

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématiques Groupe Excellence (Cours en ligne)	Apprendre à démontrer	Professeur : M. Maissa Fall Tel : 781177433
---	------------------------------	---

Vous avez peut-être déjà vu sur vos copies ces genres d'annotations de vos professeurs :

Manque de raisonnement, raisonnement pas logique, Vous n'expliquez pas, Vous confondez démonstration et explication ... etc.

*Sans doute que **beaucoup ont déjà baissé les bras** en se disant que de toute façon je n'y arriverai jamais.*

Je vous rassure, pour beaucoup de grands mathématiciens aussi c'était un vrai calvaire.

PAS DE PANIQUE !

#Un bon raisonnement passe d'abord par une bonne explication !

Le verbe Expliquer vient du latin palicare qui signifie plier.

Ex palicare signifie déplier

Expliquer cela veut dire que l'on cherche à déplier, ce qui est plié, ce qui est embrouillé pour le rendre plus clair.

On met dans la lumière ce qui nous semble flou pour éviter les interprétations.

C'est la **première étape** sur le chemin de la vérité mathématique.

A la différence de la démonstration qui va avancer des arguments en partant d'une hypothèse pour aller vers une conclusion.

Hypothèse + argumentation → conclusion

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



La démonstration est un parcours qui part d'une hypothèse vers une conclusion et qui se sert d'arguments pour arriver à celle-ci !

Qui donne l'hypothèse ?

L'énoncé de votre devoir, votre contrôle, vos exercices donne cette hypothèse.

Vous allez devoir obligatoirement vous servir d'arguments pour trouver la conclusion.

Où se trouvent les arguments ?

Comme dans toute matière à l'école on ne vous demande pas d'inventer des choses, mais de vous servir de ce que vous avez appris.

Vos cours ne sont pas que rébarbatif à apprendre, ils sont là aussi pour VOUS aider !

Le cours est un réservoir de connaissances et d'arguments dont vous pouvez vous servir pour démontrer.

N'oubliez pas que les mathématiques et la philosophie étaient très liées au départ.

Les philosophes avaient une intuition, énonçaient une hypothèse et cherchaient une conclusion.

La démonstration est un outil qui permet de vérifier si telle chose énoncée est vraie ou fausse et ça par une argumentation solide.

Ne plus vivre dans une illusion mais dans la vérité.

>Voilà à quoi sert une démonstration et à quoi servent les mathématiques !

Le bon raisonnement est ce qui permet d'énoncer les choses vraies, que l'on a prouvées pour en tirer une conclusion qui sera par voie de conséquence VRAIE aussi.

Pensez-y quand vous aurez un devoir quel qu'il soit, n'avancez rien qui n'est pas démontré, ou admis comme une vérité première.

Quatre étapes pour APPRENDRE ses cours sans se décourager ?

Que ce soit à l'école au travail ou dans la vie on doit sans arrêt apprendre des choses nouvelles mais le problème c'est que l'on abandonne souvent au même moment.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Pourtant on essaye, on essaye et on essaye encore jusqu'à ce que l'on se rende compte qu'on a un problème de méthode !

Ce processus est logique si on ne voit pas ces quelques étapes indispensables de l'apprentissage :

- **L'incompétence inconsciente**

C'est la première étape qui n'est pas dérangeante pour l'apprentissage. Nous sommes dans une zone de flou inconscient c'est à dire que nous ne savons pas que nous ne connaissons pas ou ne savons pas faire quelque chose.

- **L'incompétence consciente**

C'est l'étape la plus compliquée, celle où l'on a conscience de ne pas comprendre un théorème, une explication, un problème.

C'est à cette ETAPE précise qu'un très grand nombre d'élèves baissent les bras.

- **La compétence consciente**

Si vous avez dépassé la deuxième étape, vous êtes sur le bon chemin, vous avez dépassé vos limites, vos peurs et vous commencez à acquérir peu à peu les compétences.

A ce stade on dit que l'on est scolaire donc appliqué, on utilise bien chaque technique apprise.

Mais attention, il ne faut pas se relâcher, il faut faire et refaire, encore et encore jusqu'à ce que cela devienne une seconde nature.

