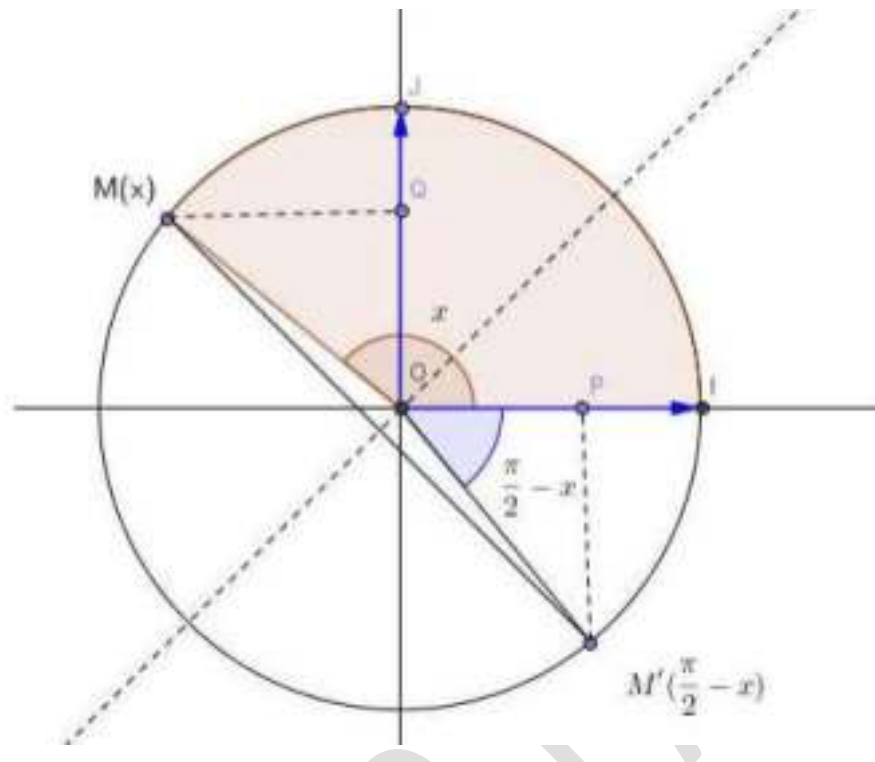
$$\equiv \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) \right) [2\pi] \text{ car } (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv \left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} \right) [2\pi] \text{ car } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}) \equiv -x[2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\equiv \left(\frac{\pi}{2} - x \right) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_0}) \equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) [2\pi] \text{ car } (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \left(\frac{\pi}{2} - x \right) [2\pi]$$

D'où $M_0 = M'$ et donc M' l'image de $\frac{\pi}{2} - x$ sur le cercle trigonométrique est aussi le symétrique de M par rapport à la première bissectrice. Par conséquent l'abscisse de M est l'ordonnée de M' et l'ordonnée de M est l'abscisse de M' on a la configuration suivante :



Ainsi, on a les formules suivantes :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan x$ (Cette formule peut se déduire des 2 premières).

Enfin, on a aussi :

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cotan x$

Preuve

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cotan x \text{ peut se déduire facilement des 2 premières.}$$

- ✓ Remarquons que l'image M de $\frac{\pi}{2} - x$ et l'image M' de $\frac{\pi}{2} + x$ sur le cercle trigonométrique sont symétriques par rapport à (OJ) . En effet, $\frac{\pi}{2} + x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Ainsi, on a la configuration suivante :

Exercice d'application

1. On donne $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
 - a. Montrer que $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
 - b. En déduire que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
 - c. Déduire de b) $\sin \frac{5\pi}{12}$.

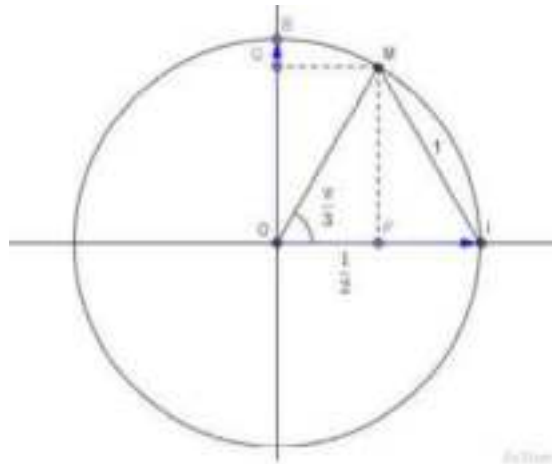
3. Valeurs particulières du cosinus, du sinus et de la tangente

Les réels x du tableau suivant sont dits mesures en radians d'angles orientés remarquables. Leurs lignes trigonométriques doivent être retenues par cœur.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie	0

Preuve

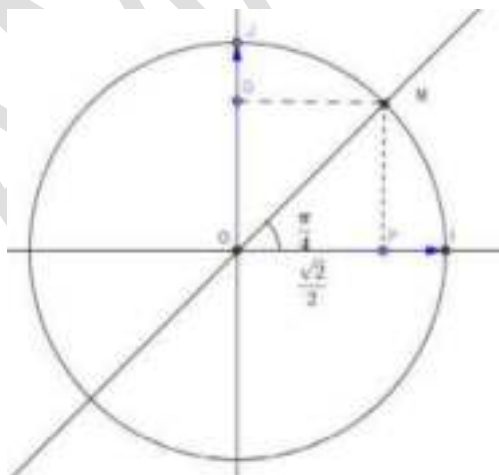
I, J et I' sont les images respectives de 0 ; $\frac{\pi}{2}$ et π sur le cercle trigonométrique donc $I\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix}$ d'où $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$; $J\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ donc $\cos \frac{\pi}{2} = 0$; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $I'\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \pi \\ \sin \pi \end{pmatrix}$ d'où $\cos \pi = -1$; $\sin \pi = 0$.



Soit M le point tel que OIM soit équilatéral direct. Ainsi M est sur le cercle trigonométrique (car $OM = OI = 1$). $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{3} \text{ rad}[2\pi]$ et donc M est l'image de $\frac{\pi}{3}$. Le projeté orthogonal P de M sur (OI) est le milieu de [OI]. Par suite $OP = \overline{OP} = \frac{1}{2}$ d'où $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Le projeté orthogonal de M sur (OJ) est sur [OJ] donc $\overline{OQ} = OQ = \sin \frac{\pi}{3} > 0$.

Comme $\sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ donc $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ donc $\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$



Soit M le point d'intersection de la 1^{ère} bissectrice et du 1^{er} quadrant. $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{4} \text{ rad}[2\pi]$ et donc M est l'image de $\frac{\pi}{4}$. Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M sur (OI) et (OJ). On a : $OP = OQ$ (car M est sur la bissectrice et est équidistant des côtés). Par suite $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$. Ainsi $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow 2\cos^2 \frac{\pi}{4} = 1$ et $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$ (car $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} > 0$).

NB : La dernière ligne du tableau s'obtient en appliquant $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et en remarquant que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Exercice d'application : Calculer les lignes trigonométriques de : $\frac{301\pi}{3}$; $\frac{-239\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$

4. Formules trigonométriques

a. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée directe

Propriété : Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul alors on a : $\vec{u} \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \\ \|\vec{u}\| \sin(\vec{i}, \vec{u}) \end{pmatrix}$.

Preuve

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$. On a : $\begin{cases} x = \vec{u} \cdot \vec{i} = \|\vec{u}\| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \text{ car } \|\vec{i}\| = 1 \\ y = \vec{u} \cdot \vec{j} = \|\vec{u}\| \cos(\vec{j}, \vec{u}) \text{ car } \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$

Or $(\vec{u}, \vec{j}) \equiv ((\vec{u}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{j}))[2\pi]$

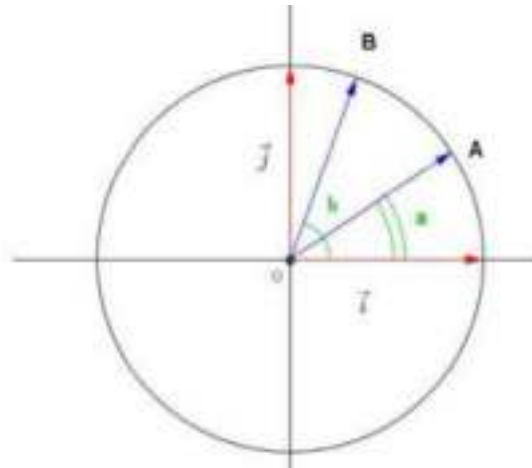
$$\equiv \left(\frac{\pi}{2} - (\vec{i}, \vec{u}) \right) [2\pi] \text{ donc } \cos(\vec{u}, \vec{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\vec{i}, \vec{u})\right) = \sin(\vec{i}, \vec{u})$$

Par suite : $\begin{cases} x = \|\vec{u}\| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \\ y = \|\vec{u}\| \sin(\vec{i}, \vec{u}) \end{cases}$ et donc on a : $\vec{u} \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \\ \|\vec{u}\| \sin(\vec{i}, \vec{u}) \end{pmatrix}$

b. Formules d'addition : $a, b \in \mathbb{R}$

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$ avec $\cos a \neq 0$; $\cos b \neq 0$; $\cos(a - b) \neq 0$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ avec $\cos a \neq 0$; $\cos b \neq 0$; $\cos(a + b) \neq 0$

Preuve :



Soient A et B les images respectives sur le cercle trigonométrique de a et b .

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv ((\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})) [2\pi]$$

$$\equiv (b - a)[2\pi]$$

$$\text{D'une part } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos(b - a) = \cos(a - b)$$

$$\text{car } \|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = 1.$$

D'autre part, dans la base orthonormée $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, on a : $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Ainsi on a :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Par conséquent $\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$ d'où

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = 0$$

Ainsi $\sin(a + b) = \sin(a - (-b)) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b)$ d'où

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b} \cdot \frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} = \frac{\sin a \cos b \cos a \cos b - \cos a \sin b \cos a \cos b}{\cos a \cos b \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos a \cos b} \text{ d'où}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \tan(a - (-b)) = \frac{\tan a - \tan(-b)}{1 + \tan a \tan(-b)} \text{ d'où } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

NB : Les formules d'addition sont à retenir par cœur.

c. Formules de duplication : Soit $a \in \mathbb{R}$

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Preuve

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \text{ d'où } \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Comme $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ et $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ donc on a $\cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ d'où $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a \text{ d'où } \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Remarque : Les égalités $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ permettent de linéariser $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$. Ainsi, on a : $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ et

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

d. Formules de linéarisation

Les formules suivantes sont dites formules de linéarisation et permettent de transformer un produit d'expressions trigonométriques en une somme. Elles s'obtiennent à partir des formules d'addition et il n'est pas nécessaire de les retenir par cœur.

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
- $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

Preuve

Comme $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
donc $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$ d'où $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$.

De même $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b$ d'où $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

Comme $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
donc $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$ d'où $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b$ d'où $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$

e. Formules de factorisation

Les formules suivantes sont dites formules de factorisation et permettent de transformer une somme d'expressions trigonométriques en un produit. Elles sont parfois utiles dans la résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques. Elles s'obtiennent à partir des formules d'addition et il n'est pas nécessaire de les retenir par cœur.

- $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
- $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$
- $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$

Preuve

On remarque que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ donc on a :

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

De même, on montre les 3 formules restantes.

Exercice d'application

1. Montrer que $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$. En déduire que $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
2. Montrer que $\sin x = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$. En déduire que $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$
3. Montrer que $\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}$

II. Equations trigonométriques

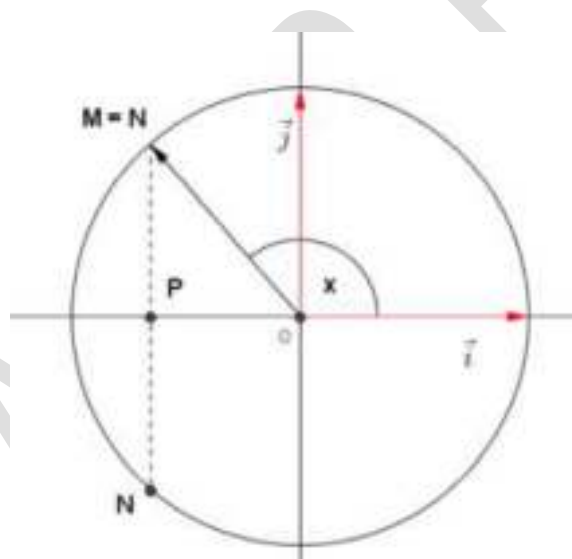
Soit a un réel fixé.

1. Equations du type $\cos x = \cos a$

a. Théorème

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z} ;$$

Preuve



Soit M et N les images respectives sur le cercle trigonométrique de x et a on a :

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow M$ et N ont même abscisse dans $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ ce qui signifie que M et N sont confondus ou symétriques par rapport à (OI) .

$$M=N \Leftrightarrow x = a + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} ;$$

$$M \text{ et } N \text{ symétriques par rapport à } (OI) \Leftrightarrow x = -a + 2k'\pi; k' \in \mathbb{Z} .$$

Par suite $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$

b. Exemple

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$

2. En déduire les solutions dans $]-\pi, \pi]$ de $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$.

Solution

1. $\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi$; $k, k' \in \mathbb{Z}$ d'où

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Pour cela, on cherche k et k' tels que $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \leq \pi$

$$-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < k \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = 0. \text{ Ainsi pour } k = 0, \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{3}$$

$$-\pi < -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k' \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k' = 0. \text{ Ainsi pour } k' = 0, -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi = -\frac{\pi}{3}$$

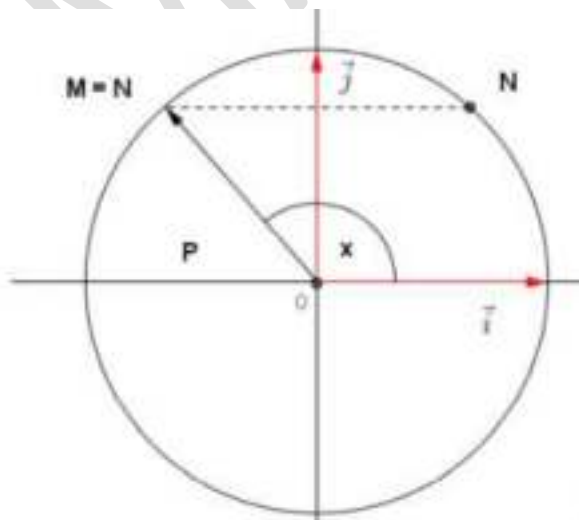
Donc dans $]-\pi, \pi]$, $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \right\}$

2. Equations du type $\sin x = \sin a$

a. Théorème

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k'\pi$; $k, k' \in \mathbb{Z}$:

Preuve



Soient M et N les images respectives sur le cercle trigonométrique de x et a on a :

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow M$ et N ont même ordonnée dans $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

$\Leftrightarrow M$ et N sont confondus ou symétriques par rapport à (OJ) .

$$M=N \Leftrightarrow x = a + 2k\pi; k \in \mathbb{Z};$$

$$M \text{ et } N \text{ symétriques par rapport à } (OJ) \Leftrightarrow x \equiv (\pi - a) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow x = \pi - a + 2k'\pi; k' \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Par suite } \sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

b. Exemple

$$\text{Résoudre dans } [0; 2\pi] \sin x = \sin \frac{5\pi}{4}$$

$$\sin x = \sin \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{8} \leq k \leq \frac{3}{8} \Leftrightarrow k = 0. \text{ Ainsi pour } k = 0, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$0 \leq -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k' \leq \frac{9}{8} \Leftrightarrow k' = 1. \text{ Ainsi pour } k' = 1, -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi = \frac{7\pi}{4}$$

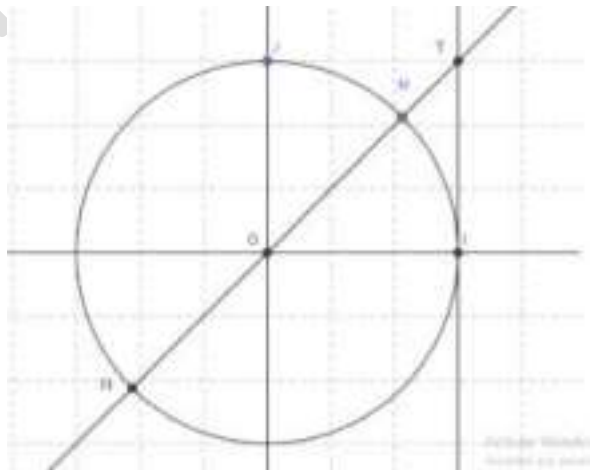
$$\text{Donc dans } [0; 2\pi], S = \left\{ \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

3. Equations du type $\tan x = \tan a$

a. **Théorème** : Supposons que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$$

Preuve



Soient M et N les images respectives sur le cercle trigonométrique de x et a on a :

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow N \neq J \text{ et } N \neq J'$$

$$\Leftrightarrow \tan a = \overline{IT} \text{ où } \{T\} = (ON) \cap (\Delta) \text{ ((}\Delta\text{) étant la tangente à (C) en I)}$$

$$\tan x = \tan a \Leftrightarrow \tan x = \overline{IT} \Leftrightarrow \{T\} = (\Delta) \cap (OM)$$

$$\left. \begin{array}{l} T \in (ON) \\ T \in (OM) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (OM) = (ON) \Leftrightarrow M = N \text{ ou } O \text{ milieu de } [MN].$$

$$M = N \Leftrightarrow x = a + 2k\pi = a + k'\pi \text{ où } k' = 2k \in \mathbb{Z} \text{ et}$$

$$O \text{ milieu de } [MN] \Leftrightarrow x \equiv (\pi + a) [2\pi] \Leftrightarrow x = \pi + a + 2p\pi; p \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = a + (2p + 1)\pi = a + k'\pi \text{ où } k' = 2p + 1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ainsi } \tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$$

b. Exemple

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ puis dans } [0; 2\pi] \tan x = \tan \frac{\pi}{4}$$

4. Equations du type $\cos x = a$

a. Théorème

- Si $a \notin [-1; 1]$ alors les équations $\cos x = a$ n'a pas de solutions donc $S = \emptyset$.
- Si $a \in [-1; 1]$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R} : a = \cos \alpha$.

$$\text{Donc } \cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

Preuve

Supposons que $a \notin [-1; 1]$. Comme $\cos x \in [-1; 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $\cos x \neq a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Supposons que $a \in [-1; 1]$, Soient P le point de (OI) tel que $\overline{OP} = a$. La perpendiculaire à (OI) en P coupe le cercle trigonométrique en M et M' . M a pour abscisse a dans $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Ainsi Toute mesure en radians α de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est tel que $\cos \alpha = a$. Par suite

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

b. Exemple

Réolvons dans $\mathbb{R}$ $\cos x = \frac{1}{2}$

Solution

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z} \text{ d'où}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

5. Equations du type $\sin x = a$

a. Théorème

- Si $a \notin [-1; 1]$ alors les équations $\sin x = a$ n'a pas de solutions donc $S = \emptyset$.
- Si $a \in [-1; 1]$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R} : a = \sin \alpha$.

$$\text{Donc } \sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

Preuve (similaire à celle du 4))

b. Exemple

$$\text{Réolvons dans } \mathbb{R} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solution

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z} \text{ d'où}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

6. Equations du type $\tan x = a$

a. Théorème

Si $a \in \mathbb{R}$ alors il existe $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = \tan \alpha$.

Preuve :

On considère le cercle trigonométrique (C) muni de l'axe des tangentes. On considère le point P de l'axe des tangentes ayant pour abscisses a. La droite (OP) coupe (C) en deux points M et M'. Soit α une abscisse curviligne de M. S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $M = J$ ou

$M = J'$. Dans ce cas, $(OP) = (OM)$ est parallèle à l'axe des tangentes. Ce qui est absurde donc $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Il est clair que $a = \tan \alpha$.

b. Théorème

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \text{ avec } a = \tan \alpha$$

Preuve

Considérons la tangente au cercle trigonométrique en I et T le point de cette tangente tel que $\overline{IT} = a$. La droite (OT) coupe le cercle trigonométrique en deux points M et M'. Toute abscisse curviligne α de M ou de M' est telle que $\tan \alpha = \overline{IT} = a$.

$$\text{Ainsi } \tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

NB : Pour les équations du type $\tan x = \tan \alpha$, il est inutile de déterminer la condition d'existence c'est-à-dire, il est inutile de poser $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ car dans l'équivalence $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on a $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ ce qui permet de voir pour tout $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

b. Exemple

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} \tan x = 1$$

Solution

$$\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

7. Equations du type $a \cos x + b \sin x = c$ où $(a, b) \neq (0, 0)$

a. Propriété

Si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos \theta = a$ et $\sin \theta = b$

Preuve

Soit $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M \in$ au cercle trigonométrique. Soit θ une mesure en radians de $(\vec{OI}, \vec{OM})$. Ainsi $a = \cos \theta$ et $\sin \theta = b$.

b. Théorème

$$a \cos x + b \sin x = c \Leftrightarrow \cos(x - \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

Preuve

$$a \cos x + b \sin x = c \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) = c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ donc d'après la propriété ci-dessus, il existe $\theta \in \mathbb{R}$

tel que $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Ainsi, on a :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

c. Exemples

Réolvons dans $\mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = 1$ et $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 3$;

- $\cos x + \sin x = 1$; $a = b = 1$; $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

$$\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$$

- $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 3$; $a = \sqrt{3}$; $b = -1$; $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 3 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 3 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{2} \text{ or } \frac{3}{2} \notin [-1, 1] \text{ donc } S = \emptyset$$

III. Inéquations trigonométriques

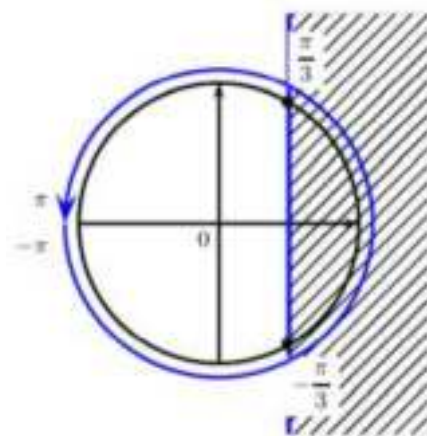
Les inéquations trigonométriques ci-dessous se résolvent en général par lecture graphique sur le cercle trigonométrique. Les solutions d'une inéquation trigonométrique sont généralement une réunion d'intervalles dont les bornes sont les solutions de l'équation correspondante. Nous allons les étudier à partir de quelques exemples.

1. Exemple 1

Réolvons dans $]-\pi; \pi]$ $\cos x < \frac{1}{2}$

Solution

On commence par résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi; \pi]$. On obtient $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$. On place les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique. Elles sont symétriques par rapport à (OI) . La droite verticale passant par ces deux images permettent souvent par lecture graphique de savoir l'arc ou la réunion d'arcs qui contiennent les images des solutions de l'inéquation. Les réels x tels que $\cos x < \frac{1}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points du cercle trigonométrique dont les abscisses dans $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ sont inférieures strictement à $\frac{1}{2}$. Ces points sont situés sur l'arc du cercle trigonométrique situé à gauche de la droite verticale en bleu du schéma ci-dessous. Comme les images de la borne inférieure et de la borne supérieure de $]-\pi; \pi]$ se trouve sur cet arc alors on fait une lecture en allant dans le sens direct en partant de la borne inférieure.



