

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



<b>Matière</b> : Mathématique	<b>Calcul dans <math>\mathbb{R}</math> - Calcul approché</b>	<b>Professeur</b> : M. Sarr
<b>Groupe Excellence</b> (cours en ligne)		<b>Niveau</b> : 2 <sup>nd</sup> S

## Exercice 1 :

1) On pose  $A = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ .

a) Quel est le signe de  $A$  ? Calculer  $A^2$ .

b) En déduire une écriture simple de  $A$ .

2) Soit  $B = \sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}}$ .

a) Déterminer le signe de  $B$ . Calculer  $B^2$ .

b) En déduire une écriture simple de  $B$ .

3) Simplifier  $X = \sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ .

4) Simplifier  $Y = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}\right) : \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right)$ .

5) Simplifier  $Z = \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n+1})^3}$ .

## Exercice 2 :

Soit les réels  $a, b$  et  $c$ .

1) Développer  $(a + b + c)(ab + bc + ca)$ .

2) Développer  $(a + b + c)^2$  et  $(a + b + c)^3$ .

3) Démontrer que si  $a + b + c = 0$  alors  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

## Exercice 3 :

1) a)  $a, b$  et  $c$  sont des réels distincts. Montrer que :  $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$ .

b) Soit trois réels non nuls  $a, b$  et  $c$  tels que :  $ab + bc + ca = 0$ .

Calculer la somme :  $S = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$ .

c) Démontrer que, si  $2x + 4y = 1$ , alors :  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$ .

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



2) Soit  $a$  et  $b$  deux réels positifs.

a) Prouver que :  $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ . (I)

b) En déduire que :  $a + b = 1$  implique  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$  et  $ab \leq \frac{1}{4}$ .

c) En déduire aussi de l'inégalité (I) que :

$$0 < a, 0 < b \text{ et } a + b = 1 \text{ impliquent } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

## Exercice 4 :

1) Soient deux réels  $x$  et  $y$ , strictement positifs.

Démontrer que  $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$  et que :  $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ .

2) Soient trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , strictement positifs.

Démontrer que :  $\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .

## Exercice 5 :

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1) Démontrer que  $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ;

2) Démontrer que  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ ;

3) Comparer  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  et  $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ;

4) Pour quelles valeurs de  $n$  a-t-on  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$  ?

## Exercice 6 :

1) Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs. Prouver que :  $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ;

2) Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels strictement positifs. Démontrer que :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

## Exercice 7 :

Les nombres  $p$  et  $q$  étant des entiers naturels non nuls, démontrer l'équivalence suivante :

(1)  $\frac{p}{q} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{p+3q}{p+q} > \sqrt{3}$ . Plus généralement, les nombres  $p$ ,  $q$  et  $\alpha$  étant des réels tels que  $p > 0$ ,  $q > 0$  et  $\alpha > 1$ , démontrer l'équivalence suivante :

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



(2)  $\frac{p}{q} < \alpha \Leftrightarrow \frac{p+\alpha^2q}{p+q} > \alpha.$

## Exercice 8 :

$x$  et  $y$  sont deux nombres réels tels que  $|x| < 1$  et  $|y| < 1$ .

- 1) Démontrer que :  $|xy| < 1$ . En déduire que :  $1 + xy > 0$ .
- 2) Développer  $(1 - x)(1 - y)$  et  $(1 + x)(1 + y)$ .
- 3) Démontrer que :  $\left| \frac{x+y}{1+xy} \right| < 1$ .

## Exercice 9 :

Compléter le tableau suivant :

Valeur absolue	Distance	Intervalle	Encadrement
$ x - x_0  \leq r$	$d(x; x_0) \leq r$	$[a; b]$	$a \leq x \leq b$
$ x + 1  \leq 2$			
			$-2 \leq x \leq 3$
	$d(x; -1) < 3$		
		$[-4; 6]$	

( $x_0$  désignant le centre de l'intervalle  $[a; b]$ ).

## Exercice 10 :

- 1) Soit  $p \in \mathbb{R}_+$ . Montrer que  $\sqrt{p+1} - \sqrt{p}$  est l'inverse de  $\sqrt{p+1} + \sqrt{p}$ .
- 2) En déduire une expression simple de la somme :

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}.$$

- 3) Déterminer le plus grand entier naturel  $n$  tel que :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < 9.$$

## Exercice 11 :

- 1) On pose  $A = [-2; 2]$  et  $B = ]-\infty; 0[$ .
  - a) Déterminer  $A \cap B$  et  $A \cup B$ .