A la différence d'avant, vous savez maintenant pourquoi vous n'y arriviez pas !

Faire et refaire oui mais avec une METHODE.

En faisant des erreurs vous avancez dans la connaissance!

A force de faire des erreurs vous allez apprendre de ces erreurs et COMPRENDRE comment les éviter, et avoir accès ainsi à la compétence inconsciente.

- **La compétence inconsciente**

Enfin l'étape ultime, celle qui vous fait passer de connaissances apprises à connaissances acquises.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



De scolaire à personnel, lorsque l'on n'est plus scolaire cela veut dire que l'on a dépassé le stade de l'apprentissage et que l'on peut personnaliser.

C'est là que l'on a les connaissances AUTOMATIQUES.

Vous n'avez plus besoin de penser à bien faire, vous le faites automatiquement !

QUELQUES METHODES POUR DEMONTRER

🕒 *Comment démontrer que deux droites sont parallèles?*

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme (losange, rectangle, carré), alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Si un quadrilatère est un trapèze, alors ses deux bases sont parallèles.
- Si deux droites forment avec une troisième des angles correspondants égaux, alternes-internes égaux ou alternes-externes égaux, alors elles sont parallèles.
- Si l'angle formé par deux vecteurs directeurs des deux droites est nul ou plat.
- L'image d'une droite par une translation, une symétrie centrale, est une droite parallèle.
- [Théorème des milieux] Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté.
- Si deux droites sont parallèles, alors leurs images par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale, une translation, une rotation, sont deux droites parallèles.
- Si deux vecteurs sont égaux, alors leurs supports sont deux droites parallèles.
- [Réciproque du théorème de Thalès.]

🕒 *Comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?*

- Si deux droites forment un angle droit, alors elles sont perpendiculaires.

Groupe Excellence



Excellez avec les meilleurs professeurs !

- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
- La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
- Si un triangle est un triangle rectangle, alors il a un angle droit.
- Si un quadrilatère est un trapèze rectangle, alors il a deux angles droits.
- Si un triangle est isocèle (équilatéral), alors la bissectrice de l'angle principal est aussi la médiane, la hauteur et la médiatrice de la base.
- Si un quadrilatère est un rectangle (carré), alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires deux à deux.
- Si un quadrilatère est un losange (carré), alors ses diagonales sont perpendiculaires.
- Dans un triangle, une hauteur est une droite perpendiculaire à un côté et qui passe par le sommet opposé.
- La tangente à un cercle est une droite perpendiculaire à un rayon en un point du cercle.
- Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs images par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale, une translation, une rotation, sont deux droites perpendiculaires.

🕒 *Comment démontrer qu'un point est le milieu d'un segment ?*

- Le milieu d'un segment est le point de ce segment situé à égale distance de ses extrémités.
- Le centre d'un cercle est le milieu de tous ses diamètres.
- La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
- Une médiane d'un triangle est un segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé.
- Si deux points A et B sont symétriques par rapport à O, alors O est le milieu du segment [AB].
- Si un quadrilatère est un parallélogramme (losange, rectangle, carré), alors ses diagonales ont le même milieu.
- [Réciproque du théorème des milieux.]

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- Dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.
- Une symétrie orthogonale, une symétrie centrale, une translation, une rotation conserve les milieux.
- Si $\vec{IJ} = \vec{JK}$, alors J est le milieu du segment [IK].

⤴ Comment démontrer que deux angles ont la même mesure ?

- Calculer leur mesure (Somme des angles d'un triangle, angles complémentaires, supplémentaires, etc.)
- Si deux angles ont le même complémentaire (supplémentaire) alors ils ont la même mesure.
- La bissectrice d'un angle est la demi-droite, issue du sommet de l'angle, et qui le partage en deux angles de même mesure.
- Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles de base ont la même mesure.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés ont, deux à deux, la même mesure.
- Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont la même mesure.
- Si deux droites sont parallèles, alors elles forment avec une sécante des angles correspondants égaux, des angles alternes-internes égaux et des angles alternes-externes égaux.
- Par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale, une translation, une rotation, l'image d'un angle est un angle de même mesure.
- Si deux angles aigus ont le même cosinus (sinus, tangente), alors ils ont la même mesure.
- Deux angles inscrits, qui interceptent le même arc, ont la même mesure.