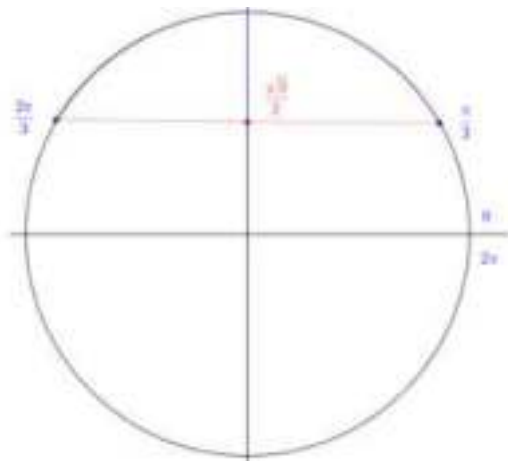
Ainsi $S = \left] -\pi, -\frac{\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{\pi}{3}, \pi \right]$

2. Exemple 2

Réolvons dans $[0, 2\pi[$ $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution

On résout l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0, 2\pi[$. On obtient $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$. On place les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique. Elles sont symétriques par rapport à (OJ) . On trace la droite passant par ces deux points. Les réels x tels que $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points du cercle trigonométrique dont les ordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont supérieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces points sont situés sur l'arc du cercle trigonométrique situé au-dessus de la droite horizontale en rouge du schéma ci-dessous. Il s'agit maintenant de chercher les réel x de $[0, 2\pi[$ ayant leurs images sur cet arc de cercle.



$$S = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

Exercice à faire

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

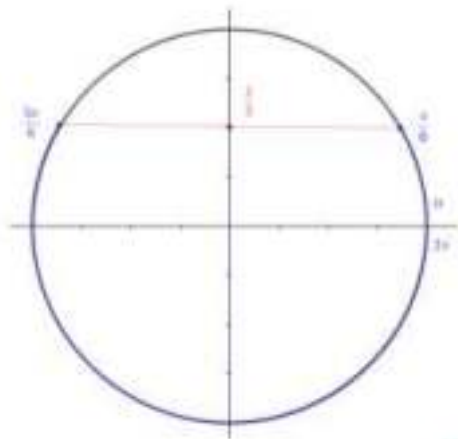
3. Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\sin x \leq \frac{1}{2}$

Solution

Pour résoudre dans $\mathbb{R} \sin x \leq \frac{1}{2}$, on commence par la résoudre dans un intervalle de longueur 2π par exemple dans $[0; 2\pi]$ puis on ajoute $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ aux bornes de chaque intervalle de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est la réunion de ces intervalles où $k \in \mathbb{Z}$.

On résout l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$. On obtient $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. On place les images de ces solutions sur le cercle trigonométrique. Elles sont symétriques par rapport à (OJ) . On trace la droite passant par ces deux points. Les réels x tels que $\sin x \leq \frac{1}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points du cercle trigonométrique dont les ordonnées dans $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$. Ces points sont situés sur l'arc du cercle trigonométrique situé en dessous de la droite horizontale en rouge du schéma ci-dessous. Il s'agit maintenant de chercher les réel x de $[0; 2\pi]$ ayant leurs images sur cet arc de cercle.



L'ensemble des solutions dans $[0; 2\pi]$ est $\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$. Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\right]$.

4. Exemple 4

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ $\tan x > 1$

Solution

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ $\tan x > 1$, on commence par la résoudre dans un intervalle de longueur 2π par exemple dans $[0; 2\pi]$ puis on ajoute $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ aux bornes de chaque intervalle de l'ensemble des solutions. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ est la réunion de ces intervalles où $k \in \mathbb{Z}$.

On résout dans $[0; 2\pi[$ $\tan x > 1$.

Pour une inéquation avec tangente, on peut déterminer d'abord les conditions de validité, ceci pourrait nous éviter de fermer les crochets au niveau des bornes où l'on devrait ouvrir au moment d'écrire l'ensemble des solutions.

$\tan x > 1$ est valide ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Cherchons donc les réels x de $[0; 2\pi[$ de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2};$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{3\pi}{2};$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{5\pi}{2} \notin [0; 2\pi[$$

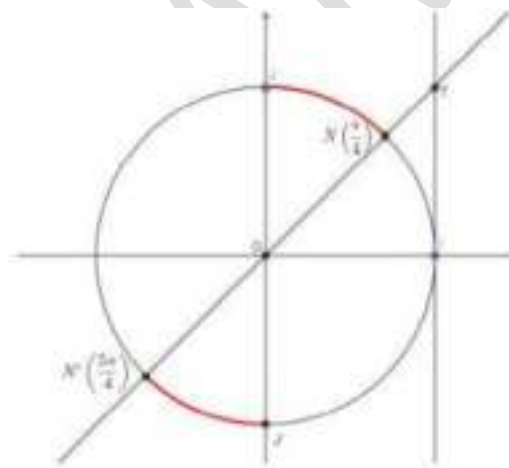
$$k = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{2} \notin [0; 2\pi[$$

$$\text{Donc dans } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{On résout dans } [0; 2\pi[, \text{ l'équation } \tan x = 1. \text{ On a : } \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi < 2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

On représente sur le cercle trigonométrique l'image de $\frac{\pi}{4}$, celle de $\frac{5\pi}{4}$ qui est le symétrique par rapport à O de l'image de $\frac{\pi}{4}$, les images de $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{3\pi}{2}$. Les réels x tels que $\tan x > 1$ sont les abscisses curvilignes des points situés sur les arcs en rouge de la figure ci-dessous privés des points I, J, I' et J'.



$$\text{Dans } [0; 2\pi[, \tan x > 1 \Leftrightarrow x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$$

Ainsi l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de $\tan x > 1$ est

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right[$$

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations trigonométriques suivantes :

1. $\sqrt{2} \cos 2x + 1 < 0$
2. $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} \leq 0$

Solution

1. Nous allons d'abord la résoudre dans $[0; 2\pi]$

$$\sqrt{2} \cos 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow \cos 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}, t = 2x$$

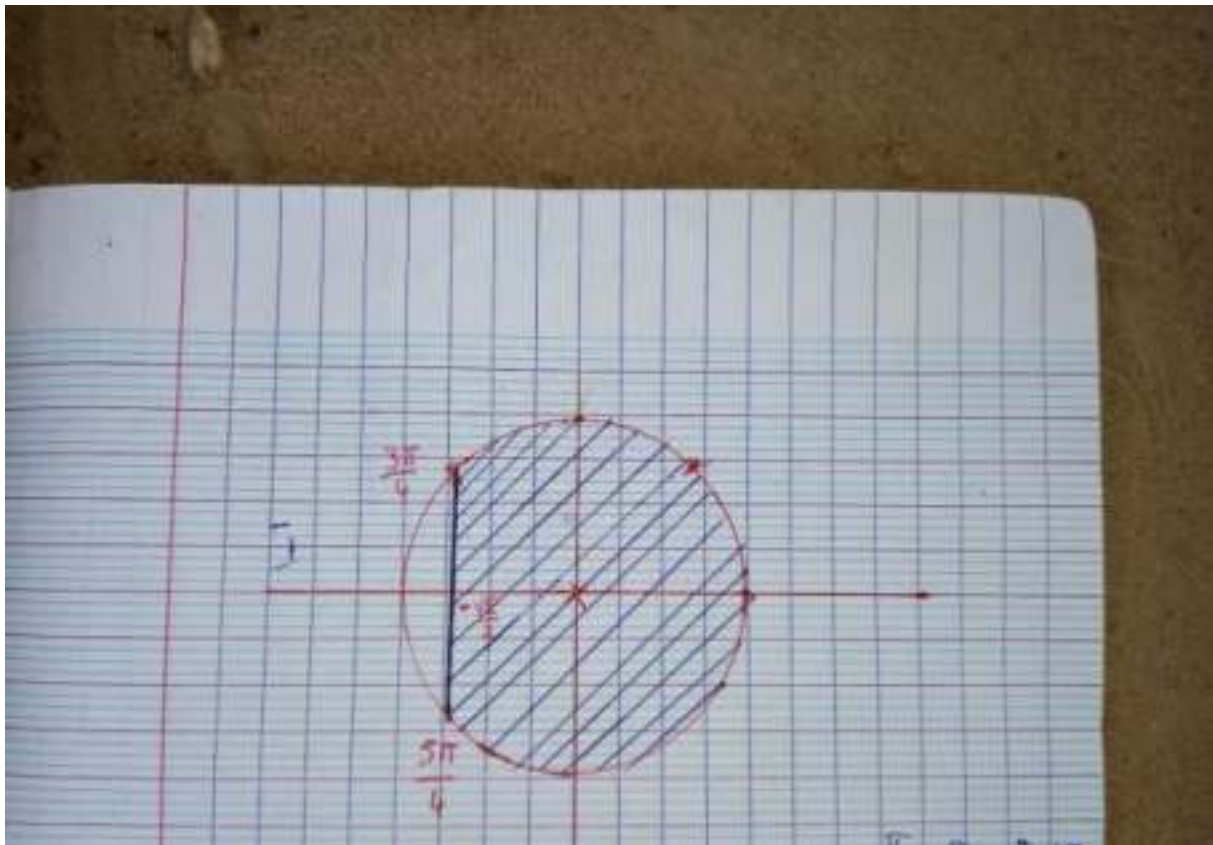
$$\text{Résolvons dans } [0; 2\pi] \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \in [0; 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4\pi \text{ où } t = 2x$$

$$\text{Dans } [0; 2\pi[\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos t = \cos \frac{3\pi}{4}; t \in [0; 4\pi]$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } t = \frac{11\pi}{4} \text{ ou } t = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } t = \frac{13\pi}{4}$$

Plaçons les images de $0; \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$ et 4π sur le cercle trigonométrique. 0 et 4π ont même image ; $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{11\pi}{4}$ ont même image ; $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{13\pi}{4}$ ont même image. Les deux dernières images sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Les réels t tel que $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont les abscisses curvilignes des points de l'arc de cercle situé à gauche de la droite verticale en bleu du schéma ci-dessous.



Pour écrire, l'ensemble des solutions dans $[0; 4\pi]$ de $\cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, il faut ranger dans l'ordre croissant les réels $0; \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$ et 4π . On a : $0 < \frac{3\pi}{4} < \frac{5\pi}{4} < \frac{11\pi}{4} < \frac{13\pi}{4} < 4\pi$

$$\text{Ainsi } \cos t < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow t \in \left] \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4} \right[\Leftrightarrow 2x \in \left] \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4} \right[\\ \Leftrightarrow x \in \left] \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{11\pi}{8}; \frac{13\pi}{8} \right[$$

$$\text{Ainsi, dans } [0; 2\pi], \cos 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x \in \left] \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{11\pi}{8}; \frac{13\pi}{8} \right[$$

$$\text{Dans } \mathbb{R}, S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{3\pi}{8} + 2k\pi, \frac{5\pi}{8} + 2k\pi \right[\cup \left] \frac{11\pi}{8} + 2k\pi, \frac{13\pi}{8} + 2k\pi \right[$$

$$2. \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \leq 0$$

Solution

Nous allons d'abord résoudre $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \leq 0$ dans $[0; 2\pi]$

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \tan X \leq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right); X = 2x - \frac{\pi}{3}$$

$$x \in [0; 2\pi] \Leftrightarrow X \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$$

On résout donc $\tan X \leq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ dans $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$

L'inéquation $\tan X \leq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ est valide ssi $X \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2};$$

$$k = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{3\pi}{2};$$

$$k = 2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$k = 3 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{7\pi}{2}$$

$$k = 4 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{9\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$$

$$k = -1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{2} \notin \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$$

Ainsi, dans $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$, $\tan X \leq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ est valide ssi $X \neq \frac{\pi}{2}; X \neq \frac{3\pi}{2}; X \neq \frac{5\pi}{2}$ et $X \neq \frac{7\pi}{2}$.

Réolvons dans $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$, $\tan X = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\text{Dans } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right], \tan X = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow X = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } X = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } X = \frac{5\pi}{3} \text{ ou } X = \frac{8\pi}{3} \text{ ou } X = \frac{11\pi}{3}$$

Plaçons les images de $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique puis traçons l'axe des tangentes. Les réels X de $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right]$ tels que $\tan X \leq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ sont les abscisses curvilignes des points situés sur les arcs colorés en rouges.

Rangeons $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$ dans l'ordre croissant : On a :

$$-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{3}$$



$$\text{Dans } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}\right], \tan X \leq \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow X \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{8\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{8\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12}; \pi\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{12}; 2\pi\right]$$

$$\text{Ainsi dans } [0; 2\pi], \tan(2x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12}; \pi\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{12}; 2\pi\right]$$

$$\text{Dans } \mathbb{R}, S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{12} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{11\pi}{12} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{17\pi}{12} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{23\pi}{12} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\right]$$

Chapitre 8: Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle

Durée : 12h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Restituer la définition de fonction.
- ✓ Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction.
- ✓ Déterminer graphiquement l'image directe d'un ensemble I noté $f(I)$.
- ✓ Déterminer graphiquement l'image réciproque d'un ensemble I noté $f^{-1}(I)$.
- ✓ Reconnaître et/ou déterminer un majorant, un minorant d'une fonction donnée.
- ✓ Comparer deux fonctions.
- ✓ Déterminer la parité d'une fonction.
- ✓ Faire le lien entre la parité d'une fonction et la symétrie de sa courbe ;
- ✓ Justifier la périodicité d'une fonction.
- ✓ Utiliser la parité et/ou la périodicité d'une fonction dans l'étude et la représentation d'une fonction.

- ✓ Déterminer le sens de variations d'une fonction.
- ✓ Déterminer la composée de deux fonctions.
- ✓ Décomposer une fonction donnée en composée de deux fonctions.
- ✓ Utiliser la composée pour étudier les variations d'une fonction.
- ✓ Représenter les fonctions associées ci-dessous à partir de la représentation graphique de f :

- $x \mapsto f(x - a)$
- $x \mapsto f(x) + b$
- $x \mapsto |f(x)|$
- $x \mapsto f(|x|)$

Prérequis :

- ✓ Fonctions affines.
- ✓ Les applications.

Supports didactiques :

- ✓ Cours Faye ; ka et Mbengue.
- ✓ Usaid 2nd .
- ✓ CIAM 1^{ère} SM.
- ✓ Mon cours de 1^{ère} S2 à Ndongol.
- ✓ Hachettes classiques 1^{ère} A1 et B.
- ✓ Mathématiques seconde collection Bordas.

Plan du chapitre

I. Rappels et compléments sur la notion de fonction

1. Activité

2. Notion de fonction

a. Définition, vocabulaire et notation

b. Remarques

c. Exemples

2. Ensemble de définition d'une fonction

a. Définition et exemple

b. Remarque

- c. Ensemble de définition de fonctions usuelles
- d. Propriété
- e. Exercice d'application
- f. Remarque

3. Restriction et prolongement d'une fonction à un ensemble

- a. Définitions
- b. Remarques
- c. Exemples

4. Sens de variations d'une fonction

- d. Définitions
- e. Exemples
- f. Remarques
- g. Taux de variation

5. Représentation graphique d'une fonction

- a. Définition
- b. Exemple
- c. Propriétés
- d. Remarque

6. Extrémum d'une fonction

- a. Définitions
- b. Exemple
- c. Remarques
- d. Exercice d'application

7. Parité et périodicité d'une fonction

- a. Définition 1
- b. Définition 2
- c. Définition 3
- d. Définition 4

II. Image directe-image réciproque d'un ensemble

- 1. Définitions
- 2. Propriétés

3. Exercice d'application

III. Comparaison de deux fonctions numériques

1. Définitions

2. Exemples

3. Propriété

IV. Opérations sur les fonctions et composition de fonctions

1. Opérations sur les fonctions

2. Composée de 2 fonctions

a. Définition

b. Exemples

c. Propriétés

V. Fonctions associées

1. Théorème 1

2. Théorème 2

3. Théorème 3

Déroulement du cours

Introduction

Dans le langage courant, le mot fonction peut avoir plusieurs significations : rôle, utilité d'un élément dans un ensemble (fonction d'un mot dans une phrase), profession (exercice d'une charge, d'un emploi), activité propre à un appareil, à un ensemble (la fonction digestive). En mathématiques, il fait allusion à une grandeur dépendant d'une ou de plusieurs autres grandeurs variables. Par exemple, on peut exprimer l'aire d'un cercle en fonction de son rayon et le périmètre d'un carré en fonction de son côté. Ainsi l'étude d'une grandeur qui dépend d'une autre ou de plusieurs autres grandeurs met en évidence la notion de fonction. Du point de vue, historique, déjà dans l'antiquité, les babyloniens utilisaient implicitement les fonctions dans leurs tables de carrées, de cubes et de racines carrées qu'ils établissaient pour les astronomes. Au 14^{ème} siècle, Nicole Oresme (mathématicien, physicien, philosophe, astronome, musicologue, traducteur, théologien et économiste français) a exprimé la vitesse en fonction du temps mais le terme fonction est utilisé pour la première fois par René Descartes (mathématicien, physicien et philosophe français) en 1637. La définition précise d'une fonction peut être attribuée à Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (mathématicien allemand). Au 19^{ème} siècle, l'apparition de la théorie des ensembles a permis de préciser davantage la notion

de fonction et a permis de déboucher sur la notion d'application. La notion de fonction est très importante au sein même des mathématiques (elle est utilisée à tous les niveaux implicitement ou explicitement.) En sciences physiques, elle est aussi utilisée.

I. Rappels et compléments sur la notion de fonction

1. Activité

Soit $E = \{1; 2; 0; -\sqrt{2}\}$ et $F = \{\frac{1}{2}; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 4\}$. f est le procédé défini de E vers F qui à chaque élément de E associe son inverse.

- Donner le diagramme sagittal de f .
- f est-elle une application de E dans F ? Justifier.
- Décrire le procédé f .

Solution

- Faire le graphique.
- f n'est pas une application car l'élément 0 de E n'a pas d'image par f .
- f est un procédé de E vers F qui à chaque élément E associe au plus un (0 ou 1) élément de F . Le procédé f est dit fonction de E vers F .

Par cette fonction, l'image 1 de 1 est notée $f(1)$, l'image $\frac{1}{2}$ de 2 est notée $f(2)$ et l'image $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ de $-\sqrt{2}$ est notée $f(-\sqrt{2})$. 0 n'a pas d'image.

2. Notion de fonction

a. Définition, vocabulaire et notation

Soient E et F deux ensembles non vides quelconques. Une fonction de E vers F est un procédé permettant d'associer à chaque élément de E au plus un (0 ou 1) élément de F .

- E est dit ensemble de départ ou source et F est dit ensemble d'arrivée ou but.
- Si la fonction est appelée f alors on note : $f: E \rightarrow F$.
- Si $x \in E$ est associé à $y \in F$ alors on dit que y est l'image de x (ou bien x est un antécédent de y) par f et on note $f: E \rightarrow F$ ou simplement $f(x) = y$.

$$x \mapsto f(x) = y$$

b. Remarques

- Le procédé dont on parle peut être une relation, une phrase ou une formule.

- Un élément de E peut ne pas avoir d'image mais s'il en a alors elle est unique tandis qu'un élément de B peut avoir 0 ou 1 ou plusieurs antécédents.
- Une application de E dans F est une fonction de E vers F mais la réciproque est fausse.
- Si E est un ensemble de nombres réels ($E \subseteq \mathbb{R}$) alors la fonction est dite fonction d'une variable réelle, si F est un ensemble de nombres réels ($F \subseteq \mathbb{R}$) alors la fonction est dite fonction numérique et si $E \subseteq \mathbb{R}$ et $F \subseteq \mathbb{R}$ alors la fonction est dite fonction numérique d'une variable réelle.
- Pour une fonction numérique à variable réelle si l'ensemble de départ et d'arrivée ne sont pas précisés alors par défaut c'est $\mathbb{R}$.

c. Exemples

- Le procédé f défini dans l'activité ci-dessus est une fonction de E vers F .
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}.$$

- Une fonction numérique d'une variable réelle peut être définie par la donnée de plusieurs formules à utiliser suivant des intervalles bien précisés. Par exemple le procédé f tel que $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x > 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est une fonction numérique d'une variable réelle. Pour ce cas, il faut se garder de croire qu'on a deux fonctions. On a bien une seule fonction mais pour connaître l'image $f(x)$ d'un réel x , il faut d'abord savoir auquel des intervalles indiqués appartient x .

3. Ensemble de définition d'une fonction

a. Définition et exemple

Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction quelconque. L'ensemble de définition (ou domaine de définition) de f noté D_f est l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x \in E$ pour lesquels $f(x)$ existe. Par exemple, pour la fonction f de l'activité, $D_f = \{1; 2; -\sqrt{2}\}$.

b. Remarque

Une fonction $f: E \rightarrow F$ est une application si et seulement si $D_f = E$.

c. Ensemble de définition de fonctions usuelles

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	Ensemble de définition D_f	Nom de la fonction f
--	------------------------------	------------------------

$f(x) = c$ où c est constant	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction constante
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction identité
$f(x) = ax + b$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction affine
$f(x) = x^2$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction carrée
$f(x) = x^3$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction cubique
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	Fonction inverse
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = [0; +\infty[= \mathbb{R}^+$	Fonction racine carrée
$f(x) = x $	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction valeur absolue
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction cosinus
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	Fonction sinus
$f(x) = \tan x$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$	Fonction tangente

d. Propriété

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle. Pour déterminer D_f :

- Repérer les « suspects » dans l'expression de $f(x)$ (dénominateurs et radicandes où figure la variable x).
- Ecrire chaque dénominateur et poser la condition qu'il doit être différent de zéro ($\neq 0$).
- Ecrire chaque radicande et poser la condition qu'il doit être positif (≥ 0).
- Résoudre le système formé par ces différentes conditions obtenues.

Ainsi D_f est égal à :

- l'ensemble des solutions du système résolu si l'ensemble de départ de f est $\mathbb{R}$.
- l'intersection de l'ensemble de départ de f et l'ensemble des solutions du système résolu si l'ensemble de départ n'est pas $\mathbb{R}$.

Remarques

- Si un seul suspect est repéré alors on cherche l'ensemble des réels qui vérifient la condition imposée à ce « suspect » et D_f est l'intersection de cet ensemble et l'ensemble de départ de f .
- Si aucun suspect n'est repéré alors D_f est égal à l'ensemble de départ de f .

e. Exercice d'application

Déterminer D_f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \frac{x+1}{3x^2-x-2}$

2. $f: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{2x-1}$$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{2x-5}}{x-3}$

Solution

a. L'ensemble de départ de f est $\mathbb{R}$.

$f(x)$ existe ssi $3x^2 - x - 2 \neq 0$.

$$a + b + c = 3 - 1 - 2 = 0 \text{ donc } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{2}{3}$$

$f(x)$ existe ssi $x \neq 1$ et $x \neq -\frac{2}{3}$ d'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{1; -\frac{2}{3}\right\}$

2. $f: [0; 3] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{2x-1}$$

$f(x)$ existe ssi $2x - 1 \geq 0$ et $x \in [0; 3]$

$$\dots \dots x \geq \frac{1}{2} \text{ et } x \in [0; 3]$$

$$\dots \dots x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ et } x \in [0; 3]$$

$$\text{D'où } D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\cap [0; 3] = \left[\frac{1}{2}; 3\right]$$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{2x-5}}{x-3}$

$f(x)$ existe ssi $2x - 5 \geq 0$ et $x - 3 \neq 0$.

$$\dots \dots x \geq \frac{5}{2} \text{ et } x \neq 3$$

$$\text{D'où } D_f = \left[\frac{5}{2}; 3\right[\cup]3; +\infty[$$

f. Remarque

Si f est une fonction polynôme alors D_f est égal à son ensemble de départ.