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



b) Déterminer l'ensemble des réels  $x$  n'appartenant ni à  $A$  ni à  $B$ .

2) Ecrire sous forme d'intervalle l'ensemble  $S$  des réel  $x$  satisfaisant aux conditions précisées dans

chacun des cas suivants :

a)  $x \leq 3$  et  $0 < x \leq 4$ .

b)  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$  ou  $0 < x$ .

## Exercice 12 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

1)  $\left| \frac{17}{8} - 2x \right| = \frac{9}{4}$  ; 2)  $|2x - 3| = 1 - \sqrt{2}$  ; 3)  $|2x| + |x| = |x^2|$  ; 4)  $\frac{3x-4}{|x+5|} = -2$  ;

5)  $|x - 2| = x - 2$  ; 6)  $|2x + 8| + |x - 7| = 0$  ; 7)  $|2x - 3| + |3x - 5| = x - 1$  ;

8)  $E(x) = 2$  ; 9)  $E(x) = 2x - 5$  ; 10)  $|x - 2| = |x^2 - 4x + 4|$  ; 11)  $\left| \frac{x+3}{-x+1} \right| = 3$  ;

12)  $|x - 6| = |x + 8|$  ; 13)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 0,3$  ; 16)  $|3x - 5| = 2x + 3$ .

## Exercice 13 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

1)  $(4x + 5)^2 - (2x + 8)^2 \leq 8x^3 - 27$  ; 2)  $\frac{x-1}{x-2} \leq 4$  ; 3)  $\frac{1}{1+x} \geq \frac{3}{1+x^3}$  ; 4)  $\begin{cases} -3x - 5 \leq \frac{8x-1}{2} \\ x + 7 \geq 4x + 1 \end{cases}$  ;

5)  $\begin{cases} (x+5)(x-2) > 0 \\ \frac{x+3}{7-2x} \leq 0 \end{cases}$  ; 6)  $|x + 2| < -2$  ; 7)  $|x - 2| \geq \frac{-1}{2}$  ; 8)  $\sqrt{(2x - 1)^2} < 2$  ;

9)  $|2x + 3| \geq |7x - 12|$  ; 10)  $|3x - 5| \leq 2x + 3$  ; 11)  $|x + 6| + |x - 10| < 16$  ;

12)  $1 < |3x - 1| \leq 3$  ; 13)  $\begin{cases} |x - 2| < 1 \\ |x - \sqrt{2}| \geq 1 \end{cases}$  ; 14)  $\left| \frac{1}{1-x} \right| \leq \frac{1}{2}$  ; 15)  $\frac{|x+1|}{1-|x|} \geq 0$  ; 16)  $E(x - 2) \geq -5$ .

## Exercice 14 :

1) On considère les nombres réels  $x$  et  $y$  tels que :  $-2 \leq x \leq -1$  et  $2 \leq y \leq 3$ .

Encadrer les nombres réels  $U$  et  $V$  définis par  $U = (1 - x)(1 - y)$  et  $V = \frac{1-y}{1+xy}$ .

2) Sachant que  $x \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[$ , encadrer  $h(x) = -2x^2 + x - 1$ .

# Groupe Excellence



Excellez avec les meilleurs professeurs !

## Exercice 15 :

- 1) Soit  $-7,4 \leq x \leq -7,3$ .
  - a) Donner une valeur approchée de  $x$  et préciser l'incertitude.
  - b) Donner une valeur approchée de  $x$  par excès et par défaut et préciser dans chaque cas l'incertitude.
- 2) Traduire les phrases suivantes par un encadrement.
  - a) 1,21 est une valeur approchée de  $x$  à  $2 \cdot 10^{-2}$  près
  - b) 2,25 est une valeur approchée de  $x$  par défaut à  $10^{-3}$  près
  - c) 3,12 est une valeur approchée de  $x$  par excès à  $2 \cdot 10^{-1}$  près.
- 3) Sachant que  $|\sqrt{30} - 5,4772| \leq 5 \cdot 10^{-5}$  encadrer  $\sqrt{30}$  à  $125 \cdot 10^{-6}$  près puis donner une valeur approchée de  $\sqrt{30}$  à  $125 \cdot 10^{-6}$ .