⤴ Comment démontrer que deux segments ont la même longueur ?

- En calculant leur longueur [Théorèmes de Pythagore, de Thalès, etc.]
- Le milieu d'un segment est le point de ce segment situé à égale distance de ses extrémités.
- Deux points situés sur un même cercle sont situés à égale distance du centre de ce cercle.

Groupe Excellence



Excellez avec les meilleurs professeurs !

- Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
- Si un triangle est isocèle, alors il a deux côtés de même longueur.
- Si un quadrilatère est un trapèze isocèle, alors ses 2 côtés (qui ne sont pas les bases) ont la même longueur.
- Si un quadrilatère est un parallélogramme (losange, rectangle, carré), alors ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
- Si un quadrilatère est un losange (carré), alors ses 4 côtés ont la même longueur.
- Si un quadrilatère est un rectangle (carré), alors ses diagonales ont la même longueur.
- Si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de l'angle.
- Si un triangle est rectangle, alors le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit au triangle.
- Si un triangle est un triangle rectangle, alors la longueur de la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur l'hypoténuse.
- Une symétrie orthogonale, une symétrie centrale, une translation, une rotation conserve les distances.
- Si deux vecteurs sont égaux alors, leurs longueurs sont égales.

⬆ *Comment démontrer que trois points sont alignés ?*

- Si trois points appartiennent à la **même** droite, alors ils sont alignés.
- Si trois points forment un angle plat (ou nul), alors ils sont alignés.
- Si deux droites sont parallèles et ont un point commun, alors elles sont confondues
- Le milieu d'un segment est le point de ce segment situé à égale distance de ses extrémités.
- Si trois points sont alignés, alors leurs images par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale, une translation, une rotation sont alignés.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



⤴ *Comment démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment ?*

- La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
- Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.
- Si une droite perpendiculaire à un segment contient un point équidistant de ses extrémités, alors c'est la médiatrice de ce segment.
- Si un point B est le symétrique d'un point A par rapport à une droite D, alors D est la médiatrice du segment [AB].
- Si un triangle est isocèle, alors la bissectrice de l'angle principal est aussi la médiane, la hauteur et la médiatrice de la base.
- Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point appelé centre du cercle circonscrit au triangle.

⤴ *Comment démontrer qu'une droite est une hauteur d'un triangle ?*

- Dans un triangle, une hauteur est une droite perpendiculaire à un côté et qui passe par le sommet opposé.
- Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.
- Si un triangle est isocèle, alors la bissectrice de l'angle principal, médiane, médiatrice est aussi hauteur.

⤴ *Comment démontrer qu'un segment est une médiane d'un triangle ?*

- Dans un triangle, une médiane est un segment qui joint un sommet au milieu du côté opposé.
- Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle.

Groupe Excellence



Excellez avec les meilleurs professeurs !

- Dans un triangle, le centre de gravité est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane, en partant du sommet.
- Si un triangle est isocèle, alors la bissectrice de l'angle principal, la hauteur, la médiatrice, est aussi la médiane.

📌 *Comment démontrer qu'une demi-droite est la bissectrice d'un angle ?*

- La bissectrice d'un angle est la (demi-)droite qui le partage en deux angles de même mesure.
- La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points situés à égale distance des côtés de cet angle.
- La bissectrice d'un angle est l'axe de symétrie de cet angle.
- Si un triangle est isocèle, alors la hauteur, la médiane, la médiatrice relative à la base est aussi la bissectrice de l'angle principal.
- Dans un losange (carré), les diagonales sont les bissectrices des angles.
- Les bissectrices des trois angles d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle inscrit au triangle.

📌 *Comment démontrer qu'un triangle est isocèle ?*

- Si un triangle a deux côtés (deux angles) de même mesure, alors c'est un triangle isocèle.
- Si dans un triangle, deux des éléments parmi hauteurs, médianes, médiatrices, bissectrices sont confondus, alors ce triangle est isocèle.
- Si D est l'axe de symétrie d'un triangle ABC et si D contient A, alors le triangle ABC est isocèle en A.