Exercice à faire à la maison : Déterminer D_f dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{3x+7}}$

b. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + x} - 2}$

4. Restriction et prolongement d'une fonction à un ensemble

a. Définitions

Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction.

- Si A est une partie non vide de E ($A \subseteq E$) alors la restriction de f à A est la fonction notée $f|_A$ dont l'ensemble de départ est A , l'ensemble d'arrivée est F et qui donne à chaque élément de A la même image que f . Ainsi : $f|_A: A \rightarrow F$
$$x \mapsto f(x)$$
- Si E est une partie de E' ($E \subseteq E'$) alors un prolongement de f à E' est la fonction dont l'ensemble de départ est E' , l'ensemble d'arrivée est F , qui donne à chaque élément de E (s'il existe) la même image par f et qui définit (s'il existe) des images aux éléments de E' qui ne sont pas dans E .

b. Remarques

- Définir une restriction d'une fonction consiste à considérer la fonction sur une partie de son ensemble de départ.
- f est un prolongement de $f|_A$ à E .
- L'ensemble de définition de $f|_A$ est $D_f \cap A$.

c. Exemples

- Soit $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$. Déterminons la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On a : $f|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{x^2+x-2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$ car $x-1 \neq 0$ donc

$$f|_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x+2}$$

- Soit $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

La fonction g définie par $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice à faire à la maison : Quelle est la restriction à $[0; +\infty[$ de la fonction valeur absolue.

NB : Dans tout le reste du cours, quand on parle de fonction, il s'agit d'une fonction numérique d'une variable réelle.

5. Sens de variations d'une fonction

a. Définitions

Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction et I un intervalle tel que $I \subset D_f$.

- f est croissante sur I signifie que pour tout $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$ (ou bien si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$). Autrement dit f conserve l'ordre entre deux éléments quelconques de I .
- f est strictement croissante sur I signifie que $\forall x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$ (ou bien si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$).
- f est décroissante sur I signifie que pour tout $x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ (ou bien si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$). Autrement dit f change l'ordre entre deux éléments quelconques de I .
- f est strictement décroissante sur I signifie que $\forall x_1, x_2 \in I$, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$ (ou bien si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$).
- f est constante sur I si pour tout $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) = f(x_2)$. Autrement dit f prend la même valeur pour tout $x \in I$.
- f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante sur I .
- f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I .

- Etudier le sens de variation (ou la monotonie) d'une fonction sur un intervalle, c'est étudier si la fonction est croissante ou décroissante sur l'intervalle.

b. Exemples

- Soit $f(x) = x^2$, étudions le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.

Soient $x_1, x_2 \in [0; +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$.

$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ or $x_1 + x_2 > 0$ (car x_1 et x_2 sont tous positifs ou nuls mais ne peuvent pas être nuls à la fois) et $x_1 - x_2 < 0$ (car $x_1 < x_2$) donc $f(x_1) - f(x_2) < 0$ d'où $f(x_1) < f(x_2)$. Ainsi f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

- $f(x) = \frac{1}{x}$. Étudions le sens de variations de f sur $] -\infty; 0[$

Soient $x_1, x_2 \in] -\infty; 0[$ tels que $x_1 < x_2$.

On a donc $x_1 < x_2 < 0$ d'où $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ par suite $f(x_1) > f(x_2)$. Ainsi f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$.

Exercice à faire à la maison : Soit $f(x) = x^3$. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Indication : Démontrer d'abord que $a^2 + b^2 > |ab|$ pour tous $a \neq b$. Ainsi on aura :

$$a^2 + b^2 > ab \text{ et } a^2 + b^2 > -ab.$$

c. Remarques

- Ces définitions données ne sont valables que sur un intervalle.
- Pour une fonction croissante sur I , l'inégalité entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ est au sens large donc une fonction croissante sur I peut être constante, soit sur I tout entier, soit sur une partie de I .
- Si une fonction est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I alors elle est croissante (respectivement décroissante) sur I .
- Une fonction peut ne pas être croissante ni décroissante sur un intervalle. Par exemple $f(x) = x^2$ n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$. En effet $-1 < 0$ et $f(-1) > f(0)$ donc f n'est pas croissante ; $1 < 2$ et $f(1) < f(2)$ donc f n'est pas décroissante.

- Attention, une fonction peut avoir la même monotonie sur des intervalles I et J sans être monotone sur $I \cup J$. Par exemple, la fonction $f : f(x) = -\frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$ mais elle n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}^* =] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$. En effet, $-2 < 1$ et $f(-2) > f(1)$ donc f n'est pas croissante ; $-2 < -1$ et $f(-2) < f(-1)$ donc f n'est pas décroissante.

d. Taux de variation ou taux d'accroissement

Définition : Soit f une fonction, I un intervalle tel que $I \subseteq D_f$ et $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \neq x_2$. Le taux de variation ou taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est le réel noté $T_f(x_1, x_2)$ et défini par $T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Propriété :

- $T_f(x_2, x_1) = T_f(x_1, x_2)$.
- f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I si et seulement si pour tout $x_1 \neq x_2 \in I, T_f(x_1, x_2) \geq 0$ (respectivement $T_f(x_1, x_2) > 0$).
- f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x_1 \neq x_2 \in I, T_f(x_1, x_2) \leq 0$ (respectivement $T_f(x_1, x_2) < 0$).
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x_1 \neq x_2 \in I, T_f(x_1, x_2) = 0$.

Exemple : Etudions le sens de variation de f telle que $f(x) = x^2 + 2x$ sur $[0; +\infty[$

$x_1, x_2 \in [0; +\infty[$ tels que $x_1 \neq x_2$,

$$\begin{aligned} T_f(x_1, x_2) &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 + 2x_1 - x_2^2 - 2x_2}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 2 \quad \text{car } x_1 - x_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Or $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + 2 \geq 2 \quad \text{d'où } T_f(x_1, x_2) > 0 \text{ d'où } f \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[$

6. Représentation graphique d'une fonction

a. Définition

Soit f une fonction, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. La courbe représentative (ou représentation graphique) de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ notée C_f est l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ avec $x \in D_f$. Ainsi $C_f = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}; x \in D_f \right\}$.

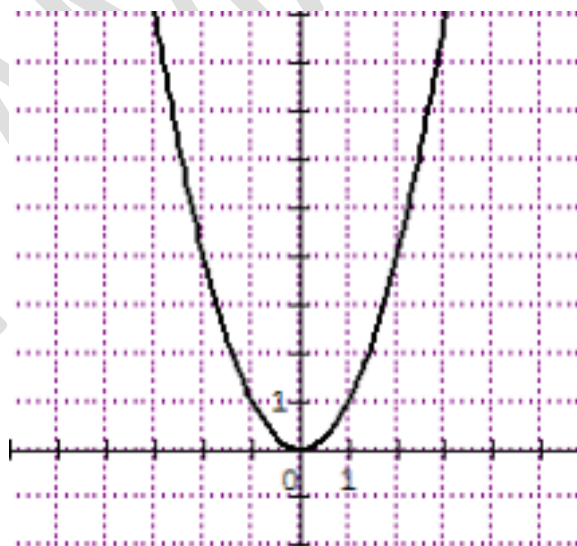
- L'égalité $y = f(x)$ est dite équation de C_f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C_f \Leftrightarrow x \in D_f$ et $y = f(x)$.

b. Exemple

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm, $f(x) = x^2$. Essayons de représenter C_f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour ce, on peut procéder point par point mais cela n'est pas toujours possible car pour la majorité des fonctions, il faut d'abord étudier le sens de variation de la fonction. Nous allons d'abord compléter le tableau de valeurs suivantes :

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

On va maintenant placer dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ du tableau puis nous essayons de les relier par une courbe en allant de la gauche vers la droite mais encore une fois, cette méthode ne fonctionne pas toujours, il faut avoir d'autres connaissances.



c. Propriétés :

Soient C_f et C_g , les courbes de f et g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}$

- Pour trouver l'image $f(x_0)$ de x_0 , il faut tracer la droite verticale d'équation

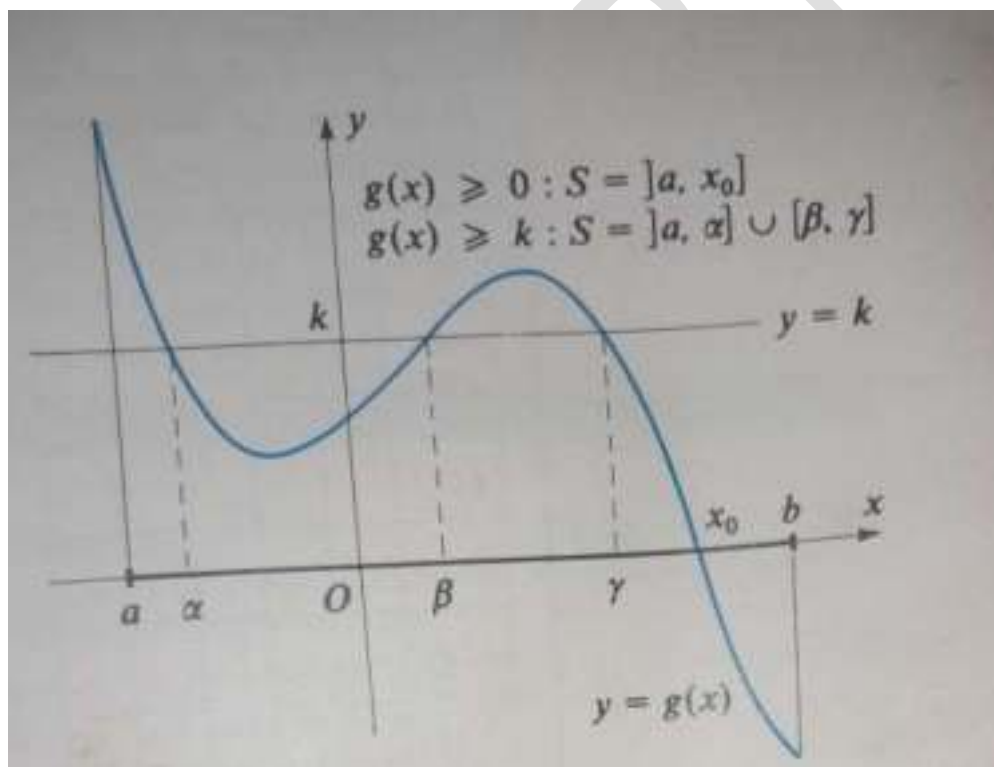
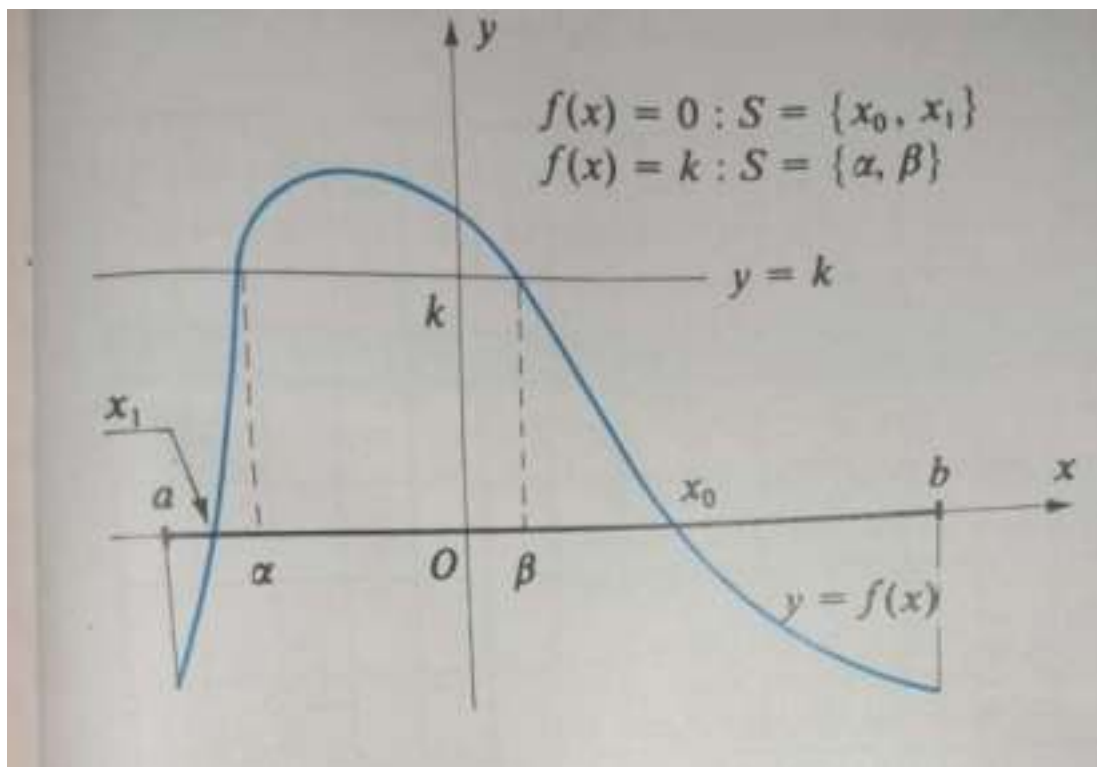
$x = x_0$. Celle-ci coupe C_f en un seul point ou bien ne la coupe pas. Dans le 1^{er} cas, $f(x_0)$ est l'ordonnée de ce point d'intersection et dans le 2nd cas, x_0 n'a pas d'image.

- Pour trouver un antécédent de y_0 par f on trace la droite horizontale d'équation $y = y_0$. Celle-ci coupe C_f en un ou plusieurs points ou bien ne la coupe pas. Dans le cas où elle la coupe, chaque abscisse d'un point d'intersection est un antécédent de y_0 . Dans le cas où elle ne la coupe alors y_0 n'a pas d'antécédent.
- L'ensemble des solutions de l'équation définie dans D_f par $f(x) = 0$ (respectivement $f(x) = k$) est l'ensemble des abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses (respectivement avec la droite horizontale d'équation $y = k$).
- L'ensemble des solutions de l'inéquation définie dans D_f par $f(x) \geq 0$ (respectivement $f(x) \geq k$) est l'ensemble des abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est positive (respectivement supérieure ou égale à k).
- L'ensemble des solutions de l'inéquation définie dans D_f par $f(x) \leq 0$ (respectivement $f(x) \leq k$) est l'ensemble des abscisses des points de C_f dont l'ordonnée est négative (respectivement inférieure ou égale à k).
- L'ensemble des solutions l'équation définie dans $D_f \cap D_g$ par $f(x) = g(x)$ est l'ensemble des abscisses des points d'intersection de C_f et C_g .

Soient $a, b \in D_f$ tel que $a < b$.

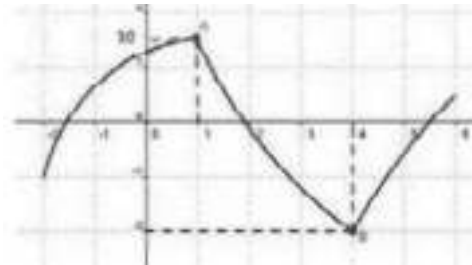
- Si C_f est ascendante (montante) dans $[a; b]$ lorsqu'on la suit de gauche à droite alors f est croissante sur $[a; b]$. Par exemple sur la fonction représentée par la courbe ci-dessous est strictement croissante sur $[a; b]$.
- Si C_f est descendante dans $[a; b]$ lorsqu'on la suit de gauche à droite alors f est décroissante sur $[a; b]$. Par exemple sur la fonction représentée par la courbe ci-dessous est strictement décroissante sur $[a; b]$.

Exemples

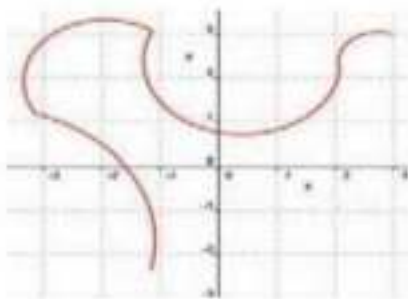


d. Remarque

Une courbe tracée dans un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction dans ce repère si et seulement si toute parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en un point au plus. Par exemple :



Cette courbe ci-dessus représente celle d'une fonction.



Par contre cette courbe ci-dessus n'est pas la courbe d'une fonction.

7. Extrémum d'une fonction

a. Définitions : Soit f une fonction, I un intervalle contenu dans D_f et $a \in I$.

- f admet un maximum relatif (ou local) en a sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. Dans ce cas, $f(a)$ est la valeur de ce maximum.
- f admet un minimum relatif en a sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$. Dans ce cas, $f(a)$ est la valeur de ce minimum.

b. Exemple

Soit $f(x) = x^2 + 2x - 4$. Montrons que f admet un maximum relatif en 2 sur $[-4; 2]$.

c. Remarques

- Si pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$ alors f admet un maximum absolu en a et $f(a)$ est la valeur de ce maximum absolu.
- Si pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$ alors f admet un minimum absolu en a et $f(a)$ est la valeur de ce minimum absolu.

- Un maximum relatif (respectivement maximum absolu) ou un minimum relatif (respectivement minimum absolu) est dit extrémum relatif (respectivement extrémum absolu).

d. Exercice d'application

$f(x) = x^2 + 4x - 1$. Montrer que f admet un extrémum absolu en un réel a à préciser.

8. Parité et périodicité d'une fonction

a. Définition 1

Un ensemble E de nombres réels est dit symétrique par rapport à zéro si pour tout $x \in E$ alors $-x \in E$.

Exemples et contre-exemples

- $\mathbb{R}$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-a; a\}$; $[-a; a]$ et $] -a; a[$ avec $a \geq 0$ sont symétriques par rapport à zéro.
- $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ($a \neq 0$) ; $\mathbb{R} \setminus \{a; b\}$ ($b \neq -a$) ; $[a; +\infty[$; $] -\infty; a[$ ($a \in \mathbb{R}$) ne sont pas symétriques par rapport à zéro.

b. Définition 2

f est dite paire si D_f est symétrique par rapport à zéro et $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Exemples :

- $f(x) = x^2$. Montrons que f est paire.

$$D_f = \mathbb{R}$$

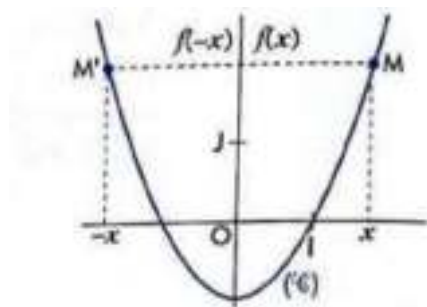
Si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ donc D_f est symétrique par rapport à zéro.

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x). \text{ Par suite } f \text{ est paire.}$$

- Les fonctions valeur absolue et cosinus sont paires.

Interprétation graphique

f est paire si et seulement si C_f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Par exemple, la fonction dont la courbe est représentée ci-dessous est paire.



c. Définition 3

f est dite impaire si D_f est symétrique par rapport à zéro et $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Exemples

- $f(x) = x^3$. Montrons que f est impaire.

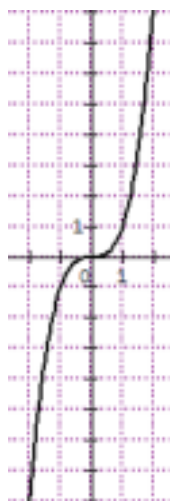
$D_f = \mathbb{R}$ donc D_f est symétrique par rapport à zéro

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Par suite f est impaire.

- Les fonctions sinus et tangente sont impaires.

Interprétation graphique

f est impaire si et seulement si C_f admet O comme centre de symétrie dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Par exemple, la fonction dont la courbe est représentée ci-dessous est impaire.



Remarques

- Il existe des fonctions qui ne sont ni paire ni impaire. C'est le cas d'une fonction f dont l'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à zéro.
- Si f est paire ou impaire alors on peut restreindre son domaine d'étude à $D_f \cap [0; +\infty[$.

d. Définition 4 :

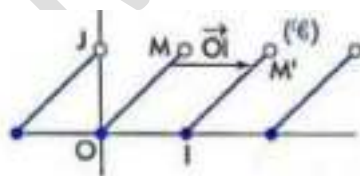
- f est périodique s'il existe $p \neq 0$ tel que pour tout $x \in D_f$, $x + p \in D_f$ et $f(x + p) = f(x)$. On dit que p est une période de f ou bien que f est p -périodique.
- La période de f est le plus petit réel strictement positif, s'il existe et vérifiant la propriété ci-dessus.

Exemples :

- Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .
- La fonction tangente est périodique de période π .
- Si $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ alors la période des fonctions $x \mapsto \cos(ax + b)$ et $x \mapsto \sin(ax + b)$ est $\frac{2\pi}{|a|}$ et la période de la fonction $x \mapsto \tan(ax + b)$ est $\frac{\pi}{|a|}$.

Interprétation graphique

f est périodique de période p si et seulement si C_f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est globalement invariante par la translation de vecteur $p\vec{i}$. Par exemple, la fonction dont la courbe est représentée ci-dessous est périodique de période 1.



Remarques :

- Si p est une période de f alors kp est une période de f pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$.
- Si f est périodique de période $p > 0$ alors on peut restreindre son domaine d'étude à $D_f \cap I$ où I est un intervalle de longueur p .
- Si f est périodique de période $p > 0$ et paire ou périodique de période p et impaire alors on peut restreindre son domaine d'étude à $D_f \cap [-a; a] \cap [0; +\infty[$ où $[-a; a]$ est un intervalle de longueur p .

II. Image directe-image réciproque d'un ensemble

1. Définitions

Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction, A une partie de E et B une partie de F .

- L'image directe de A par f est la partie de F notée $f(A)$ constituée des images par f de tous les éléments de A . Ainsi $f(A) = \{f(x); x \in A\}$.
- L'image de f est l'image directe de E c'est-à-dire $f(E)$.
- L'image réciproque de B par f est la partie de E notée $f^{-1}(B)$ constituée des antécédents des éléments de B . Ainsi $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

2. Propriétés

Soit C_f la courbe d'une fonction dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $a, b \in D_f$.

- Pour déterminer graphiquement l'image directe $f([a; b])$ de $[a; b]$, on trace les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$. Celles-ci coupent C_f en 2 points A et B . Dans ce cas, $f([a; b])$ est l'intervalle dont les bornes sont y_A et y_B .
- Pour déterminer l'image réciproque $f^{-1}([a; b])$ de $[a; b]$, on trace les droites horizontales d'équation $y = a$ et $y = b$. Celles-ci coupent éventuellement sur C_f un ou plusieurs « morceau(x) ». Pour chaque morceau, on prend l'abscisse du point le plus à gauche et l'abscisse du point le plus à droite pour former un intervalle. $f^{-1}([a; b])$ est la réunion de ces intervalles.

3. Exercice d'application

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f .



1. Déterminer graphiquement $f([0; 1])$.

2. Déterminer graphiquement $f^{-1}([-4; 2])$.

III. Comparaison de deux fonctions numériques

1. Définitions

Soient f et g des fonctions et I un intervalle.

- f et g sont égales et on note $f = g$ si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée, $D_f = D_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_f = D_g$.
- f et g sont égales sur une partie D de $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$. Dans ce cas, C_f et C_g sont confondues sur D .
- f est inférieure à g ($f \leq g$) sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$. Dans ce cas, C_f est en dessous de C_g sur I .
- f est positive $f \geq 0$ (respectivement négative ($f \leq 0$)) sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$ (respectivement $f(x) \leq 0$). Dans ce cas C_f est au-dessus (respectivement en dessous) de l'axe des abscisses sur I .
- f est minorée sur I s'il existe un réel constant m tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$. Dans ce cas m est dit minorant de f sur I (ou bien f est minorée par m sur I).
- f est majorée sur I s'il existe un réel constant M tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. Dans ce cas M est dit majorant de f sur I (ou bien f est majorée par M sur I).
- f est bornée sur I si elle est à la fois minorée et majorée sur I c'est-à-dire s'il existe des réels constants m et M tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f(x) \leq M$.

2. Exemples

- $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$ et $g(x) = |x-1|$. f et g ont même ensemble de départ et d'arrivée ($\mathbb{R}$). $f(x)$ existe $(x-1)^2 \geq 0$ or $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ d'où $D_f = \mathbb{R}$.
 $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_f = D_g$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = g(x)$ d'où $f = g$.
- $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-1}$ et $g(x) = x-4$. $f \neq g$ car $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$. Cependant sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f = g$ car pour tout $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2-5x+4}{x-1} = \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = x-4 = g(x)$.
- $f(x) = x^2 + 3$. f est minorée sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 3$.
- $f(x) = 1 - x^2$ est majorée sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$.
- $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$.

Remarque : Pour deux fonctions f et g , il peut arriver qu'on ne puisse pas les comparer sur un intervalle I .

3. Propriété

Si f est monotone sur $[a; b]$ alors f est bornée sur $[a; b]$.

Preuve :

1^{er} cas : f est croissante $[a; b]$.

$x \in [a; b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ donc f est bornée sur $[a; b]$.

2^{ème} cas : f est décroissante sur $[a; b]$.

$x \in [a; b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ donc f est bornée sur $[a; b]$.

IV. Opérations sur les fonctions et composition de fonctions

1. Opérations sur les fonctions

a. Définitions

Soient $f : E \rightarrow F$, $g : E \rightarrow F$ des fonctions, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- La somme de f et g est la fonction notée $f + g$ définie de E vers F par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in E$.
- La différence de f et g dans cet ordre est la fonction notée $f - g$ définie de E vers F par $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ pour tout $x \in E$.
- Le produit de f par g est la fonction notée fg définie de E vers F par $(fg)(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \in E$.
- Le produit de α par f est la fonction notée αf définie de E vers F par $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ pour tout $x \in E$.
- La puissance $n^{\text{ième}}$ de f est la fonction notée f^n définie de E vers F par $f^n(x) = [f(x)]^n$ pour tout $x \in E$.
- Le quotient de f par g est la fonction notée $\frac{f}{g}$ définie de E vers F par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in E$.

b. Propriétés : Soient f, g des fonctions, k et α des réels constants non nuls et I un intervalle.

- Si f est monotone sur I alors $f + k$ est monotone sur I et a le même sens de variation que f sur I .
- Si f et g sont croissantes (respectivement décroissantes) sur I alors $f + g$ est croissante (respectivement décroissante) sur I .
- Si f est monotone sur I et $\alpha > 0$ alors αf est monotone sur I a le même sens de variation que f sur I .
- Si f est monotone sur I et $\alpha < 0$ alors αf est monotone sur I a un sens de variation inverse à celui de f sur I .

2. Composée de 2 fonctions

a. Définitions

- Si $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ des fonctions. La composée de f par g est la fonction notée $g \circ f$ (on lit g rond f) et définie de E vers G par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ pour tout $x \in E$.
- Si $f: E \rightarrow F$ et $g: G \rightarrow E$ des fonctions. La composée de g par f est la fonction notée $f \circ g$ et définie de G vers F par $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ pour tout $x \in G$.

b. Propriétés

- Si f et g sont deux fonctions alors $(g \circ f)(x)$ existe ssi $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.
- Si f et g sont deux fonctions alors $(f \circ g)(x)$ existe ssi $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$.

Exemple

Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Sans calculer $(g \circ f)(x)$, déterminons $D_{g \circ f}$

c. Remarque

En général $f \circ g \neq g \circ f$.

d. Propriétés

Soient $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$, I un intervalle contenu dans E et J un intervalle contenu F tels que $f(I) \subset J$.

- Si f est croissante sur I et g est croissante sur J alors $g \circ f$ est croissante sur I .
- Si f est décroissante sur I et g est décroissante sur J alors $g \circ f$ est croissante sur I .
- Si f est croissante sur I et g est décroissante sur J alors $g \circ f$ est décroissante sur I .
- Si f est décroissante sur I et g est croissante sur J alors $g \circ f$ est décroissante sur I .

V. Fonctions associées

Soit f une fonction, C_f sa courbe dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a et b des réels constants. Les fonctions g, h, k, l, m et n définies respectivement par $g(x) = -f(x)$; $h(x) = f(-x)$; $k(x) = -f(-x)$; $l(x) = |f(x)|$; $m(x) = f(|x|)$; $n(x) = f(x - a) + b$ sont dites fonctions associées à f .

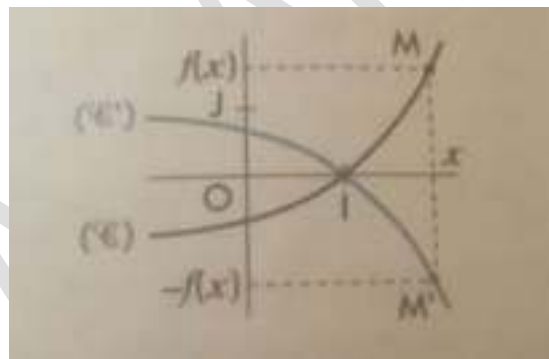
L'objectif de cette partie est de voir comment obtenir les courbes C_g, C_h, C_k, C_l, C_m et C_n dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ à partir de C_f .

1. Théorème 1

- Si $g(x) = -f(x)$ alors C_g se déduit de C_f par la symétrie d'axe (Ox) .
- Si $h(x) = f(-x)$ alors C_h se déduit de C_f par la symétrie d'axe (Oy) .
- Si $k(x) = -f(-x)$ alors C_k se déduit de C_f par la symétrie centrale de centre O .

Exemple

La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Construisons C_g telle que $g(x) = -f(x)$.

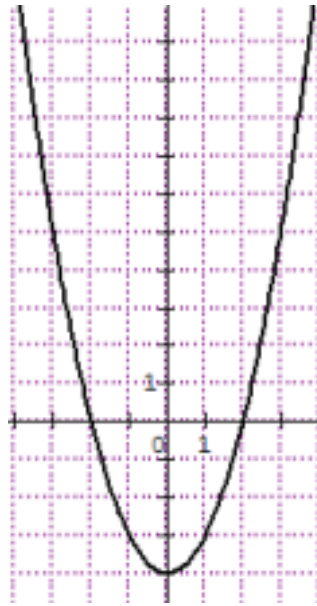


2. Théorème 2

- Si $l(x) = |f(x)|$, (C') la partie de C_f située au-dessus de (Ox) et (C'') le symétrique par rapport à (Ox) de la partie de C_f située en dessous de (Ox) alors $C_l = (C') \cup (C'')$.
- Si $m(x) = f(|x|)$, (C_1) la partie de C_f située à droite de l'axe (Oy) et (C_1') le symétrique par rapport à (Oy) de (C_1) alors $C_m = (C_1) \cup (C_1')$.

Exemple

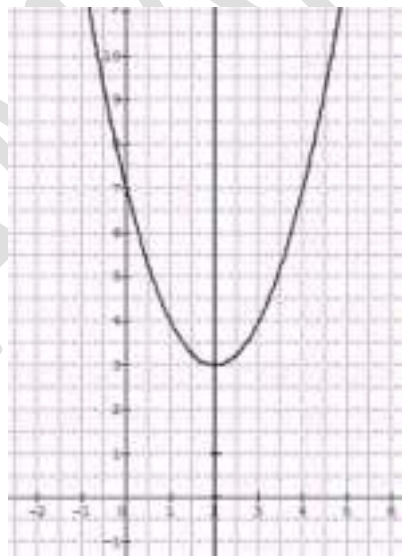
La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Construisons celle de la fonction l définie par $l(x) = |f(x)|$.



3. Théorème 3

Si $n(x) = f(x - a) + b$ alors C_n se déduit de C_f par la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$.

Exemple : La courbe C_f ci-dessous est celle d'une fonction f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Construisons celle de la fonction n définie par $n(x) = f(x - 2) + 1$



Chapitre 9 : Limite et continuité

Durée : 12h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Calculer en x_0 (pouvant être fini ou non) la limite d'une fonction.
- ✓ Etudier la continuité à droite et à gauche en un point x_0 .

- ✓ Déterminer le prolongement par continuité d'une fonction en un point x_0 .
- ✓ Justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle.
- ✓ Justifier qu'un réel appartenant à $[m; M]$ admet un antécédent par une fonction continue dans $[a; b]$.

Prérequis :

- ✓ Fonctions numériques d'une variable réelle.

Supports didactiques : ;

- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue.
- ✓ C.I.A.M 1^{ère} SM.
- ✓ Collection Spirale 1^{ère} SE.
- ✓ Livre de M. Saloly Ba de TS2.
- ✓ Mes cours de 1^{ère} S2 aux lycées Kennedy et Ndongol.

Plan de la leçon

I. Limite d'une fonction

1. Limite finie

- a. Activité
- b. Définition intuitive et notation
- c. Remarques
- d. Théorème

2. Limites infinies

- a. Limite à gauche-limite à droite
- b. Propriété
- c. Asymptote verticale

3. Limites d'une fonction à l'infini

- a. Limites infinies
- b. Limite finie

4. Opérations sur les limites

- a. Limites d'une somme
- b. Limites d'un produit
- c. Limites d'un quotient
- d. Théorèmes

e. Limite d'une composée

5. Ordres et limites

a. Comparaison de limites

b. Majoration et minoration

c. Théorèmes des gendarmes

II. Continuité d'une fonction

1. Continuité d'une fonction en un point

a. Définition

b. Exemples

c. Remarques

2. Continuité à droite-continuité à gauche en un point

a. Définitions

b. Théorème (admis)

3. Prolongement par continuité d'une fonction en un point.

a. Théorème et définition

b. Exemple

4. Continuité d'une fonction sur un intervalle

a. Définition

b. Continuité de fonctions usuelles

c. Opérations sur les fonctions continues

d. Théorèmes admis

Théorème 1

Théorème 2

Théorème 3

Théorème 4

Déroulement du cours

NB : Dans tout le cours les fonctions considérées sont des fonctions numériques d'une variable réelle.

I. Limite d'une fonction

1. Limite finie

a. Activité

Soit f telle que $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$. Soit le tableau suivant :

x	0,999	0,9999	0,99999	1,000001	1,00001	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$								

- 1) Préciser D_f .
- 2) Compléter le tableau ci-dessus.
- 3) Quelle conclusion peut-on tirer de ce tableau ?

Solution

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- 2.

x	0,999	0,9999	0,99999	1,000001	1,00001	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	2,999	2,9999	2,99999	3,000001	3,00001	3,0001	3,001	3,01

3. Nous constatons que f n'est pas définie en 1 mais quand les valeurs de x « s'approchent » de 1 en restant dans D_f (c'est-à-dire en restant différentes de 1), alors les valeurs de $f(x)$ semblent s'approcher de 3. Pour traduire ce fait, on dit que la fonction f a pour limite 3 en 1 et on note $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ ou $\lim_1 f = 3$.

b. Définition intuitive et notation

Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant un point (réel) a (sauf peut-être en a). Quand x prend des valeurs de plus en plus proches de a (en étant différentes de a), si les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus proches d'un réel l alors on dit f a pour limite l en a et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ou $\lim_a f = l$. On lit « limite de $f(x)$ quand x tend vers a égale à l ».

c. Remarques

- Si f a une limite alors celle-ci est unique.
- On ne peut pas parler de limite de f en a si f n'est pas définie sur un intervalle contenant a (sauf peut-être en a).
- Dire que x tend vers a signifie que les valeurs de x peuvent s'approcher de a aussi près qu'on le veut sans jamais atteindre a mais en restant dans D_f .
- On ne peut pas à chaque fois faire un tableau donc nous allons donner des résultats et des méthodes pour déterminer des limites.

d. Théorème

- $\lim_{x \rightarrow a} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0.$
- Si k est un réel constant alors $\lim_{x \rightarrow a} k = k.$
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0.$

Exemples

- $\lim_{x \rightarrow -1} 2x^3 - 3x^2 - x + 7 = 2(-1) - 3 + 1 + 7 = 3.$
- $\lim_{x \rightarrow -2} 7 = 7$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2023} = 0$

2. Limites infinies

a. Limite à gauche-limite à droite

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Examinons le tableau suivant :

x	1,99	1,999	1,9999	1,99999	2,01	2,001	2,0001	2,00001
$f(x)$	-299	-2999	-29999	-299999	301	3001	30001	300001

On constate que les valeurs de x s'approchent de 2 en restant dans D_f et celles de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes en valeurs absolues. On dit qu'elles deviennent infinies. On constate aussi que pour certaines valeurs de x , $f(x)$ est positif et pour d'autres $f(x)$ est négatif.

Pour $x = 2$ le numérateur $x + 1$ de $f(x)$ vaut 3 donc est positif et le dénominateur $x - 2$ de $f(x)$ s'annule donc le changement de signe est dû au dénominateur.

On voit que pour les valeurs de x inférieures à 2, les valeurs de $f(x)$ sont négatives. Cela est dû au fait que le numérateur de $f(x)$ est positif et son dénominateur est négatif.

Lorsque les valeurs de x s'approchent de 2 en étant inférieures à 2 alors on dit que l'on cherche la limite de f en 2 à gauche.

Lorsque les valeurs de x s'approchent de 2 en étant supérieures à 2 alors on dit que l'on cherche la limite de f en 2 à droite.

Pour chercher une telle limite, on étudie le signe du dénominateur car celui du numérateur est déjà connu.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	$-$	0	$+$

A gauche de 2, on peut écrire $\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0^-$

$$x < 2$$

On lit « limite quand x tend vers 2 moins ou 2 à gauche est égale à 0 moins ». Les deux notations sont valables mais il faut noter qu'il n'y a aucun lien entre le signe $-$ sur 2 et celui sur 0. Le signe $-$ sur 2 traduit le fait que x est à gauche de 2 c'est-à-dire inférieur à 2 et celui sur 0 traduit que la valeur de $x - 2$ est négatif. En résumé, on a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

On procède de même pour la limite en 2 à droite et on obtient.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

On admet que f n'a pas de limite au point 2 car sa limite en 2 à gauche est différente de celle en 2 à droite.

b. Propriétés admises : Soit a un point et l un réel ou $l = \pm\infty$

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ alors f n'a pas de limite en a .
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et pair alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$ et impair alors $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \end{cases}$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ n'a pas de limite en 0.

c. Asymptote verticale : Soit a un point.

Définition : La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f dans un repère orthonormé si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

Exemple : Pour $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, on a $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à C_f dans un repère orthonormé.

3. Limites d'une fonction à l'infini

a. Limites infinies

Soit $f(x) = x^2$. On a le tableau suivant

x	1 000	1 0000	1 00000	1 000000
$f(x)$	1 000 000	1 0000 0000	1 00000 00000	1 000000 000000

En examinant ce tableau, on constate que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes alors celles de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit $f(x) = -x^3$. On a le tableau suivant

x	-10	-100	-1 000	-1 0000
$f(x)$	1 000	1 00 00 00	1 000 000 000	1 0000 0000 0000

En examinant ce tableau, on constate que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues mais en étant négatives alors celles de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Définitions intuitives

- Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes (respectivement en valeurs absolues mais en étant négatives), si les valeurs de $f(x)$ deviennent :
 - ✓ de plus en plus grandes alors on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$).
 - ✓ de plus en plus grandes en valeurs absolues mais en étant négatives alors on dit f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (respectivement f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Exemples

- ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2023} = +\infty$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2022} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2023} = -\infty$

b. Limite finie

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. On a le tableau suivant :

x	-1 000	-1 0000	-1 00000	1 000	1 0000	1 00000
$f(x)$	-0,001	-0,0001	-0,00001	0,001	0,0001	0,00001

En examinant les 3 premières colonnes du tableau, on constate que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeurs absolues mais en étant négatives alors celles de $f(x)$ deviennent de plus en plus proches de 0. On dit que f a pour limite 0 en $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

En examinant les 3 dernières colonnes du tableau, on constate que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes alors celles de $f(x)$ deviennent de plus en plus proches de 0. On dit que f a pour limite 0 en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Définition intuitive

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes (respectivement en valeurs absolues mais en étant négatives), si les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus proches d'un réel l alors on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (respectivement f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$).

Propriété

Si n est un entier naturel non nul alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$ dans un repère orthonormé lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$.

Par exemple pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation

$y = 0$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans un repère orthonormé.

Remarques

- x tend vers $+\infty$ signifie que x prend une valeur supérieure à tout nombre que l'on peut imaginer tandis que x tend vers $-\infty$ signifie que x prend une valeur inférieure à tout nombre que l'on peut imaginer.
- Certaines fonctions n'admettent pas de limites en $+\infty$ et en $-\infty$. C'est le cas des fonctions cosinus, sinus, tangente et de la fonction mantisse ($f(x) = x - E(x)$).

4. Opérations sur les limites

Dans les tableaux suivants, f et g sont des fonctions, $l, l' \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$.

a. Limite d'une somme

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$, on peut d'abord calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ puis utiliser les résultats du tableau ci-dessous.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Remarque : On dit qu'on a une forme indéterminée si on ne peut avoir immédiatement le résultat. Dans ce cas, pour chercher la limite, on transformera l'écriture de l'expression de la fonction et on dit qu'on cherche à lever l'indétermination.

Exemples

Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \frac{1}{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} + x^2 + x - 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + \frac{1}{x^3} = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x - 2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} + x^2 + x - 2 = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{on a une forme indéterminée. On verra dans la suite comment lever}$$

l'indétermination pour avoir cette limite.

b. Limites d'un produit

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$, on peut d'abord calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ puis utiliser les résultats du tableau ci-dessous.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Exemples : Calculons les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x}\right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

Pour $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, on a avait trouvé une forme indéterminée plus haut. On va donc lever l'indétermination.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \frac{1}{x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

Corollaire : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = l^n$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ alors $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

c. Limites d'un quotient

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, on peut d'abord calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ puis utiliser les résultats des tableaux ci-dessous.

▪ Cas où $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

▪ Cas où $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

Dans le cas où $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, on étudie le signe de $g(x)$ puis on calculera éventuellement les limites de $g(x)$ en a à gauche et à droite et enfin celles de $f(x)$ en a à gauche et à droite.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l > 0 \text{ ou } +\infty$	$l > 0 \text{ ou } +\infty$	$l < 0 \text{ ou } -\infty$	$l < 0 \text{ ou } -\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

Exemples : Calculons les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2+x-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2} = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} x - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x^2+x-2} = \infty$$

On va étudier le signe de $x^2 + x - 2$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	+		-		+

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x - 2 = 0^- \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x - 2 = 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x^2+x-2} = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x^2+x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x^2+x-2} \text{ donc } x \mapsto \frac{x-2}{x^2+x-2} \text{ n'a pas de limite en } 1.$$

d. Théorèmes

Théorème 1 : La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme le plus haut degré.

Exemples

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 - 3x^2 - x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^3 = -\infty$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 - 3x^2 - x + 7 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 = +\infty$$

Théorème 2 : La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Exemple

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

e. Limite d'une composée

Théorème : Soient f et g des fonctions, a , b et l désignent des réels ou $\pm\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l$.

NB : Ce théorème est hors programme.

Exemple : On admet que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (une limite à connaître)

Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x-4)}{2x-4}$

On pose $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. On a donc $\frac{\sin(2x-4)}{2x-4} = (g \circ f)(x)$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} (g \circ f)(x) = 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x-4)}{2x-4} = 1$.

Dans la pratique, pour calculer cette limite, on pose $X = 2x - 4$ et on procède comme suit :

Si $x \rightarrow 2$ alors $X = 2x - 4 \rightarrow 0$; ainsi $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x-4)}{2x-4} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$. On dit qu'on a calculé la limite en procédant par changement de variable.

Corollaire

Le théorème ci-dessus permet d'obtenir les tableaux des limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \geq 0$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)}$	$\sqrt{l}$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) $	$ l $	$+\infty$

Exemples : Calculons $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x^3 + x - 3|$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x+5}{x-1}}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + x - 3 = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x^3 + x - 3| = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{x-1} = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x+5}{x-1}} = \sqrt{2}$

5. Ordres et limites

a. Comparaison de limites

Théorème : Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l'$ où $l, l' \in \mathbb{R}$.

S'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]A; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ alors $l \leq l'$.

Remarque :

On a un résultat analogue :

- Lorsque x tend vers $-\infty$ en remplaçant $]A; +\infty[$ par $]-\infty; A[$.
- Lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ (éventuellement par valeurs inférieures ou supérieures) en remplaçant $]A; +\infty[$ par un intervalle ouvert de centre a (éventuellement par $]b; a[$ ou $]a; b[$)

b. Majoration et minoration : Soit f une fonction

- S'il existe une fonction g et un réel A tels que pour tout $x \in]A; +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- S'il existe une fonction h et un réel A tels que pour tout $x \in]A; +\infty[$, $f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque : On a un résultat analogue lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application

$$f(x) = x + \sin x$$

1. Montrer que $f(x) \geq x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f(x) \leq x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c. Théorèmes des gendarmes : Soit f une fonction

Théorème : S'il existe des fonctions g et h et un réel A tels que pour tout $x \in]A; +\infty[$,

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ (ou $\pm \infty$) alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (ou $\pm \infty$). Ce résultat est dit théorème des gendarmes.

Exercice d'application : $f(x) = \frac{1}{1+E(x)}$

1. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Autre version du théorème des gendarmes

S'il existe une fonction g , des réels A et l tels que pour tout $x \in]A; +\infty[$, $|f(x) - l| \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Remarque : Le théorème des gendarmes est valable lorsque x tend vers $-\infty$ ou lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$.

II. Continuité d'une fonction

1. Continuité d'une fonction en un point

a. Définition

Une fonction f est continue en un point a si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- ✓ $f(a)$ existe (c'est à dire $a \in D_f$) ;
- ✓ f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

b. Exemples

- Si f est une fonction polynôme et a un point alors f est continue en a . En effet :
 $a \in D_f = \mathbb{R}$, f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- Montrons que la fonction f telle que $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ est continue en 2.
 $f(x) = 4$ si $x = 2$ signifie que $f(2) = 4$. Etudions maintenant la limite de f en 2.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{on a une forme indéterminée.}$$

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4. \text{ Ainsi } f \text{ admet une limite en 2 et } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ d'où } f \text{ est continue en 2.}$$

Exercice à faire à la maison : Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a indiqué

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} & \text{si } x \neq 9 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 9 \end{cases} ; a=9 \text{ et } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x+3} & \text{si } x \neq -3 \\ 1 & \text{si } x = -3 \end{cases} ; a = -3$$

c. Remarque

f n'est pas continue en a dans chacun des cas suivants :

- ✓ Si $a \notin D_f$ c'est à dire si $f(a)$ n'existe pas.

- ✓ Si $a \in D_f$ et f n'a pas de limite en a .
- ✓ Si $a \in D_f$, f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

2. Continuité à droite-continuité à gauche en un point

a. Définitions

f est continue à droite (respectivement à gauche) en a si toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

- ✓ $f(a)$ existe.
- ✓ f admet une limite à droite (respectivement à gauche) en a et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
(respectivement $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$)

Exemple : Soit f telle que : $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ 3 - x & \text{si } x > 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$. Montrons que f est continue à droite et à gauche en 3.

$$f(3) = 0.$$

Etudions la limite de f à droite en 3. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 3 - x = 0$ d'où f admet une limite à droite en 3 et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$. Par suite f est continue à droite en 3.