📌 *Comment démontrer qu'un triangle est équilatéral ?*

- Si un triangle a ses trois côtés (trois angles) de même mesure, alors c'est un triangle équilatéral.
- Si un triangle a deux angles de 60° , alors c'est un triangle équilatéral.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- Si un triangle isocèle a un angle de 60° , alors il est équilatéral.

🕒 *Comment démontrer qu'un triangle est rectangle ?*

- Si un triangle a un angle droit, alors c'est un triangle rectangle.
- [Réciproque du théorème de Pythagore.]
- Si dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté, alors ce triangle est rectangle.
- Si trois points sont sur un cercle, et que deux entre eux sont les extrémités d'un diamètre, alors le triangle ainsi formé est rectangle.

🕒 *Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?*

- Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère, non croisé, a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère, non croisé, a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme.
- Si un quadrilatère, non croisé, a ses angles opposés de même mesure, alors c'est un parallélogramme.
- Si $\vec{AB} = \vec{DC}$, alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
- Si $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$, alors le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

🕒 *Comment démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle ?*

- Si un quadrilatère a trois angles droits, alors c'est un rectangle.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.
- Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle.

👉 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un losange ?

- Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur, alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
- Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

👉 Comment démontrer qu'un quadrilatère est un carré ?

- Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un carré.
- Si un quadrilatère est à la fois un losange et un rectangle, alors c'est un carré.
- Si un losange a ses diagonales de même longueur, alors c'est un carré.
- Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un carré.
- Si un losange a un angle droit, alors c'est un carré.

👉 Comment démontrer que deux vecteurs sont égaux ?

- Si deux vecteurs ont la même direction, le même sens et la même longueur, alors ils sont égaux.
- Si A et C ont pour image B et D dans la même translation, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Si deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, alors ils sont égaux.

👉 Monter une égalité ou une inégalité : $A = B$ ou $A < B$ ou $A > B$

- La méthode directe $A = \dots = B$ transformer A pour obtenir B

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Ex : Démontrer que $A = \left[\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \right]^2 + \left[\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right]^2 = 1$

- La méthode directe inverse $B = \dots = A$. transformer B pour obtenir A

Ex : Montrer que $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3) = (x + 1)^2 - 4$

- Egalité avec une troisième expression $\begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = B$

Ex : Montrer que $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

- La méthode de la différence : Il faut dans ce cas calculer de $A - B$ (dans le cas d'une égalité on trouve 0 et pour une inégalité on étudie le signe)

Ex : Comparer $A(x) = (x + 2)^2$ et $B(x) = (2x - 5)^2$

Ex : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1; 2\}$, comparer les nombres $A = \frac{n+2}{n}$ et $B = \frac{n}{n-2}$

Ex : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$

- La méthode du quotient

Si A et B sont strictement positifs, on compare $\frac{A}{B}$ et 1.

Ex: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $f(n) = \frac{n^2-1}{n^2+2n}$ et $g(n) = \frac{n+1}{n-2}$

- La méthode des questions équivalentes :

$A = B?$

$\dots = \dots ?$

$C = C$ ce qui est vrai donc l'hypothèse de départ $A = B$ est vraie.

Ex: Montrer que si a et b sont deux réels positifs, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Ex: Montrer que si a et b sont deux réels positifs $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$

- N.B cette démarche peut être considéré comme un raisonnement par chaînage arriéré

- La méthode des certitudes $n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2 \Rightarrow 2n + 1 \geq 3 \Rightarrow \dots$

Ex : Montrer que si $x > 3$ alors $x^2 - \frac{5}{x} > 7$

Groupe Excellence



Excellez avec les meilleurs professeurs !

Ex : Après avoir remarqué que $0 < n - 2 < n$, si $n \geq 3$, comparer

$$A = 1 + \frac{2}{n} \text{ et } B = 1 + \frac{2}{n-2} \text{ si } n \geq 3$$

Ex : Soit x un nombre réel de l'intervalle $[3;5]$. On donne

$$f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \text{ démontrer que } \frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{5}{6}$$