Etudions la limite de f à gauche en 3. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x - 3 = 0$ d'où f admet une limite à gauche en 3 et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$. Par suite f est continue à gauche en 3.

b. Théorème

f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a .

Exercice d'application :

- Soit f telle que : $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 3 \\ 3 - x & \text{si } x > 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$. Etudier la continuité de f en 3.

On sait déjà que f est continue à droite et à gauche en 3 donc f est continue en 3.

- Soit m telle que $m(x) = x - E(x)$ où $E(x)$ est la partie entière de x . La fonction m est dite fonction mantisse. Etudier la continuité de m en 0.

$$m(0) = 0 - E(0) = 0.$$

On peut se placer sur $[-1, 0[$. On a donc $E(x) = -1$ donc $m(x) = x + 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) = 1$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) \neq m(0)$ donc m n'est pas continue à gauche en 0. Par suite m n'est pas continue en 0.

3. Prolongement par continuité d'une fonction en un point.

a. **Théorème et définition :** Soit f une fonction, a et l des réels.

Si $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors f admet un prolongement par continuité en a et ce

prolongement est la fonction que l'on peut noter g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$

Exemple : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Montrons que f admet un prolongement par continuité en 1 puis déterminons le.

$$D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$1 \notin D_f ; \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{on a une forme indéterminée.}$$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$. Ainsi f admet un prolongement par continuité en 1. Ce prolongement par

continuité est la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x \in [0; 1[\cup]1; +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

4. Continuité d'une fonction sur un intervalle

a. **Définition :** Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

f est continue sur I si f est continue en tout point a appartenant à I .

b. Continuité de fonctions usuelles

Le tableau suivant donne des fonctions usuelles et les intervalles sur lesquels elles sont continues.

Fonctions usuelles f	Intervalles sur lesquels f est continue
$f(x) = c$ où c est un réel constant	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ avec a, b des réels constants	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n} ; n \in \mathbb{N}^*$	$] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$
$f(x) = x $	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$

c. Opérations sur les fonctions continues

Théorème : Soient u et v des fonctions et I un intervalle.

- Si u et v sont continues sur I alors les fonctions f, g et h telles que $f(x) = u(x) + v(x)$; $g(x) = u(x) - v(x)$ et $h(x) = u(x) \times v(x)$ sont continues sur I .
- Si u et v sont continues sur I et pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$ alors la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ est continue sur I .

Exercice d'application : Montrer que chacune des fonctions suivantes est continue sur I

✓ $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 1 ; I = [0; +\infty[$

✓ $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1} ; I = \mathbb{R}$

Solution

- $f(x) = u(x) + v(x)$; $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 2x - 1$.

u est continue sur $[0; +\infty[$ et v est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; +\infty[$ par suite $f = u + v$ est continue sur $[0; +\infty[$.

- $g(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$; $u(x) = |x|$ et $v(x) = x^2 + 1$

u est continue sur $\mathbb{R}$. (1)

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto v(x) = x^2 + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. (2)

De plus $v(x) = x^2 + 1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (3)

(1), (2) et (3) $\Rightarrow f = \frac{u}{v}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Continuité de la composée de deux fonctions

Soient u et v des fonctions numériques, a un réel et I un intervalle.

Théorème

- Si u est continue en a et v continue en $u(a)$ alors $v \circ u$ est continue en a .
- Si u est continue sur I et v est continue sur un intervalle J tel que $u(x) \in J$ pour tout x appartenant à I alors $v \circ u$ est continue sur I .

NB : Ce théorème est hors programme.

Corollaire

- Si u est continue sur I alors la fonction f définie par $f(x) = |u(x)|$ est continue sur I .
- Si u est continue sur I et $u(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ alors la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est continue sur I .

Exercice à faire

Justifier que f est continue sur l'intervalle I : $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 6}$; $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

d. Théorèmes admis

Théorème 1

- Si f est une fonction polynôme alors f est continue sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Si f est une fraction rationnelle alors f est continue sur tout intervalle I contenu dans D_f (c'est-à-dire I ne contient aucune racine du dénominateur de f).

Théorème 2

Si f est continue sur un intervalle I alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est aussi un intervalle. De plus si I est un intervalle fermé borné alors $f(I)$ est aussi un intervalle fermé borné.

Théorème 3 :

Si f est continue sur $[a; b]$ alors tout nombre réel m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent $\alpha \in [a; b]$ autrement dit l'équation $f(x) = m$ d'inconnue x admet au moins une solution $\alpha \in [a; b]$. Ce théorème est dit **théorème des valeurs intermédiaires**.

Corollaire :

- Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [a; b]$.
- Si f est continue sur un intervalle I et pour tout $x \in I, f(x) \neq 0$ alors f garde un signe constant sur I .

Exercices d'application

Exercice 1

1. Montrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.
2. Donner un encadrement à 10^{-1} près d'une solution de l'équation.
3. En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation.

Solution

1. Posons $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$. Donc l'équation devient $f(x) = 0$.
 f est une fonction polynôme donc f continue sur $[1; 2]$; $f(1) = -2$ et $f(2) = 3$. Par suite $f(1) \times f(2) \leq 0$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1; 2]$.
2. Trouver un encadrement à 10^{-1} près consiste à trouver un encadrement entre deux nombres décimaux d'ordre 1 (c'est-à-dire à un chiffre après la virgule) consécutifs. Comme on a trouvé au moins une solution dans $[1; 2]$, on va balayer l'intervalle $[1; 2]$ avec des nombres décimaux à un chiffre après la virgule.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	-2	-1,968	-1,864	-1,676	-1,392	-1	-0,488	0,156			3

Ainsi $f(1,6) \times f(1,7) \leq 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[1,6; 1,7]$ et on a : $1,7 - 1,6 = 0,1 = 10^{-1}$. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode par balayage.

3. Comme on a au moins une solution dans $[1,6; 1,7]$ alors toute valeur $x \in [1,6; 1,7]$ est une valeur approchée 10^{-1} près d'une solution de $f(x) = 0$. En effet, si α est une solution dans

$[1,6; 1,7]$ et $x \in [1,6; 1,7]$ alors $\begin{cases} 1,6 \leq \alpha \leq 1,7 \\ -1,7 \leq -x \leq -1,6 \end{cases}$ d'où $-0,1 \leq \alpha - x \leq 0,1$ d'où $|\alpha - x| \leq 10^{-1}$.

Exercice 2 : Etudier le signe de $\cos x$ sur $[0; 2\pi]$.

Théorème 4

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$. Par conséquent tout $y \in f(I)$ admet un unique antécédent par f dans I autrement dit pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I .

NB : Ce théorème est hors programme.

Chapitre 10 : DERIVATION

Durée : 8h

Objectifs spécifiques :

- ✓ Calculer, pour une fonction f en un point x_0 (fini) donné :
 - le nombre dérivé.
 - le nombre dérivé à droite et le nombre dérivé à gauche.
- ✓ Déterminer une équation de la tangente ou de la demi-tangente au point $M_0 \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{smallmatrix} \right)$ à la courbe de f .
- ✓ Déterminer la fonction dérivée :
 - d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions usuelles.
 - De la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ où f est une fonction dérivable.
- ✓ Etudier la dérivabilité de $x \mapsto |f(x)|$, f étant une fonction dérivable.
- ✓ Utiliser la fonction dérivée pour :
 - étudier les variations d'une fonction.
 - pour déterminer des extrémums.

Prérequis :

- ✓ Limites
- ✓ Continuité

Supports didactiques : ;

- ✓ C.I.A.M 1^{ère} SM et 1^{ère} SE
- ✓ Collection Spirale 1^{ère} SE ;
- ✓ Document de Faye-Ka-Mbengue ;
- ✓ Livre de Saloly TS2 ;
- ✓ Mon cours 1^{ère} S2 au lycée Ndongol et Kennedy

Plan de la leçon

- I. Fonction dérivable en un point
 - 1. Définition
 - 2. Exemple et contre-exemple
 - 3. Théorème admis
 - 4. Interprétation géométrique du nombre dérivé
 - 5. Nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite
 - a. Dérivabilité à gauche
 - b. Dérivabilité à droite
 - c. Théorèmes
- II. Fonction dérivée
 - 1. Dérivabilité sur un intervalle
 - 2. Fonction dérivée
 - 3. Dérivées des fonctions élémentaires
 - 4. Opérations sur les fonctions dérivées
- III. Applications de la dérivation
 - 1. Dérivée et sens de variation d'une fonction
 - 2. Dérivée et extrémum
 - 3. Dérivée et bijection
 - 4. Approximation d'une fonction par une fonction affine.

Déroulement de la leçon

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle x définie sur un intervalle ouvert I et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- I. Fonction dérivable en un point
 - 1. Définition

f est dite dérivable en un réel a de l'intervalle I si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est égale à un nombre réel. Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$. On lit : « f prime de a » et on peut écrire $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

2. Exemple et contre-exemple

a. Exemple

Soit f telle que $f(x) = x^2$. Etudions la dérivabilité de f en 1.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe et est égale à 2 d'où f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 est $f'(1) = 2$.

b. Contre-exemple

Soit f telle que $f(x) = |x|$. Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$f(0) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} . \text{ Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

n'existe pas donc f n'est pas dérivable en 0.

3. Théorème (admis)

Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

a. Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse c'est-à-dire qu'une fonction continue en a n'est pas nécessairement dérivable en a . Par exemple la fonction f telle que $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

b. Conséquence du théorème

Si f n'est pas continue en a alors f n'est pas dérivable en a . Cette propriété est dite contraposée du théorème admis ci-dessus.

Exercice d'application

Soit g la fonction telle que $g(x) = \begin{cases} \frac{2x-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de g en 2.
2. En déduire la dérivabilité de g en 2.

4. Interprétation géométrique du nombre dérivé

a. Théorème-définition

Si f est dérivable en a alors le nombre dérivé de f en a , $f'(a)$ est le coefficient directeur d'une droite qui coupe C_f au point de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} a \\ f(a) \end{smallmatrix}\right)$, dit point d'abscisse a . Cette droite qui a pour coefficient directeur $f'(a)$ et qui coupe C_f au point de coordonnées $\left(\begin{smallmatrix} a \\ f(a) \end{smallmatrix}\right)$ est dite tangente à C_f au point d'abscisse a .

b. Propriété

Si f est dérivable en a alors l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

c. Exemple

La fonction f telle que $f(x) = x^2$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$. L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

5. Nombre dérivé à gauche, nombre dérivé à droite

a. Dérivabilité à gauche

Définition : f est dite dérivable à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est égale à un nombre réel. Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à gauche en a et est notée $f'_g(a)$. On lit : « f prime g de a » et on peut écrire : $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$.

Exemple : Soit f telle que $f(x) = |x|$. Etudions la dérivabilité de f à gauche en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \text{ donc } f \text{ est dérivable à gauche en } 0 \text{ et on a } f'_g(0) = -1$$

Interprétation géométrique du nombre dérivé à gauche

Si f est dérivable à gauche en a alors $f'_g(a)$ est le coefficient directeur d'une droite qui coupe C_f au point d'abscisse a . Cette droite est dite demi-tangente à C_f à gauche du point d'abscisse a . L'équation réduite de cette demi-tangente est $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$.

b. Dérivabilité à droite

Définition : f est dérivable à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est égale à un nombre réel. Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f à droite en a et est notée $f'_d(a)$. On lit : « f prime d de a » et on peut écrire : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$.

Exemple : Soit f telle que $f(x) = |x|$. Etudions la dérivabilité de f à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et on a } f'_d(0) = 1$$

Interprétation géométrique du nombre dérivé à droite : Si f est dérivable à droite en a alors $f'_d(a)$ est le coefficient directeur d'une droite qui coupe C_f au point d'abscisse a . Cette droite est dite demi-tangente à C_f à droite du point d'abscisse a . L'équation réduite de cette demi-tangente est $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$.

c. Théorèmes

Théorème 1 : Si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$ alors f est dérivable en a et on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Théorème 2 : Si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors f n'est pas dérivable en a et dans ce cas le point d'abscisse a est dit point anguleux.

Exercice d'application

Soit f telle que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats.

II. Fonction dérivée

1. Dérivabilité sur un intervalle

- f définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ y est dérivable si elle est dérivable en tout point appartenant à $]a, b[$.

- f définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ y est dérivable si elle est dérivable sur $]a, b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b .

2. fonction dérivée

a. Théorème-définition

Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction notée $f': I \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto f'(x)$ est dite fonction dérivée de f ou simplement la dérivée de f sur I .

L'ensemble de dérivabilité d'une fonction est l'ensemble des réels où elle est dérivable.

b. Exemple :

Soit $f(x) = x^2$. Etudions la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminons la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudions la dérivabilité de f en a .

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2a \text{ donc } f \text{ est dérivable en } a \text{ et } f'(a) = 2a$$

Ainsi f est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction dérivée de sur $\mathbb{R}$ est $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto f'(x) = 2x$.

3. Dérivées des fonctions élémentaires

a. Tableau des fonctions dérivées des fonctions élémentaires

Le tableau suivant donne des intervalles sur lesquels les fonctions élémentaires sont dérivables ainsi que les expressions de leurs fonctions dérivées sur ces intervalles.

Fonction f définie par :	f est dérivable sur	Fonction dérivée de f définie par :
$f(x) = c$ où c est un réel constant	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes.	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$

$f(x) = \tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$
-----------------	---	------------------------

b. Remarque

La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$ mais n'est pas dérivable sur $[0; +\infty[$ mais plutôt sur $]0; +\infty[$ car elle n'est pas dérivable à droite en 0.

c. Exemples

Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f est dérivable puis y déterminer $f'(x)$

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = -4x + 3$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = x^7$
6. $f(x) = \frac{1}{x}$
7. $f(x) = \frac{1}{x^4}$

4. Opérations sur les fonctions dérivées : Soit I un intervalle

a. Dérivée d'une somme ou d'une différence

Propriété : Si $f(x) = u(x) + v(x)$ (respectivement si $f(x) = u(x) - v(x)$) telle que u et v sont des fonctions dérivables sur I alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \text{ (respectivement on a : } f'(x) = u'(x) - v'(x) \text{)}$$

Exemples

$f(x) = x^2 + \sqrt{x}$. Justifions que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculons $f'(x)$

$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x}$. Justifions que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ puis calculons $f'(x)$

b. Dérivée d'un produit

Propriété : Si $f(x) = \alpha u(x)$ telle que α est une constante et u une fonction dérivable sur I alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \alpha u'(x)$.

Exemple

$f(x) = -2x^3$. Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculons $f'(x)$

Propriété : Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ telle que u et v sont des fonctions dérivables sur I alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.

Exemple

$f(x) = x^2 \sqrt{x}$. Justifions que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculons $f'(x)$

Propriété : Si $f(x) = [u(x)]^n$ telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et u une fonction dérivable sur I alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = n \cdot u'(x) \cdot [u(x)]^{n-1}$

Exemple

$f(x) = \cos^3 x$. Justifions que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculons $f'(x)$.

c. Dérivée d'un quotient

Propriété : Si $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ telle que u dérivable sur I et $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{-u'(x)}{[u(x)]^2}$.

Exemple

$f(x) = \frac{1}{\tan x}$. Justifions que f est dérivable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ puis calculons $f'(x)$.

Propriété : Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ telle que u et v sont dérivables sur I et $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$

Exemple

$f(x) = \frac{3x-1}{2x-4}$. Justifions que f est dérivable sur $]2; +\infty[$ puis calculons $f'(x)$.

Remarque : Si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ alors $f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

d. Dérivée de la composée de deux fonctions

Théorèmes admis : Soient u et v des fonctions, a un réel et I un intervalle.

- Si u est dérivable en a et v est dérivable en $u(a)$ alors $v \circ u$ est dérivable en a .
- Si u est dérivable sur un intervalle I , v est dérivable sur un intervalle J et pour tout x appartenant à I , $u(x)$ appartient à J alors $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout x appartenant à I , on a : $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$.

Ce théorème donne comme conséquences les propriétés suivantes :

Propriété 1 : Si $f(x) = |u(x)|$ telle que u dérivable sur un intervalle I alors f est dérivable sur I .

Propriété 2 : Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ telle que u dérivable sur I et pour tout $x \in I, u(x) > 0$ alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Exemple

$f(x) = \sqrt{x-4}$. Justifions que f est dérivable sur $]4; +\infty[$ puis calculons $f'(x)$.

Propriété 3 :

Si $f(x) = \cos[u(x)]$ (respectivement $f(x) = \sin[u(x)]$) telle que u dérivable sur un intervalle I alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = -u'(x) \sin[u(x)]$ (respectivement $f'(x) = u'(x) \cos[u(x)]$)

Propriété 4 : Si $f(x) = \tan[u(x)]$ telle que u dérivable sur un intervalle I et pour tout $x \in I$, $u(x) \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$ alors f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x)(1 + \tan^2[u(x)]) = \frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}$.

Exemples : Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f est dérivable puis calculer $f'(x)$: $f(x) = \cos(3x + 1)$; $f(x) = \sin(2x + 3)$; $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$.

Solution

- Pour $f(x) = \cos(3x + 1)$; Posons $u(x) = 3x + 1$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -u'(x) \sin(u(x)) = -3 \sin(3x + 1)$.
- $f(x) = \sin(2x + 3)$; Posons $u(x) = 2x + 3$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = u'(x) \cos(u(x)) = 2 \cos(2x + 3)$.

- Pour $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; Posons $u(x) = x - \frac{\pi}{4}$; u est dérivable sur

$\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[; k \in \mathbb{Z}$

$$u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right[$$

u est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right[$ et $u(x) \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour tout

$x \in \left]-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right[$ donc f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right[; k \in \mathbb{Z}$ et

$$f'(x) = u'(x) \left(1 + \tan^2(u(x))\right) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = 1 + \tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

e. Tableau récapitulatif

Le tableau suivant récapitule les opérations sur les dérivées

Fonctions définies par	Fonctions dérivées
$u(x) + v(x)$ (respectivement $u(x) - v(x)$)	$u'(x) + v'(x)$ (respectivement $u'(x) - v'(x)$)
$\alpha \times u(x)$	$\alpha \times u'(x)$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$
$[u(x)]^n$	$nu'(x)[u(x)]^{n-1}$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{[v(x)]^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(x) = \cos[u(x)]$	$f'(x) = -u'(x) \sin[u(x)]$
$f(x) = \sin[u(x)]$	$f'(x) = u'(x) \cos[u(x)]$
$f(x) = \tan[u(x)]$	$f'(x) = u'(x)(1 + \tan^2[u(x)]) = \frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}$

III. Applications de la dérivation

Dans toute cette partie, on suppose que f est dérivable sur l'intervalle I .

1. Dérivée et sens de variation d'une fonction

a. Théorème 1 :

$f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$ si et seulement si f est constante sur I .

b. Théorème 2

$f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ (le nombre de ses racines dans I étant fini) si et seulement si f est strictement croissante sur I .

c. Théorème 3

$f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$ (le nombre de ses racines dans I étant fini) si et seulement si f est strictement décroissante sur I .

Exercice d'application

Soit f telle que $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$. Etudions le sens de variation de f sur D_f

2. Dérivée et extrémum

a. Théorème 1

Si f admet un extrémum en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$.

b. Théorème 2

Si $f'(a) = 0$ et $f'(x)$ change de signe en a alors f admet un extrémum relatif en a . De plus si le changement se fait du signe $+$ en $-$ (respectivement de $-$ en $+$) alors l'extrémum est un maximum relatif (respectivement un minimum relatif).

Exemple

D'après le tableau ci-dessus, la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$ admet un maximum relatif en -1 et un minimum relatif en 3 .

Tableau de variation d'une fonction

Le tableau de variations d'une fonction f sur un intervalle I permet de visualiser les variations de f sur I . Par exemple, dressons le tableau de variations la fonction f ci-dessus sur $\mathbb{R}$.

3. Dérivée et bijection

a. Théorème 1

Si f est dérivable (continue) et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

b. Théorème 2

Si f est dérivable (continue) et strictement monotone sur I et $0 \in f(I)$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans I . En particulier si f dérivable et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $[a; b]$.

Exercice d'application : $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty; -1]$ sur un intervalle J à préciser.
2. Déterminer le nombre de solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.

c. Théorème 3

Soit f une bijection de I sur J ; $f^{-1}: J \rightarrow I$ sa bijection réciproque ; $x_0 \in I$ et $y_0 \in J$: $y_0 = f(x_0)$

- Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en y_0 et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$ alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 .
- Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout

$$x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

d. Théorème 4

Si f dérivable (respectivement continue) et strictement monotone sur I de dérivée non nulle alors f^{-1} est dérivable (respectivement continue) et strictement monotone sur $f(I)$. De plus le sens de variation de f^{-1} sur $f(I)$ est celui de f sur I .

Exercice d'application :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

1. Dresser le tableau de variation de f puis montrer que f réalise une bijection de $] -\infty; 3[$ sur un intervalle J à déterminer.
2. Donner l'ensemble de définition de f^{-1} puis y préciser ses variations.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ et calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{3})$.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J puis calculer $(f^{-1})'(x)$.

4. Approximation d'une fonction par une fonction affine.

a. Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

Si f est dérivable en a alors pour tout réel h tel que $a + h \in I$ alors il existe une fonction φ telle que $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varphi(h)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$. Au fait, la fonction φ est définie par $\varphi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$.

b. Interprétation numérique

Cette propriété permet de déterminer une bonne approximation de $f(a + h)$ lorsque $f'(a) \neq 0$. En effet, pour tout réel h tel que $a + h \in I$, on a : $f(a + h) = f(a) + [f'(a) + \varphi(h)]h$.

Si h est « suffisamment proche de 0 » alors $\varphi(h)$ est « négligeable devant $f'(a)$ » donc

$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$. En posant $x = a + h$ ($h = x - a$), on a :

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ lorsque x est « proche de a . »

Nous admettons que $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ est la meilleure approximation de la fonction f par une fonction affine, lorsque x est « proche de a ».

c. Exercice d'application

Donner la meilleure approximation affine de la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{1+x}$ pour x « proche de 0 » puis en déduire une valeur approchée de $\sqrt{0,993}$.

Solution

La fonction f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ donc en elle est dérivable en 0 et $\forall x \in] -1; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. La meilleure approximation affine de f pour x « proche de 0 » est la fonction $x \mapsto f(0) + f'(x)(x - 0) = f(0) + f'(0)x$

$f(0) = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$ donc $f(0) + f'(0)x = 1 + \frac{1}{2}x$. Ainsi, pour x « proche de 0 », on a :

$$f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$\sqrt{0,993} = \sqrt{1 + (-0,007)} = f(-0,007)$ comme $-0,007$ est proche de 0 alors :

$$f(-0,007) \approx 1 + \frac{1}{2}(-0,007)$$

$$\approx 0,9965$$

Par suite $\sqrt{0,993} \approx 0,9965$

Exercice à faire : Donner une valeur approchée de $2,001^3$

Chapitre 11 : Suites numériques

Durée : 12h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Représenter graphiquement une suite ;
- ✓ Conjecturer à partir de graphiques, du calcul de quelques termes ou de la calculatrice, le comportement d'une suite ;
- ✓ Connaissant la formule de récurrence d'une suite (u_n) , trouver la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$;
- ✓ Connaissant la représentation graphique de f et d'un terme de la suite, trouver les termes suivants ;
- ✓ Etudier la monotonie d'une suite ;
- ✓ Démontrer par récurrence dans des cas simples qu'une proposition est vraie ;
- ✓ Utiliser les théorèmes admis pour calculer la limite d'une suite ;
- ✓ Démontrer qu'une suite donnée est une suite arithmétique, géométrique ;
- ✓ Utiliser les formules $u_n = u_p + (n - p)r$; $u_n = u_p q^{n-p}$ pour calculer un terme ou la raison d'une suite arithmétique ou géométrique ;

- ✓ Donner le sens de variations d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- ✓ Calculer la somme des p termes consécutifs d'une suite arithmétique et géométrique ;
- ✓ Utiliser la notation $\sum$;
- ✓ Utiliser la formule $(1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^n) = 1 - x^{n+1}$ pour déterminer la somme des $n+1$ termes d'une suite géométrique.

Prérequis :

- ✓ Fonction numériques ;
- ✓ Calculs de limites ;
- ✓ Continuité ;
- ✓ dérivation

Supports didactiques :

- ✓ Document Faye-Ka-Mbengue
- ✓ CIAM 1SM ; TSM ; TSE et 1SE
- ✓ Collection Spirale : Analyse 1^{re} SE ;
- ✓ Collection Hachette classiques 1^{re} A₁ et B ;
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ Nouveau Transmath programme 1998 ;
- ✓ Livre de TS2 de M. Saloly Ba ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Babacar Djitté ;
- ✓ Cours de TS2 de M. Elimane Bousso ;

Plan du chapitre

I. Généralités sur les suites numériques

1. Notion de suite numérique

- a. Définition
- b. Remarques
- c. Exemple
- d. Notation indicielle

2. Types de suites numériques

- a. Suites définie par une formule explicite
- b. Suites définies par une formule de récurrence

3. Opérations sur les suites
 4. Suite majorée ; suite minorée et suite bornée
 - a. Définitions
 - b. Exemple
 5. Monotonie ou sens de variation d'une suite
 - a. Définitions
 - b. Théorème
 - c. Exemples
 - d. Propriété
 6. Représentation graphique d'une suite
 7. Suites périodiques
 8. Raisonnement par récurrence
 - a. Principe du raisonnement par récurrence
 - b. Exemples
- II. Limite d'une suite numérique
1. Définitions
 2. Exemple
 3. Théorèmes (admis)
 - a. Théorème 1
 - b. Théorème 2
 - c. Théorème 3
 - d. Théorème 4 (Théorème des gendarmes ou du Sandwich)
 - e. Théorème 5
 - f. Théorème 6
 - g. Théorème 7
- III. Suites arithmétiques ; suites géométriques
1. Suites arithmétiques
 - a. Définition
 - b. Exemple
 - c. Remarque
 - d. Monotonie d'une suite arithmétique
 - e. Expression du terme général d'une suite arithmétique
 - Théorème 1
 - Théorème 2

- Exercice d'application
- f. Progression arithmétique
 - Définition
 - Propriété
- g. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique
 - Notation
 - Propriété
 - Exercice d'application
- h. Convergence d'une suite arithmétique

2. Suites géométriques

- a. Définition
- b. Remarque
- c. Exemple
- d. Progression géométrique
- e. Expression du terme général d'une suite géométrique
 - Théorème 1
 - Théorème 2
 - Exercice d'application :
- f. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique
 - Propriété
 - Conséquence
 - Exercice d'application
- g. Monotonie d'une suite géométrique
- h. Convergence d'une suite géométrique

Déroulement du cours

I. Généralités sur les suites numériques

1. Notion de suite numérique

Une suite numérique u est une liste ordonnée (succession) de nombres réels obtenus à partir d'une relation bien déterminée. Les nombres de cette liste sont appelés termes de la suite u et peuvent être numérotés d'après leur rang d'apparition. Ainsi, on note souvent u_1 , le 1^{er} terme, u_2 , le 2^{ème} terme, ..., et u_n , le $n^{\text{ème}}$ terme. Toutefois dans certains cas, le 1^{er} terme joue un rôle particulier et on le note u_0 . Dans ce cas, u_1 est le 2^{ème} terme, ..., et u_n est le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme.

a. Définition

Une suite numérique u est une fonction définie d'une partie E de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$: $u: E (\subset \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n)$$

b. Remarques

- Le plus souvent $E = \mathbb{N}$ ou $E = \mathbb{N}^*$.
- On a l'habitude de noter les fonctions numériques par $f, g, h \dots$ mais pour les suites numériques, on utilise souvent les lettres $u, v, w, \dots$

c. Exemples

- La fonction u définie sur $\mathbb{N}$ par $u(n) = n^2 - 1$ est une suite numérique.
- La fonction v définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v(n) = \frac{1}{n}$ est une suite numérique.

d. Notation indicielle d'une suite numérique

Soit u une suite numérique. $u(n)$ est dit terme d'indice n ou terme général de la suite u et est noté $u(n) = u_n$. u_n se lit « u indice n ou plus simplement u n ». La notation u_n est dite notation indicielle.

Remarques

- L'ensemble de définition I d'une suite numérique u coïncide avec l'ensemble des indices des termes de cette suite. Dans ce cas, on note $(u_n)_{n \in I}$ ou plus simplement (u_n) si $I = \mathbb{N}$.
- Si $I = \mathbb{N}$ alors le 1^{er} terme est u_0 et u_n est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme et si $I = \mathbb{N}^*$ alors u_1 est le 1^{er} terme et u_n est le $n^{\text{ième}}$ terme. Ainsi pour une suite numérique u , le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite u qui est dit terme de rang n n'est pas nécessairement le terme d'indice n qui est u_n .
- Il ne faut pas confondre $(u_n)_{n \in I}$ qui est une application et u_n , le terme d'indice n qui est un réel.

2. Types de suites numériques

a. Suite définie par une formule explicite

Une suite numérique $(u_n)_{n \in I}$ telle que u_n est donnée « directement » en fonction n est dite définie par une formule explicite. Pour ces types de suites, on peut trouver une fonction f définie sur $[a; +\infty[$ ($a \in \mathbb{N}$) telle que $u_n = f(n)$.

Exemple

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = n^2 - 1$ est une suite définie par une formule explicite. Son 1^{er} terme est $u_0 = 0^2 - 1 = -1$; son terme d'indice 4 est $u_4 = 4^2 - 1 = 15$ et son terme d'indice $n + 1$ est $u_{n+1} = (n + 1)^2 - 1 = n^2 + 2n$. Pour cette suite on peut écrire $u_n = f(n)$ où $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 1$$

b. Suite définie par une relation de récurrence

Une suite numérique $(u_n)_{n \in I}$ définie par la donnée de quelques un de ses premiers termes et d'une formule permettant de calculer un terme en fonction des termes de rangs précédents est dite définie par une relation de récurrence. Une telle suite est aussi dite suite récurrente et le calcul de ses termes se fait de « proche en proche » donc un terme de cette suite ne peut être déterminé que si tous les termes qui le précèdent le sont.

Exemple 1 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ est une suite récurrente.

$$u_1 = 2u_0 + 1 = -1 + 1 = 0 ; u_2 = 2u_1 + 1 = 1 ; u_3 = 2u_2 + 1 = 3 \dots\dots$$

Exemple 2 : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $v_1 = -2$ et $v_2 = 1$ et pour tout $n \geq 2$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + v_{n-1}$$

$$v_3 = \frac{1}{3}v_2 + v_1 = \frac{1}{3}(1) - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} ; \quad v_4 = \frac{1}{3}v_3 + v_2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{5}{3}\right) + 1 = -\frac{5}{9} + 1 = \frac{4}{9} \dots\dots$$

3. Opérations sur les suites

Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ des suites numériques.

- La somme des suites $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ est la suite notée $(u_n + v_n)_{n \in I}$ de terme général $u_n + v_n$.
- Le produit des suites $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ est la suite notée $(u_n v_n)_{n \in I}$ de terme général $u_n v_n$.
- Si $v_n \neq 0$ pour tout $n \in I$ alors le quotient de la suite $(u_n)_{n \in I}$ par $(v_n)_{n \in I}$ est la suite notée $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in I}$ de terme général $\frac{u_n}{v_n}$.

4. Suite majorée ; suite minorée et suite bornée

a. Définitions : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- $(u_n)_{n \in I}$ est dite minorée s'il existe un réel constant m tel que pour tout $n \in I, u_n \geq m$. Dans ce cas, m est dit minorant de la suite.
- $(u_n)_{n \in I}$ est dite majorée s'il existe un réel constant M tel que pour tout $n \in I, u_n \leq M$. Dans ce cas, M est dit majorant de la suite.
- $(u_n)_{n \in I}$ est dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

b. Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

- Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ car $2n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée.
- $\frac{2n+1}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\frac{3}{n+2} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée.

5. Monotonie ou sens de variation d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

a. Définitions :

- $(u_n)_{n \in I}$ est dite croissante (respectivement décroissante) si pour tout $n, m \in I$,
 $n < m$ ($n > m$) $\Rightarrow u_n \leq u_m$ ($u_n \geq u_m$) (respectivement $n < m$ ($n > m$) $\Rightarrow u_n \geq u_m$ ($u_n \leq u_m$)).
- $(u_n)_{n \in I}$ est dite strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si pour tout $n, m \in I, n < m$ ($n > m$) $\Rightarrow u_n < u_m$ ($u_n > u_m$) (respectivement $n < m$ ($n > m$) $\Rightarrow u_n > u_m$ ($u_n < u_m$)).
- $(u_n)_{n \in I}$ est dite constante si pour tout $n, m \in I, u_n = u_m$.
- $(u_n)_{n \in I}$ est dite monotone (respectivement strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

b. Théorème

- $(u_n)_{n \in I}$ est croissante (respectivement décroissante) ssi pour tout $n \in I, u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n \geq u_{n+1}$).
- $(u_n)_{n \in I}$ est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) ssi pour tout $n \in I, u_n < u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$).
- $(u_n)_{n \in I}$ est dite constante ssi pour tout $n \in I, u_{n+1} = u_n$.

c. Exemples

- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Etudions les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} = \frac{2n+3}{n+3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \frac{(2n+3)(n+2) - (2n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \text{ Donc}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -v_n^2 + v_n - 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Etudions les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (-v_n^2 + v_n - 3) - v_n = -v_n^2 - 3 < 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ donc}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

d. Propriété

Si $(u_n)_{n \geq a}$ est une suite numérique et f une fonction définie sur $[a; +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in I$ alors le sens de variations de $(u_n)_{n \geq a}$ est celui de f sur $[a; +\infty[$.

Exercice d'application : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \sqrt{n^2 + 3} - n$. Etudions les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \geq 0}$. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - x$ pour tout $x \geq 0$. On a $u_n = f(n)$ pour tout $x \geq 0$. Donc d'après la propriété ci-dessus, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a le même sens de variation que f sur $[0; +\infty[$.

$$f \text{ est dérivable sur } [0; +\infty[\text{ et } f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$f'(x) \text{ a même signe que } x - \sqrt{x^2 + 3} \text{ sur } [0; +\infty[\text{ car } \sqrt{x^2 + 3} > 0.$$

Cherchons le signe de $x - \sqrt{x^2 + 3}$ sur $[0; +\infty[$

Posons $x - \sqrt{x^2 + 3} \geq 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$

$$\begin{cases} x - \sqrt{x^2 + 3} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} \leq x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3 \leq x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ impossible donc}$$

$x - \sqrt{x^2 + 3} < 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$. Par suite $f'(x) < 0$ pour tout $[0; +\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ par conséquent $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

6. Représentation graphique d'une suite

a. Représentation d'une suite sur un axe

Représenter une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ sur un axe (D), c'est représenter les valeurs des termes des $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ sur (D). Par exemple, représentons sur un axe (D), la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$u_n = 1 - \frac{n^2}{2}$. Traçons un axe (D) d'origine O, d'unité 1 cm.

$$u_0 = 1; u_1 = 1 - \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}; u_2 = 1 - \frac{4}{2} = -1; u_3 = 1 - \frac{9}{2} = -\frac{7}{2}; u_4 = 1 - \frac{16}{2} = 1 - 8 = -7$$

Ainsi, on peut représenter sur (D) $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \dots$

b. Représentation d'une suite dans le plan.

Suites définies par une formule explicite

Soit (O, I, J) un repère du plan, $(u_n)_{n \geq a}$ est une suite numérique, f une fonction définie sur $[a; +\infty[$ telle que $u_n = f(n)$ et (C), la représentation graphique de f sur $[a; +\infty[$. La représentation graphique de $(u_n)_{n \geq a}$ dans (O, I, J) est l'ensemble des points de (C) dont les abscisses sont des entiers naturels $n \geq a$. Remarquons qu'en projetant ces points de (C) sur l'axe (OJ), on obtient une représentation de $(u_n)_{n \geq a}$ sur l'axe (OJ).

Par exemple soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = 2n - 1$, Représentons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

$u_n = f(n)$ où $f(x) = 2x - 1$; $x \in [0; +\infty[$. On va représenter la courbe de f sur $[0; +\infty[$. La courbe de f est une droite.

Suites définies par une formule de récurrence

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite définie par la donnée de son 1^{er} terme u_0 et par la relation de récurrence

$u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ où f est une fonction. Pour représenter cette suite dans un repère orthonormé (O,I,J), on peut suivre les étapes suivantes :

- Tracer dans (O,I,J), la courbe (C) de f et la droite d'équation (Δ): $y = x$.
- Placer le 1^{er} terme u_0 sur l'axe des abscisses.

- On construit M_0 , le point de (C) d'abscisse u_0 . Son ordonnée est $f(u_0) = u_1$ puis P_0 , le point de (Δ) d'ordonnée u_1 . L'abscisse de P_0 est u_1 .
- On construit M_1 , le point de (C) d'abscisse u_1 . Son ordonnée est $f(u_1) = u_2$ puis P_1 , le point de (Δ) d'ordonnée u_2 . L'abscisse de P_1 est u_2 .
- En continuant ainsi, on peut construire M_2 puis $M_3, \dots$

Cette démarche permet également de représenter la suite sur les deux axes.

Exemple : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Représentons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé (O,I,J)

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f(x) = 2x + 3.$$

7. Suites périodiques

a. Définition

Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est dite périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que pour tout $n \in \mathbb{I}$, $u_{n+p} = u_n$. Dans ce cas, on dit que p est une période de $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$. La période de $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est la plus petite parmi toutes les périodes.

b. Exemple

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = (-1)^n$.

$$u_{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n = u_n \text{ donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est périodique et } 2 \text{ est une période de } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

c. Exercice d'application

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = n - pE\left(\frac{n}{p}\right)$ où p est un entier strictement positif fixé. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique.

8. Raisonnement par récurrence

a. Principe du raisonnement par récurrence

La démonstration (raisonnement) par récurrence est une méthode de démonstration que l'on peut utiliser pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ où n_0 est un entier naturel donné. Elle peut se faire en 4 étapes :

- **1^{ère} étape** : Vérifier que la propriété est vraie pour $n = n_0$. Cette étape est dite initialisation.
- **2^{ème} étape** : Supposer que la propriété est vraie pour un entier n tel que $n > n_0$. Cette étape est dite hypothèse de récurrence.
- **3^{ème} étape** : Montrer que la propriété est vraie pour l'entier suivant n c'est à dire $n + 1$. Cette étape est souvent dite hérédité.
- **4^{ème} étape** : Affirmer que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$. Cette étape est dite conclusion.

b. Exemples

Exemple 1 : Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

On peut poser $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. On doit montrer donc $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Etape 1 : On montre que l'égalité est vraie pour $n = 1$.

Comme $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ donc pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ donc $S_1 = \frac{1(1+1)}{2}$ donc l'égalité es vraie pour $n = 1$.

Etape 2 : Supposons que l'égalité est vraie pour un entier $n > 1$ c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Etape 3 : Montrons que l'égalité est vraie pour l'entier $n + 1$ c'est-à-dire $S_{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \Rightarrow S_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots n + (n + 1)$$

$$= S_n + (n + 1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \text{ car par hypothèse } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

Donc l'égalité est vraie pour l'entier $n + 1$.

Etape 4 : On conclut que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ c'est-à-dire

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{Formule à connaître}$$

Exemple 2 : Démontrons que pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7

On se gardera cette fois de mettre étape 1, étape 2 etc....

Rappel : un entier naturel a est divisible par un entier naturel non nul b (ou bien b divise a) s'il existe un entier naturel q tel que $a = bq$.

Pour $n = 0$, $3^{2n} - 2^n = 3^{2(0)} - 2^0 = 0$ or 0 est divisible par 7 car $0 = 7 \times 0$ donc $3^{2(0)} - 2^0$ est divisible par 7 par suite la propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 avec $n > 0$.

Montrons que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2$. Comme $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 donc il existe un entier naturel q tel que $3^{2n} - 2^n = 7q$ c'est-à-dire $3^{2n} = 7q + 2^n$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 &= 9(7q + 2^n) - 2^n \times 2 \\ &= 7(9q) + 9 \times 2^n - 2 \times 2^n \\ &= 7(9q) + 2^n(9 - 2) \\ &= 7(9q) + 2^n \times 7 \\ &= 7(9q + 2^n) . \text{ Posons } q' = 9q + 2^n ; q' \in \mathbb{N} \text{ et on a donc} \end{aligned}$$

$$3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 = 7q' ; q' \in \mathbb{N} \text{ par suite } 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7q' ; q' \in \mathbb{N} . \text{ Ainsi}$$

$3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7. Par conséquent pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

II. Limite d'une suite numérique

La notion de limite déjà vue à propos des fonctions numériques, s'étend au cas des suites numériques mais pour ces dernières, la notion de limite n'est définie que lorsque n tend vers $+\infty$. On admet que si une suite admet une limite alors cette limite est unique.

1. Définitions

- Dire qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ admet pour limite le réel l quand n tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de centre en l contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.
- Dire qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ admet pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que quel que soit le réel A , tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est dite convergente si elle admet une limite finie.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est dite divergente si elle n'admet pas de limite ou bien si sa limite est infinie.

2. Théorèmes (admis)

a. Théorème 1

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$
- Si $\alpha \in]0; +\infty[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

b. Théorème 2

Les résultats concernant les opérations sur les limites de fonctions s'étendent aux limites de suites. Par exemple si $u_n = \frac{2n^3 + n - 1}{n^2 - 2n + 3}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$.

c. Théorème 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique. Si f admet une limite en $+\infty$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ a une limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Par exemple, Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = n \sin(\frac{1}{n})$. calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$u_n = f(n)$ où $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$. Il est clair que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ donne une forme indéterminée.

$x \sin(\frac{1}{x}) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ donc posons $X = \frac{1}{x}$. Si $x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow 0$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$. Comme f admet une limite en $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Remarque : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est une suite définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique et f n'admet pas de limite en $+\infty$ alors on ne peut pas dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ n'a pas de limite. En effet : Soit $f(x) = \cos(2\pi x)$; $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = f(n)$

Posons $X = 2\pi x$; si $x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \cos X$ or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \cos X$ n'existe pas donc f n'a pas de limite en $+\infty$. Cependant $u_n = f(n) = \cos(2\pi n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

d. Théorème 4

Soit f une fonction, $(u_n)_{n \in I}$ une suite telle que $u_n \in D_f$ pour tout $n \in I$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$; a et l désignent chacun soit un réel, soit $\pm\infty$.

Corollaire : S'il existe des suites $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n)$ alors f n'a pas de limite en a .

Exercice d'application : $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$. En utilisant les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par $u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, montrer que f n'a pas de limite en 0.

e. Théorème 5

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- S'il existe une suite $(v_n)_{n \in I}$ et un entier $n_0 \in I$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- S'il existe une suite $(w_n)_{n \in I}$ et un entier $n_0 \in I$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

f. (Théorème des gendarmes ou du Sandwich)

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique. S'il existe des suites $(v_n)_{n \in I}$, $(w_n)_{n \in I}$, un entier $n_0 \in I$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ ou $l = \pm\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. En particulier, s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Exercice d'application : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$, $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$.
2. En déduire un encadrement de u_n puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

g. Théorème 6

Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ des suites convergentes. S'il existe un entier $n_0 \in I$ tel que

- pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq (<) w_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.
- pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq (<) 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 0$.
- pour tout $n \geq n_0$, $a \leq (<) u_n \leq (<) b$ alors $a \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq b$ où a et b sont des réels constants.

Ce théorème reste valable lorsqu'on remplace l'inégalité inférieure par l'inégalité supérieure.

h. Théorème 7

Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite convergente alors $(u_n)_{n \in I}$ est bornée.

NB :

- La réciproque de ce théorème est fausse c'est-à-dire une suite bornée n'est pas nécessairement convergente. Par exemple $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \cos n$ est bornée mais n'est pas convergente car elle n'a pas de limite.
- La contraposée de ce théorème permet d'affirmer que toute suite non bornée est divergente.

i. Théorème 8

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique.

- S'il existe un entier $n_0 \in I$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $(u_n)_{n \in I}$ est croissante et majorée alors $(u_n)_{n \in I}$ est convergente.
- S'il existe un entier $n_0 \in I$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante et minorée alors $(u_n)_{n \in I}$ est convergente.

NB :

- $(u_n)_{n \in I}$ est croissante et n'est pas majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante et n'est pas minorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

k. Théorème

- Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite $(u_n)_{n \in I}$ est convergente et f est continue sur D_f alors la limite de $(u_n)_{n \in I}$ est solution de l'équation $f(x) = x$.
- Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in J}$ des suites telles que $v_n = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n \in I}$ converge vers l et f continue en l alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l)$.

III. Suites arithmétiques ; suites géométriques

1. Suites arithmétiques

a. Définition

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite arithmétique s'il existe un réel constant souvent noté r tel que pour tout $n \in I$, $u_{n+1} - u_n = r$ (ou $u_{n+1} = u_n + r$). Dans ce cas le réel r est dit raison de la suite arithmétique. Ainsi si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r alors tout terme de la suite sauf le premier s'obtient en ajoutant la raison r au terme qui le précède : $u_1 = u_0 + r$; $u_2 = u_1 + r$; ... ; $u_{2023} = u_{2022} + r$... ; $u_{n+1} = u_n + r$.

b. Exemple

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = an + b$; où a et b sont des réels constants. Montrons que la suite est arithmétique puis précisons la raison.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$ donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison a .

c. Remarque

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est arithmétique de raison nulle si et seulement si $(u_n)_{n \in I}$ est constante.

d. Monotonie d'une suite arithmétique

Si $(u_n)_{n \in I}$ est arithmétique de raison $r \neq 0$ alors $(u_n)_{n \in I}$ est strictement monotone. De plus :

- Si $r > 0$ alors $(u_n)_{n \in I}$ est strictement croissante.
- Si $r < 0$ alors $(u_n)_{n \in I}$ est strictement décroissante.

En effet : $r \neq 0 \Rightarrow r > 0$ ou $r < 0$. Comme $(u_n)_{n \in I}$ est arithmétique de raison r donc

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Si $r > 0$ alors $u_{n+1} > u_n = r$ donc $(u_n)_{n \in I}$ est strictement croissante.

Si $r < 0$ alors $u_{n+1} < u_n$ donc $(u_n)_{n \in I}$ est strictement décroissante.

e. Expression du terme général d'une suite arithmétique

- **Théorème 1**

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a :
 $u_n = u_0 + rn$.

Preuve : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r . Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + rn$.

- pour $n = 0$; $u_n = u_0$ et $u_0 + rn = u_0 + r(0) = u_0$ donc pour $n = 0$, $u_n = u_0 + rn$.
- Supposons que pour un entier $n > 0$, $u_n = u_0 + rn$
- Montrons que $u_{n+1} = u_0 + r(n+1)$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r alors $u_{n+1} = u_n + r$ or d'après l'hypothèse de récurrence on a : $u_n = u_0 + rn$ d'où $u_{n+1} = u_0 + rn + r = u_0 + r(n+1)$.

- Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + rn$.

- **Théorème 2**

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r et u_p est un terme quelconque alors pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = u_p + r(n-p)$.

Preuve :

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r alors d'après le théorème 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$u_n = u_0 + rn$ donc $u_p = u_0 + rp$. Par suite $u_n - u_p = u_0 + rn - (u_0 + rp) = r(n-p)$ d'où

$u_n = u_p + r(n-p)$.

- **Exercice d'application**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $u_0 = -3$. Calculer u_{100} puis donner l'expression du terme général u_n en fonction de n .

f. Progression arithmétique

- **Définition**

Trois nombres réels a , b et c dans cet ordre sont en progression arithmétique si $a + c = 2b$ (ou $b = \frac{a+c}{2}$).

- **Propriété**

Trois termes consécutifs quelconques d'une suite arithmétique sont en progression arithmétique. Autrement dit si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite arithmétique de raison r alors pour tout $n \in I$, u_n, u_{n+1} et u_{n+2} dans cet ordre sont en progression arithmétique.

Preuve : Soit $n \in I$, u_n, u_{n+1} et u_{n+2} .

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r \text{ donc } u_n + u_{n+2} = u_n + u_{n+1} + r \text{ or } u_n + r = u_{n+1} \text{ donc } u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$$

g. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

- **Notation**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique, la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ de termes consécutifs de la suite est notée par $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. On lit : « Sigma k allant de 0 à $n-1$ de u_k ».

Exercice d'application

1. Ecrire la somme $v_5 + v_6 + \dots + v_{2022}$ en utilisant le symbole $\sum$.

2. Ecrire $\sum_{i=1}^n u_i$ comme une somme de termes.

- **Propriété**

Une somme notée S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est calculée par la formule :

$$S = \frac{\text{nombre de termes de } S \times (\text{1er terme de } S + \text{dernier terme de } S)}{2} \text{ où}$$

le nombre de termes de $S = (\text{indice du dernier terme} - \text{indice du 1er terme}) + 1$

- **Exercice d'application**

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = 3n + 5$ est arithmétique de raison 3. Calculer $S = \sum_{k=2}^9 u_k$

h. Convergence d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r .

- Si $r = 0$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers u_0 .
- Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

En résumé, toute suite arithmétique de raison $r \neq 0$ est divergente.

Preuve : Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + rn$

Si $r = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$.

Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} rn + u_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} rn = +\infty$.

Si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} rn + u_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} rn = -\infty$.

2. Suites géométriques

a. Définition

Une suite $(u_n)_{n \in I}$ est dite géométrique s'il existe un réel constant souvent noté q tel que pour tout $n \in I$, $u_{n+1} = q u_n$. Dans ce cas le réel q est dit raison de la suite géométrique. Ainsi si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors tout terme de la suite sauf le premier s'obtient en multipliant le terme précédent par la raison q : $u_1 = qu_0$; $u_2 = qu_1$;

b. Remarques

- Si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison $q = 0$ alors tous les termes de la suite sont nuls sauf peut-être le premier terme. On dit que la suite est stationnaire (elle est constante à partir d'un certain rang).
- $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison $q = 1$ si et seulement si $(u_n)_{n \in I}$ est une suite constante.

Dans toute la suite, on considère les suites géométriques de raison $q \neq 0$ et $q \neq 1$.

c. Exemple :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où a est un réel constant non nul. Montrons que la suite est géométrique puis précisons la raison.

$$u_{n+1} = a^{n+1} = aa^n = au_n \text{ donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } a.$$

d. Progression géométrique

Définition

Trois nombres réels a , b et c pris dans cet ordre sont en progression géométrique si $ac = b^2$.

Propriété

Trois termes consécutifs quelconques d'une suite géométrique de raison q sont en progression géométrique. Ainsi si $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{I}$, u_n , u_{n+1} et u_{n+2} dans cet ordre sont en progression géométrique.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{I}$, u_n , u_{n+1} et u_{n+2} .

$$u_{n+2} = q u_{n+1} \text{ donc } u_n \cdot u_{n+2} = q u_n u_{n+1} \text{ or } q u_n = u_{n+1} \text{ donc } u_n \cdot u_{n+2} = u_{n+1}^2$$

e. Expression du terme général d'une suite géométrique

• Théorème 1

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

Preuve : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

- Pour $n = 0$, $u_n = u_0$ et $u_0 q^n = u_0 q^0 = u_0$ donc pour $n = 0$; $u_n = u_0 q^n$.
- Supposons que pour un entier $n > 0$ $u_n = u_0 q^n$
- Montrons que $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q alors $u_{n+1} = q u_n$ or d'après l'hypothèse de récurrence on a : $u_n = u_0 q^n$ d'où $u_{n+1} = q(u_0 q^n) = u_0 q^{n+1}$.

- Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

• Théorème 2

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et si u_p est un terme quelconque alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p q^{n-p}$.

Preuve : Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q alors d'après le théorème 1,

$$u_n = u_0 q^n = u_0 q^{n-p+p} = u_0 q^p \times q^{n-p} = u_p q^{n-p} \text{ car } u_p = u_0 q^p.$$

f. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

- **Propriété**

Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Preuve

Posons $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$. Ainsi $qS = q + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$ donc

On a : $S - qS = 1 - q^{n+1}$ donc $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ d'où $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ car $q \neq 1$.

- **Conséquence**

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q alors $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$

Preuve :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p + qu_p + \dots + u_p q^{n-p} = u_p(1 + q + \dots + q^{n-p}) = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

En résumé, une somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est calculée par la formule : $S = 1^{er} \text{ terme de } S \times \left(\frac{1-q^{\text{nbre de termes de } S}}{1-q}\right)$.

g. Monotonie d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in I}$ est suite géométrique de raison q et de premier terme u_p .

- Si $u_p = 0$ alors $u_n = u_p q^{n-p} = 0$ pour tout $n \in I$ donc la suite $(u_n)_{n \in I}$ est nulle donc elle est constante.
- Si $u_p \neq 0$ et $q < 0$ alors deux termes consécutifs sont de signes contraires (on dit que la suite est alternée). Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \in I}$ n'est pas monotone (ni croissante, ni décroissante).
- Si $u_p \neq 0$ et $q > 0$ alors $(u_n)_{n \in I}$ est monotone. De plus :
 - ❖ Si $0 < q < 1$ et $u_p > 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in E}$ est strictement décroissante.
 - ❖ Si $0 < q < 1$ et $u_p < 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in E}$ est strictement croissante.
 - ❖ Si $q > 1$ et $u_p > 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in E}$ est strictement croissante.
 - ❖ Si $q > 1$ et $u_p < 0$ alors la suite $(u_n)_{n \in E}$ est strictement décroissante.

h. Convergence d'une suite géométrique

- **Théorème :** Soit q un réel tel que $q \neq 1$.

- ✓ Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- ✓ Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- ✓ Si $q \leq -1$ alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de q^n n'existe pas.

Preuve :

Prouvons d'abord que si $a > 0$ alors $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On va le prouver par récurrence.

- ✓ Pour $n = 0$; $(1 + a)^n = (1 + a)^0 = 1$; $1 + na = 1 + 0a = 1$ donc $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour $n = 0$.
- ✓ Supposons que pour $n > 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
- ✓ Montrons que $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n.$$

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \Rightarrow (1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) \text{ car } 1 + a > 0.$$

$$(1 + a)(1 + na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \text{ donc}$$

$$(1 + a)(1 + na) \geq 1 + (n + 1)a \text{ car } na^2 \geq 0 \text{ d'où } (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a.$$

- ✓ Donc $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $q > 1$. On a donc $q - 1 > 0$. Posons $a = q - 1$. On donc $q = a + 1$.

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \Rightarrow q^n \geq 1 + n(q - 1).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n(q - 1) = +\infty \text{ car } q - 1 > 0 \text{ donc } q^n \geq 1 + n(q - 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

Supposons que $-1 < q < 1$; on a donc $|q| < 1$ d'où $\left|\frac{1}{q}\right| > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{1}{q}\right|^n = +\infty$ d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{|q|^n} = +\infty \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0 \text{ par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = 0. \text{ Par conséquent } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

Supposons que $q = -1$; $q^n = (-1)^n$

- Si n est pair alors $(-1)^n = 1$ donc $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

- Si n est impair alors $(-1)^n = -1$ donc $q^n = -1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = -1$.

Donc dans ce cas, la limite de q^n dépend de la parité de n et n'est donc pas unique par suite q^n n'a pas de limite.

Supposons que $q < -1$. On a donc $q^2 > 1$ par suite $\lim_{k \rightarrow +\infty} q^{2k} = +\infty$ d'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} q^{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} q^{2k} \times q = -\infty$. Donc dans ce cas, la limite de q^n dépend de la parité de n et n'est donc pas unique par suite q^n n'a pas de limite.

a. Conséquence

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p .

- ✓ Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- ✓ Si $q > 1$ et $u_p > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- ✓ Si $q > 1$ et $u_p < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- ✓ Si $q \leq -1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ n'admet pas de limite.

Preuve :

Pour tout $n \in \mathbb{I}$, $u_n = u_p q^{n-p} = \frac{u_p}{q^p} q^n$

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_p}{q^p} q^n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Si $q > 1$ et $u_p > 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_p}{q^p} q^n = +\infty$ car $\frac{u_p}{q^p} > 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si $q > 1$ et $u_p < 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_p}{q^p} q^n = -\infty$ car $\frac{u_p}{q^p} < 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Si $q \leq -1$ alors q^n n'a pas de limite donc $\frac{u_p}{q^p} q^n$ n'a pas de limite car $\frac{u_p}{q^p} = cste$ d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ n'a pas de limite.

En résumé :

Si $-1 < q < 1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est convergente et converge vers 0.

Si $q > 1$ ou $q \leq -1$ alors $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ est divergente.

Chapitre 12 : Etude de fonctions

Durée : 10 h (Cours)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Déterminer pour la courbe représentative d'une fonction lorsqu'elles existent :
 - Une asymptote parallèle aux axes de coordonnées.
 - Une asymptote oblique
- ✓ Montrer qu'un point I est centre de symétrie Représenter graphiquement une fonction réciproque d'une fonction bijective à partir de la représentation de cette dernière.

Prérequis :

- ✓ Limites, continuité et dérivation;

Supports didactiques :

- ✓ Nouveau Transmath (Term S);
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminal SE ;
- ✓ CIAM TSM
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

- I. Asymptotes
 - 1. Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées
 - 2. Asymptotes obliques
- II. Eléments de symétrie
 - 1. Axe de symétrie
 - 2. Centre de symétrie
 - 3. Changement de repère
 - a. Changement de repère et axe de symétrie
 - b. Changement de repère et centre de symétrie
- III. Représentation graphique d'une fonction
 - 1. Choix d'ensemble d'étude d'une fonction
 - 2. Plan d'étude d'une fonction

3. Exemples

Déroulement du cours

Dans tout ce cours, f désigne une fonction numérique d'une variable réelle et C_f est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; a et b sont des réels.

I. Asymptotes

1. Asymptotes parallèles aux axes de coordonnées

Une droite (D) est dite asymptote parallèle aux axes de coordonnées si elle est une asymptote verticale ou horizontale à C_f .

2. Asymptotes obliques

a. Propriété 1

Une droite $(D): y = ax + b; a \neq 0$ est dite asymptote oblique à C_f en $-\infty$ (respectivement en $+\infty$) si et seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$).

Exemple: $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$ et $(D): y = -2x$. Montrons que (D) est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

$f(x) - (-2x) = \sqrt{x^2 + 4} + x$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} + x$ donne une forme indéterminée.

$\sqrt{x^2 + 4} + x = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} - x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = 0$ par suite

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} + x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-2x) = 0$ donc $(D): y = -2x$ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

b. Propriété 2

Une droite $(D): y = ax + b; a \neq 0$ est dite asymptote oblique à C_f en $-\infty$ (respectivement en $+\infty$) si et seulement si $f(x) = ax + b + r(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} r(x) = 0$ (respectivement et $\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = 0$).

Exemple : $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$. Montrons que C_f admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ dont on précisera l'équation réduite.

En effectuant la division euclidienne de $x^2 + x - 2$ par $x + 1$, on peut écrire

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+3} = x - 2 + r(x) \text{ où } r(x) = \frac{4}{x+3}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} r(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ donc la droite $(D): y = x - 2$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$.

4. Remarques

- Si $(D): x = a$ est une asymptote verticale à C_f alors C_f est « de plus en plus proche » de (D) lorsque x est « de plus en plus proche » de a .
- Si (D) est une asymptote horizontale ou oblique à C_f en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) alors C_f est « de plus en plus proche » de (D) lorsqu'on va « de plus en plus vers la droite du repère » (respectivement « de plus en plus vers la gauche du repère »).

5. Position d'une courbe par rapport à une droite :

a. Propriété : Soit $(\Delta): y = ax + b$ une droite et I un intervalle contenu dans D_f .

- Si $f(x) - [ax + b] > 0$ pour tout $x \in I$ alors C_f est au-dessus de (Δ) sur I .
- Si $f(x) - [ax + b] < 0$ pour tout $x \in I$ alors C_f est en dessous de (Δ) sur I .
- Les solutions de l'équation $f(x) - [ax + b] = 0$ si elles existent, donnent les abscisses des points d'intersection de C_f et (Δ) sur I .

Exemple

$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$. Etudions la position de C_f par rapport à son asymptote oblique $(\Delta): y = x + 3$

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 3) &= \frac{x^2+x-2}{x-2} - (x + 3) \\ &= \frac{x^2+x-2-(x+3)(x-2)}{x-2} \end{aligned}$$

$f(x) - (x + 3) = \frac{4}{x-2}$; $4 > 0$ donc $f(x) - (x + 3)$ a même signe que $x - 2$ dans

$D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$. On doit donc étudier le signe de $x - 2$ dans

$D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

Le tableau de signe de $x - 2$ sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ amène à dire que :

Sur $] -\infty; 2[$, $x - 2 < 0$ donc $f(x) - (x + 3) < 0$ d'où C_f est en dessous de (Δ) .

Sur $]2; +\infty[$, $x - 2 > 0$ donc $f(x) - (x + 3) > 0$ d'où C_f est en dessous de (Δ) .

b. Point d'intersection de C_f avec les axes de coordonnées

Pour déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses, on résout l'équation $f(x) = 0$ dans D_f .

- Si l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans D_f alors C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.
- Si l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans D_f alors le nombre de solutions de cette équation est égal au nombre de points d'intersection. De plus si α est solution de l'équation $f(x) = 0$ alors $A\left(\alpha\right)$ est un point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

Pour déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées :

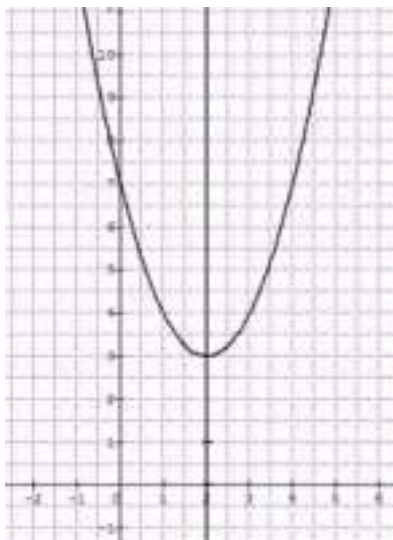
- Si $0 \in D_f$ alors $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ f(0) \end{smallmatrix}\right)$ est le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.
- Si $0 \notin D_f$ alors C_f ne coupe pas l'axe des ordonnées.

II. Éléments de symétrie

1. Axe de symétrie

a. Définition

Une droite (Δ) est un axe de symétrie de C_f si pour tout point M appartenant à C_f , le symétrique M' de M par rapport à (Δ) appartient à C_f .



Dans la courbe ci-dessus, la droite $(\Delta): x = 2$ est un axe de symétrie de C_f .

b. Propriété : Soit $(\Delta): x = a$; a est un réel constant

$(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de C_f si et seulement si pour tout $x \in D_f$,

$$2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) = f(x).$$

c. Exemples

Exemple 1 : $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-2x}$; $(\Delta): x = 1$. Montrons que $(\Delta): x = 1$ est un axe de symétrie de C_f .

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\} ; (\Delta): x = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Soit } x \in D_f ; 2a - x = 2 - x.$$

$$x \in D_f \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 2$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -2$$

$$\Rightarrow 2 - x \neq 2 \text{ et } 2 - x \neq 0$$

$$\Rightarrow 2 - x \in D_f \text{ donc } 2a - x \in D_f. (1)$$

$$f(2a - x) = f(2 - x) = \frac{((2-x)-1)^2}{(2-x)^2-2(2-x)}$$

$$= \frac{(1-x)^2}{x^2-4x+4-4+2x}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x^2-2x}$$

$$f(2a - x) = f(x) \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow (\Delta): x = 1$ est un axe de symétrie de C_f .

Exemple 2 : $f(x) = \frac{4 \sin^2 x + 3 \sin x}{\sin x - 1}$; $(\Delta): x = \frac{\pi}{2}$. Montrons que $(\Delta): x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f .

$f(x)$ existe ssi $\sin x - 1 \neq 0$

$$\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi; k, k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \text{ donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(\Delta): x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{2}$$

Soit $x \in D_f$; $2a - x = \pi - x$.

$$x \in D_f \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow -x \neq -\frac{\pi}{2} - 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi - x \neq \pi - \frac{\pi}{2} - 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi - x \neq \frac{\pi}{2} - 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi - x \neq \frac{\pi}{2} + 2k'\pi \text{ où } k' = -k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \pi - x \in D_f \text{ donc } 2a - x \in D_f. \quad (1)$$

$$f(2a - x) = f(\pi - x) = \frac{4 \sin^2(\pi - x) + 3 \sin(\pi - x)}{\sin(\pi - x) - 1}$$

$$= \frac{4 \sin^2 x + 3 \sin x}{\sin x - 1}$$

$$f(2a - x) = f(x) \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow (\Delta): x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de C_f .

d. Remarque

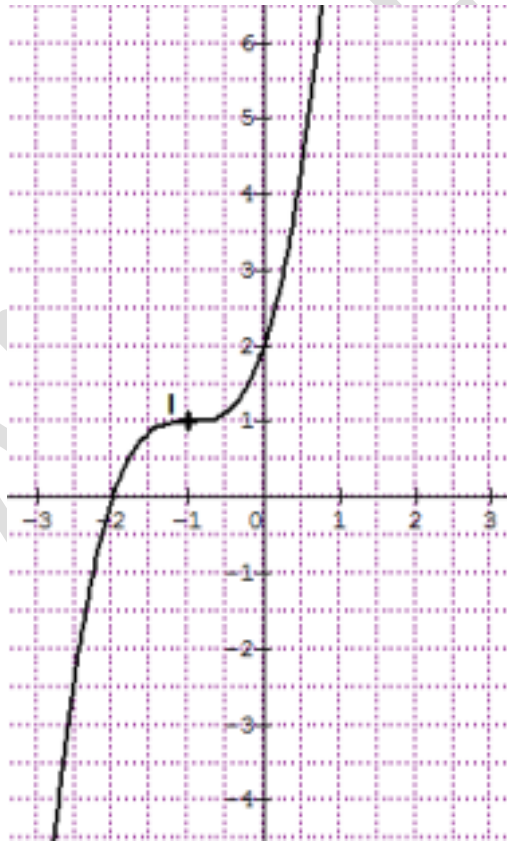
$(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de C_f si et seulement si pour tout $x \in D_f$,

$$a - x; a + x \in D_f \text{ et } f(a - x) = f(a + x).$$

2. Centre de symétrie

a. Définition

Un point I est un centre de C_f si pour tout M appartenant à C_f , le symétrique M' de M par rapport à I appartient à C_f .



Dans la courbe ci-dessus, le point I est un centre de symétrie de C_f

b. Propriété : Soit $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$; a et b sont des réels constants.

$I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie de C_f si et seulement si pour tout $x \in D_f$,

$$2a - x \in D_f \text{ et } f(2a - x) + f(x) = 2b$$

c. Exemple

$f(x) = (x + 1)^3 + 1$. Montrons que $I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie de C_f .

$D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme.

$$I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow a = -1 \text{ et } b = 1.$$

Soit $x \in D_f$, $2a - x = -2 - x$

$$x \in D_f \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -2 - x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -2 - x \in D_f \text{ donc } 2a - x \in D_f. \text{ (1)}$$

$$f(2a - x) = f(-2 - x)$$

$$= ((-2 - x) + 1)^3 + 1$$

$$= (-x - 1)^3 + 1$$

$$f(2a - x) = -(x + 1)^3 + 1$$

$$f(2a - x) + f(x) = -(x + 1)^3 + 1 + (x + 1)^3 + 1$$

$$f(2a - x) + f(x) = 2 ; 2b = 2 \times 1 = 2 \text{ donc } f(2a - x) + f(x) = 2b \text{ (2)}$$

(1) et (2) $\Rightarrow I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie de C_f .

Exercice d'application : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x}{2x^2 - 4x + 1}$ et $I\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que I est un centre de symétrie de C_f .

d. Remarque

$I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est un axe de symétrie de C_f si et seulement si pour tout $x \in D_f$,

$$a - x; a + x \in D_f \text{ et } f(a - x) + f(a + x) = 2b.$$

3. Changement de repère

Le changement de repère est aussi une méthode pour démontrer que la courbe d'une fonction admet un axe de symétrie ou un centre de symétrie.

a. Changement de repère et axe de symétrie :

La droite $(D): x = a$ est un axe de symétrie de C_f si et seulement si la fonction F définie par $F(x) = f(x + a)$ est paire.

Dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ où O' est le point d'abscisse a et d'ordonnée 0 dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (c'est à dire $O'(\overset{a}{0})$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$), C_f est la représentation graphique de F .

Soit $M \in C_f$;

$$M\left(\overset{x}{y}\right) \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}), M\left(\overset{X}{Y}\right) \text{ dans } (O', \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases}$$

Les formules $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases}$ (ou $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$) sont dites formules de changement de repère.

Exemple : Montrons en utilisant le changement de repère que $(\Delta): x = 1$ est un axe de symétrie de C_f avec $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2-2x}$

$$(\Delta): x = 1 \Rightarrow a = 1$$

Pour ce faire, on montre que $x \mapsto F(x) = f(x + 1)$ est paire.

$$F(x) = f(x + 1) = \frac{((x+1)-1)^2}{(x+1)^2-2(x+1)} = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$D_F = \mathbb{R} \setminus \{1; -1\};$$

Soit $x \in D_F$;

$$x \in D_F \Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -1$$

$$\Rightarrow -x \neq -1 \text{ et } -x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$$

$$x \in D_F \Rightarrow -x \in D_f. (1)$$

$$F(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1}$$

$$= \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$F(-x) = F(x) \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow$ F est paire et par conséquent $(\Delta): x = 1$ est un axe de symétrie de C_f

Exercice d'application :

$f(x) = \frac{4 \sin^2 x + 3 \sin x}{\sin x - 1}$; $(\Delta): x = \frac{\pi}{2}$. Montrer en utilisant un changement de repère que (Δ) est un axe de symétrie de C_f .

b. Changement de repère et centre de symétrie :

Le point $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie de C_f si et seulement si la fonction F définie par

$F(x) = f(x + a) - b$ est impaire.

Dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, C_f est la représentation graphique de F .

Soit $M \in C_f$;

$$M\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \text{ dans } (O, \vec{i}, \vec{j}), M\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) \text{ dans } (I, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

Les formules $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$ (ou $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$) sont dites formules de changement de repère.

Exemple : Montrons en utilisant le changement de repère que $I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est centre de symétrie de C_f avec $f(x) = (x + 1)^3 + 1$.

$$I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow a = -1 \text{ et } b = 1$$

Pour ce faire, on montre que $x \mapsto F(x) = f(x - 1) - 1$ est impaire.

$$F(x) = f(x - 1) - 1 = ((x - 1) + 1)^3 + 1 - 1 = x^3$$

$$F(x) = x^3.$$

Il est facile de prouver que F telle que $F(x) = x^3$ est impaire. Ainsi, $I\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ est centre de symétrie de C_f

Exercice d'application : $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x}{2x^2 - 4x + 1}$ et $I\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Montrer par changement de repère que I est un centre de symétrie de C_f .

III. Représentation graphique d'une fonction

1. Choix d'ensemble d'étude pour une fonction

L'étude des propriétés d'éléments de symétrie, de périodicité et de parité permet de définir un ensemble d'étude E tel que l'étude de f sur E suffit à reconstituer ses propriétés sur D_f .

a. Eléments de symétrie et choix d'un ensemble d'étude

Si $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de C_f (respectivement si $I\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie de C_f) alors on peut choisir $D_f \cap [a; +\infty[$ comme ensemble d'étude et y tracer C_f . Pour compléter le tracé de C_f dans D_f , on utilise la symétrie par rapport à (Δ) (respectivement la symétrie centrale de centre I).

b. Parité et choix d'un ensemble d'étude

Si f est paire (respectivement impaire) alors on peut choisir $D_f \cap [0; +\infty[$ ou $D_f \cap]-\infty; 0]$ comme ensemble d'étude et y tracer C_f . Pour compléter le tracé de C_f dans D_f , on utilise la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (respectivement la symétrie centrale de centre O).

c. Périodicité et choix d'un ensemble d'étude

- Si f est périodique de période $T > 0$, on peut choisir $D_f \cap I$ où I est un intervalle de longueur T comme ensemble d'étude puis y tracer C_f . Pour compléter le tracé de C_f dans D_f , on utilise les translations de vecteurs $kT; k \in \mathbb{Z}$.
- Si f est périodique de période $T > 0$ et paire (ou impaire) alors on peut choisir $D_f \cap \left[0; \frac{T}{2}\right]$ comme ensemble d'étude puis y tracer C_f , ensuite on trace C_f sur $\left[-\frac{T}{2}; 0\right]$ en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (ou la symétrie centrale de centre O). Pour compléter le tracé de C_f sur D_f , on utilise successivement les translations de vecteurs $T\vec{i}$ et $-T\vec{i}$.

2. Plan d'étude d'une fonction

Pour représenter C_f dans un repère orthonormé, on peut suivre le plan suivant :

- Déterminer D_f .
- Calculer les limites aux bornes. En déduire l'existence éventuelle d'asymptote à C_f .
- Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.
- Dresser le tableau de variations de f .
- Représenter les points particuliers de C_f (points figurant dans le tableau de variations et points d'intersection avec les axes s'ils existent).
- Représenter les droites particulières (asymptotes, tangentes,...)
- Tracer C_f en s'appuyant sur les variations de f sur chaque intervalle du tableau de variations.

Remarque :

Si les points particuliers et les droites particulières ne suffisent pas pour tracer C_f , on peut dresser un tableau de valeurs permettant de représenter quelques points de C_f .

3. Exemples

a. Exemple 1

Soit f une fonction numérique par $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Etudier f puis tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

- Déterminons D_f et calculons les limites aux bornes.

$$D_f =]-\infty; +\infty[$$

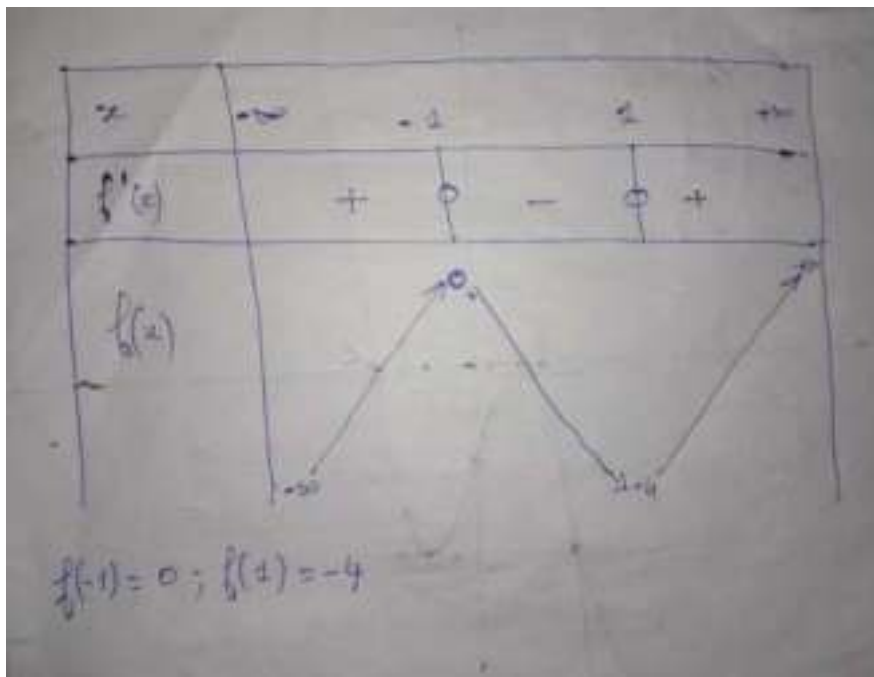
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variations de f .

f est dérivable sur $]-\infty; +\infty[$ et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$;

$f'(x) = 3(x^2 - 1)$; $f'(x)$ a même signe que $x^2 - 1$ car $3 > 0$.

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$



- Les points particuliers du tableau de variations sont $A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.
- Points d'intersection de C_f avec les axes de coordonnées.
 - ✓ Points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

$f(-1) = 0$ donc -1 est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0

$$f(x) = (x + 1)(x^2 - x - 2) \text{ donc } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x^2 - x - 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2 \text{ donc } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 2$$

Par suite $A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

✓ Point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées

$0 \in D_f \Rightarrow f(0) = -2$ donc $D\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ est le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.

- **Droites particulières**

✓ asymptotes

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow C_f$ n'a pas d'asymptote horizontale.

Comme D_f n'a pas de borne réelle alors C_f n'a pas d'asymptote verticale.

On ne connaît donc pas d'asymptotes pour C_f .

✓ Tangentes au niveau des abscisses des points particuliers du tableau de variations

$f'(-1) = 0$ donc C_f admet une tangente horizontale au point $A\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

$f'(1) = 0$ donc C_f admet une tangente horizontale au point $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$.

Comme on ne connaît pas d'asymptotes pour C_f donc pour la tracer, on peut dresser un tableau de valeurs : On peut choisir une valeur x dans $] -\infty; -1[$ et une valeur x dans $] 1; +\infty[$.

x	-2	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	-4	$-\frac{25}{8}$

$$-\frac{25}{8} = -3,125 \cong -3$$

Tracé d'un repère orthonormé : on peut choisir un repère d'unité graphique 1 cm.



b. Exemple 2

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2}$$

Etudier f et tracer C_f

- D_f et limites aux bornes

1) $f(x)$ existe si $x-2 \neq 0$ car le dénominateur
 " " si $x \neq 2$
 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ (1)

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ (qu)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ (qu)

$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - x + 2 = 4 - 2 + 2 = 4$ | $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ (qu)
 $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$		$- \quad 0 \quad +$	

$\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f = -\infty$ (qu)
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f = +\infty$ (qu)
 $\Rightarrow f$ n'a pas de limite en 2.
 (1) $x=2$ est AV à Cf (qu)

- Calculons $f'(x)$ et dressons le tableau de variations de f .

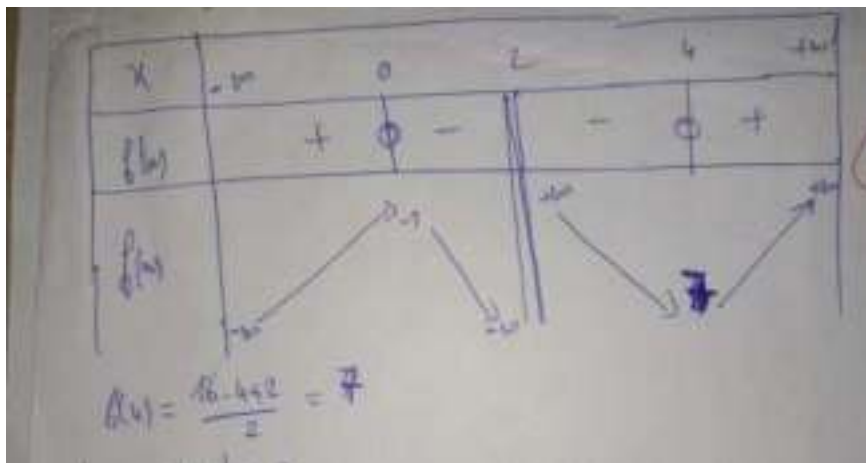
f est dérivable sur D_f et on a :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-2) - x^2 + x - 2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x - 2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \quad (1)$$

$(x-2)^2 > 0$ pour tout $x \in D_f \Rightarrow f'(x)$ a même signe que $x^2 - 4x$ sur D_f

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$



- Les points particuliers du tableau de variations sont $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$.
- Points d'intersection de C_f avec les axes de coordonnées.
 - ✓ Points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0.$$

$x^2 - x + 2 = 0$ n'a pas de solution donc C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

- ✓ Point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées

$0 \in D_f \Rightarrow f(0) = -1$ donc $C\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ est le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées.

- **Droites particulières**

- ✓ asymptotes

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow (\Delta): x = 2$ est une asymptote verticale à C_f .

Comme f est une fraction rationnelle et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, on peut donc chercher une asymptote oblique à C_f en $\pm\infty$. Pour ce, on peut effectuer la division euclidienne de

$$x^2 - x + 2 \text{ par } x - 2.$$

Handwritten work showing the division of $x^2 - x + 2$ by $x - 2$. The quotient is $x + 1$ and the remainder is 4 . The result is written as $f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x - 2}$. The values $a = 1$, $b = 1$, and $c = 4$ are noted, with $c = 4$ circled. The final expression is $f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x - 2}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x - 2} = 0 \Rightarrow (\Delta'): y = x + 1$ est une asymptote oblique à C_f en $\pm\infty$.

Position de C_f par rapport à $(\Delta'): y = x + 1$

$f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x - 2}$; $4 > 0$ donc $f(x) - (x + 1)$ a même signe que $x - 2$ dans D_f .

Sur $] -\infty; 2[$, $x - 2 < 0$ donc $f(x) - (x + 1) < 0$ d'où C_f est en dessous de (Δ) .

Sur $]2; +\infty[$, $x - 2 > 0$ donc $f(x) - (x + 1) > 0$ d'où C_f est en dessous de (Δ) .

✓ Tangentes au niveau des abscisses des points particuliers du tableau de variations

$f'(0) = 0$ donc C_f admet une tangente horizontale au point $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

$f'(4) = 0$ donc C_f admet une tangente horizontale au point $B\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$.

Tracé d'un repère orthonormé : on peut choisir un repère d'unité graphique 1 cm



CHAPITRE 13 : PRIMITIVES

Durée : 6h (Cours+td)

Objectifs spécifiques :

- ✓ Déterminer une primitive d'une fonction donnée dont le calcul utilise les primitives usuelles ;
- ✓ Déterminer la primitive d'une fonction s'annulant pour une valeur donnée.

Prérequis :

- ✓ Continuité d'une fonction ;
- ✓ dérivée d'une fonction.

Supports didactiques :

- ✓ Nouveau Transmath (Term S);
- ✓ Visa Bac ;
- ✓ CIAM Terminal SE ;
- ✓ CIAM TSM ;
- ✓ Ordinateur.

Plan du chapitre

Introduction

I. Notion de primitive

1. Définition et exemples
2. Théorème 1 (admis)
3. Théorème 2
4. Théorème 3
5. Corolaire
6. Théorème 4

➤ Exemple

II. Calculs de primitives

1. Primitives des fonctions usuelles
 - Exemples
2. Opérations sur les primitives
 - Exemples

Déroulement du cours

Introduction

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I . On peut se demander si on peut trouver une fonction F dérivable telle que $F'(x) = f(x)$. Si oui, une telle fonction est-elle unique?

Pour certaines fonctions f donnée, l'objectif de ce chapitre est de donner une condition qui garantit l'existence d'une telle fonction F , de voir dans ce cas qu'elle n'est pas unique et de donner des formules pour les déterminer toutes.

I. Notion de primitive

1. Définition et exemples

a. Définition

Soient f et F des fonctions définies sur un intervalle I . On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

b. Exemples

- La fonction F définie par $F(x) = 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie $f(x)=2$ car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 2 = f(x)$.
- La fonction F définie par $F(x) = x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 2x$ car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = 2x = f(x)$.

2. Théorème 1 (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

3. Théorème 2

Si f est continue sur un intervalle I , F une primitive de f sur I et c un réel constant alors la fonction G telle que $G(x) = F(x) + c$ est une primitive de f sur I . Par conséquent toute fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur intervalle.

Preuve

$G(x)=F(x)+c$. Comme F est dérivable sur I donc G est dérivable sur I et on a $G'(x) = F'(x) = f(x)$ d'où G est une primitive de f sur I . Comme il y a une infinité de réels constants c donc il y a une infinité de fonction G telles que $G(x)=F(x)+c$ par suite f admet une infinité de primitives sur I .

4. Théorème 3

Si F une primitive de f sur un intervalle I et G une autre primitive de f sur I alors il existe un réel constant c tel que $G(x)=F(x)+c$. En d'autres termes la différence entre deux primitives d'une même fonction sur un intervalle est une constante.

Preuve

Soit F une primitive de f sur I et G une autre primitive de f sur I . posons $H(x) = G(x) - F(x)$. H est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ donc la fonction H est constante sur I par suite, il existe un réel constant c tel que $H(x) = c$ d'où $G(x) - F(x) = c$ donc $G(x) = F(x) + c$.

5. Corollaire

D'après les théorèmes 2 et 3, on peut dire que si on connaît une primitive F sur I d'une fonction f alors on connaît toutes les autres primitives de f sur I : ce sont les fonctions G telles que $G(x) = F(x) + c$ où c est un réel constant.

6. Théorème 4

Si f est une fonction continue sur I , $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une seule primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 c'est-à-dire qui vérifie $f(x_0) = y_0$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x)=2x$. Déterminer la primitive sur de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en 1.

La fonction F définie par $F(x) = x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ Soit G la primitive de f sur qui prend la valeur -2 en 1, c'est-à-dire $G(1) = -2$.

Comme G est une primitive de f alors $G(x) = x^2 + c$ où c est un réel. Ainsi $G(1) = 1 + c$. Et comme $G(1) = -2$ donc $1 + c = -2$ d'où $c = -3$. Par suite la fonction G définie

$G(x) = x^2 - 3$ est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en 1.

II. Calculs de primitives

1. Primitives des fonctions usuelles

Le tableau suivant donne des primitives des fonctions usuelles. Il est obtenu à partir de la connaissance des fonctions dérivées des fonctions usuelles.

Fonction f définie par :	Une primitive F de f	Sur l'intervalle
$f(x) = 0$	$F(x) = c$ où c est un réel	$\mathbb{R}$
$f(x) = c$ où c est un réel constant	$F(x) = cx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = -\frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$	$] 0, +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotan^2 x$	$F(x) = -\cotan x = -\frac{1}{\tan x}$	$] k\pi; \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$F(x) = \frac{1}{a} \times \tan(ax + b)$	I si $ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in I$.

Exemples

- Si $f(x) = x^6$ alors F définie par $F(x) = \frac{1}{7}x^7$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Si $f(x) = \frac{1}{x^4}$ alors F définie par $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ est une primitive de f sur $] -\infty, 0[$
- Si $f(x) = \cos(3x + 1)$ alors F définie par $F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x + 1)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- Si $f(x) = \frac{1}{\cos^2(2x-1)}$ alors F définie par $F(x) = \frac{1}{2} \times \tan(2x - 1)$ est une primitive de f sur tout intervalle I tel que $2x - 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exercice d'application : Déterminer une primitive de f sur I dans chaque cas :

- $f(x) = x^{2022} ; I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{x^{1991}} ; I =]0, +\infty[$
- $f(x) = \sin(3x - 2) ; I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{1}{\cos^2(2x-1)}$; I est un intervalle tel que pour tout $x \in I, 2x - 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. Opérations sur les primitives

a. Primitive de la somme de deux fonctions

Si $u(x)$ et $v(x)$ sont des expressions de fonctions admettant sur un intervalle I , des primitives définies respectivement par $U(x)$ et $V(x)$ alors la fonction définie par $U(x)+V(x)$ est une primitive sur I de la fonction définie par $u(x)+v(x)$.

Exemple

Déterminons sur $\mathbb{R}$, une primitive de f définie par $f(x) = x^2 + 2x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction F définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Primitive du produit d'une fonction par un nombre réel constant

Si $u(x)$ est l'expression d'une fonction admettant sur un intervalle I une primitive définie par $U(x)$ et k un réel constant alors la fonction définie par $k \times U(x)$ est une primitive sur I de la fonction définie par $k \times u(x)$.

Exemple :

Déterminons sur $\mathbb{R}$, une primitive de f définie par $f(x) = 2(x^2 + 2x)$

La fonction F définie par $F(x) = 2(\frac{1}{3}x^3 + x^2)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c. Formules permettant de déterminer des primitives de certaines fonctions

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction f définie par	Une primitive F de f	Sur l'intervalle
$f(x) = u'(x)[u(x)]^n, n \in \mathbb{Q}_+$	$F(x) = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}$	I
$f(x) = \frac{u'(x)}{[u(x)]^n}, n \in \mathbb{Q}_+ \setminus \{1\}$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)[u(x)]^{n-1}}$	I si $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)}$	I si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$f(x) = u'(x) \cos[u(x)]$	$F(x) = \sin[u(x)]$	I
$f(x) = u'(x) \sin[u(x)]$	$F(x) = -\cos[u(x)]$	I
$f(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$	$F(x) = \tan[u(x)]$	I si $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in I$

Exemples

Déterminons une primitive sur I de f dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = 2(2x - 4)^2 ; I = \mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{2x-4}{(x^2-4x)^3} ; I =]4; +\infty[$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} ; I =]1; +\infty[$
- $f(x) = x^2 \sin(x^3) ; I = \mathbb{R}$

Solution :

- $f(x) = 2(2x - 4)^2$. Comme f est un produit dont l'un des facteurs est une puissance donc, on peut chercher à l'écrire sous la forme $u'(x)[u(x)]^n$. Pour le faire, on peut choisir « le facteur puissance mais sans l'exposant » comme étant $u(x)$. Ainsi, on pose $u(x) = 2x - 4$ puis calcule $u'(x)$. On a $u'(x) = 2$. Ainsi $f(x) = u'(x)[u(x)]^2$. D'après une formule du tableau ci-dessus, $F(x) = \frac{[u(x)]^{2+1}}{2+1} = \frac{[2x-1]^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = u'(x)[u(x)]^2$ sur $\mathbb{R}$.
- $f(x) = \frac{2x-4}{(x^2-4x)^3}$. Comme f est un quotient dont le dénominateur est une puissance donc, on peut chercher à l'écrire sous la forme $\frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$. Pour le faire, on peut choisir « le dénominateur mais sans l'exposant » comme étant $u(x)$. Ainsi, on pose

$u(x) = x^2 - 4x$ puis calcule $u'(x)$. On a $u'(x) = 2x - 4$. Ainsi $f(x) = \frac{u'(x)}{[u(x)]^3}$. D'après une formule du tableau ci-dessus, $F(x) = -\frac{1}{(3-1)[u(x)]^{3-1}} = -\frac{1}{2(x^2-4x)^2}$ est une primitive de $f(x) = \frac{u'(x)}{[u(x)]^3}$ sur $]4; +\infty[$.

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$. Comme f est un quotient dont le dénominateur est une racine carrée donc, on peut chercher à l'écrire sous la forme $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$. Pour le faire, on peut choisir « le radicande du dénominateur » comme étant $u(x)$. Ainsi, on pose $u(x) = 2x - 1$ puis calcule $u'(x)$. On a $u'(x) = 2$. Ainsi, il manque un facteur constant 2 au numérateur de f pour avoir $u'(x)$, on peut donc multiplier $f(x)$ par 2 et le diviser par 2 donc $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$. D'après une formule du tableau ci-dessus, $2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{2x-1}$ est une primitive de $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ sur $]1; +\infty[$ donc $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = \sqrt{2x-1}$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ sur $]1; +\infty[$.
- $f(x) = x^2 \sin(x^3)$. Comme f est un produit dont l'un des facteurs est une fonction sinus donc, on peut chercher à l'écrire sous la forme $u'(x) \sin[u(x)]$. Pour le faire, on peut choisir « l'expression qui dans sinus » comme étant $u(x)$. Ainsi, on pose $u(x) = x^3$ puis calcule $u'(x)$. On a $u'(x) = 3x^2$. Ainsi $f(x) = \frac{1}{3} u'(x) \sin[u(x)]$. D'après une formule du tableau ci-dessus, $-\cos[u(x)]$ est une primitive de $u'(x) \sin[u(x)]$ sur donc $F(x) = -\frac{1}{3} \times \cos[u(x)] = -\frac{1}{3} \cos(x^3)$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{3} u'(x) \sin[u(x)]$.

Point méthode : Détermination de primitives de fonctions trigonométriques

- Si $f(x) = \cos^n x \sin x$ ou $f(x) = \sin^n x \cos x$; $n \in \mathbb{N}^*$ alors $f(x)$ sous la forme $u'(x)[u(x)]^n$.
- Si $f(x) = P(\sin x) \cos x$ ou $f(x) = P(\cos x) \sin x$ avec P un polynôme alors on développe $f(x)$ puis on met chaque terme de $f(x)$ sous la forme $u'(x)[u(x)]^n$.
- Soit $f(x) = \cos^n x \sin^m x$; $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$
 - Si m et n sont de même parité alors on linéarise $f(x)$.
 - Si m et n sont de parité distincte alors on utilise la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = P(\sin x) \cos x$ dans le cas où n est impair ou $f(x) = P(\cos x) \sin x$ si m est impair.

Exercice d'application

1. Déterminer une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^3} \text{ et } I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2-1}} \text{ et } I = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[; f(x) = (3x+1)\left(\frac{3}{2}x^2+x\right)^2 \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^8+1}{x^2} \text{ (penser à éclater l'écriture) et } I =]0, +\infty[;$$

$$f(x) = \frac{x^5+8x^4-1}{x^2} \text{ (penser à éclater l'écriture) et } I =]0, +\infty[; f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x) \cos x$$

(développer et utiliser la formule $u'(x)[u(x)]^n$) et $I = \mathbb{R}$;

$$f(x) = \tan x + \tan^3 x \text{ et } I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[; f(x) = \tan^2 x \text{ et } I = \left[0; \frac{\pi}{2} \right[.$$

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$. Déterminer sur $\mathbb{R}$, une primitive de f de la forme $\frac{ax+b}{x^2+x+1}$ puis donner toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{(2x+3)^2}$. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$, $f(x) = a + \frac{b}{(2x+3)^2}$. En déduire toutes les primitives de f sur $] -1; +\infty[$.

4. f et u sont les fonctions définies sur $I = \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$ par $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $u(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$. Vérifier que pour tout x de I , $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$. En déduire une primitive sur I de u .

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^3-x^2-x+4}{(1-x)^2}$

a. Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(1-x)^2}$.

b. En déduire la primitive F de f qui prend la valeur 3 en 0.