

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématiques	Série : Polynômes SAF-SAP	Professeur : M. SARR
Groupe Excellence (Cours en ligne)		Niveau : 1S1 Tel : 781177433

SAF SAP 1 :

Soit P un polynôme de degré n , $n \geq 1$.

- 1) Montrer que si P a n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$ alors il existe un polynôme Q tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, on ait : $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)Q(x)$
- 2) En déduire que tout polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
- 3) Existe-t-il un polynôme P non nul tel que $\forall x \neq 0, x^5 P(\sqrt{x^2 + 1}) = P(x - 1)$ et tel que 1 soit racine de P ?

SAF SAP 2 :

Soit m et n deux entiers naturels non nuls et soit P le polynôme défini par :

$$P(x) = x^{2m} + (x + 1)^n - 1$$

- 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x^2 + x$. Dans toute la suite on désigne par $A(x)$ un polynôme de $d^\circ \geq 1$
- 2) On pose $B(x) = [A(x)]^{2m} + [A(x) + 1]^n - 1$
 - a) Montrer que $B(x)$ est divisible $[A(x)]^2 + A(x)$
 - b) Montrer si x_0 est une racine de $A(x)$ alors x_0 est aussi une racine de $B(x)$
- 3) On pose $A(x) = x^2 - 3x + 2$; $m=1$ et $n=2$
 - a) Ecrire en produit de facteurs irréductibles de $B(x)$
 - b) Résoudre alors $B(x) \geq 0$.

SAF SAP 3 :

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs, non nuls. On dit que b est un diviseur de a , ou que a est un multiple de b , s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$. On dit aussi que b divise a et on note $b|a$.

Exemple : $-2|14$ car $14 = -2(-7)$; $3|-12$ car $-12 = 3(-4)$

- I) Soit $H(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ un polynôme normalisé de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$
 - 1) Démontrer que si $H(x)$ admet une racine dans $\mathbb{Z}$ alors celle-ci divise a_0

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- 2) Les polynômes $A(x) = x^3 - x^2 - 109x - 11$ et $B(x) = x^{10} + x^5 + 1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$
- II) Soit $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers de degré 3 tel que $a_3 \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.
On suppose que $P(x)$ admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ écrite sous forme irréductible (p et q sont premiers entre eux).
- 1) Montrer que p divise a_0 et q divise a_3 .
 - 2) Application :
 - a) Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x + 5$ dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$.
 - b) Montrer que le polynôme $x^3 + 3x - 1$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{Q}$.

SAF SAP 4 : Concours Général Sénégalais 2006

P est un polynôme non nul de degré n, défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Soit Q le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $Q(x) = P(x)P(x+2) + P(x^2)$

- 1) Montrer si $a_n \neq -1$ alors $Q(x)$ est de degré $2n$.
- 2) On suppose dans la suite que $p(x)$ vérifie la propriété
(R): $P(x)P(x+2) + P(x^2) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On se propose de montrer que si $p(x)$ admet une racine a alors $a = 1$. On suppose que $p(x)$ admet une racine a c'est-à-dire $p(a) = 0$.

- a) Montrer que a^2, a^4 sont des racines de $p(x)$. En déduire que a^{2k} , où $k \in \mathbb{N}$ est une racine de $p(x)$
- b) Déduire de ce qui précède si $|a| \neq 1$ alors $p(x)$ a une infinité de racines
- c) En déduire que $|a| = 1$
- d) Montrer $(a-2)^2$ est une racine de $p(x)$
- e) Déduire de d) et c) que $a = 1$.

SAF SAP 5 : Concours Général Sénégalais 2008

Pour tout P on considère le polynôme ΔP , défini pour tout x par $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$

- 1) Calculer $\Delta P(x)$ dans chacun des cas suivants :
 - a) $P(x) = 2x + 1$, b) $P(x) = x^2 - 4x + 6$ et c) $P(x) = x^3$
- 2) Vérifier que si P et Q sont deux polynômes, λ et μ deux réels alors
$$\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Delta P + \mu \Delta Q$$
- 3) Montrer si P est un polynôme de degré n ($n \geq 1$) alors ΔP est de degré $n - 1$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Montrer que la réciproque est vraie

4) On note P_0 et P_1 les polynômes respectifs définis par $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x - 1$

a) Vérifier que $\Delta P_1 = P_0$

b) On admet qu'il existe un unique polynôme noté P_2 tel que $P_2(1) = 0$ et $\Delta P_2 = P_1$
Déterminer $P_2(x)$.

Application :

Soit n un entier naturel non nul. En écrivant l'égalité $\Delta P_2(k) = P_1(k)$ pour

$$k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$$

Montrer la formule suivante : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

5) On pose $\Delta^2 P = \Delta(\Delta P)$

a) Montrer que pour tout polynôme P de degré 2, on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = P(1) + \Delta P(1) \cdot (x-1) + \frac{\Delta^2 P(1)}{2} (x-1)(x-2)$$

b) Trouver alors un polynôme P de degré 2 tel que $P(1) = -1$, $P(2) = 9$ et $P(3) = 21$.

SAF SAP 6 : Théorème de Kakeya-enestrom

On note (E) l'équation : $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

On désigne par M le plus grand des nombres $\left| \frac{a_1}{a_0} \right|; \left| \frac{a_2}{a_0} \right|; \dots; \left| \frac{a_n}{a_0} \right|$

Le but du problème est de démontrer que toutes les solutions de (E) si elles existent, sont dans l'intervalle

$$]-1-M; 1+M[.$$

1) Démontrez que (E) a les mêmes solutions que l'équation :

$$\frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n} = -1 \quad (E')$$

2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0 x^n}$

a) Démontrer que $|g(x)| \leq M \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \dots + \frac{1}{|x|^n} \right)$

b) Montrer que pour tout $|x| \geq 1+M$ $|g(x)| \leq M \left(\frac{1}{1+M} + \frac{1}{(1+M)^2} + \dots + \frac{1}{(1+M)^n} \right)$

En déduire que $\forall |x| \geq 1+M$ on a $|g(x)| < 1$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



On pourra utiliser la relation $\forall q \neq 1, n \in \mathbb{N}^*, q + q^2 + \dots + q^n = q \frac{(1-q^{n+1})}{1-q}$

c) Démontrer que si $|x| \geq 1 + M$ alors x n'est pas solution de (E).

Déduisez-en que les solutions de (E) sont dans l'intervalle $] -1 - M; 1 + M[$.

3) Application :

- Montrer que l'équation $8x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$, a au moins une solution.
- Montrer que toutes ses solutions sont dans $] -1.625; 1.625[$.

SAF SAP 7 : Polynômes de Lagrange

Soit n un entier naturel ou égal à 1, $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres réels $b_1, b_2, \dots, b_n$ n autres nombres réels. On se propose de démontrer le résultat suivant :

« Il existe un unique polynôme P vérifiant les conditions suivantes :

- $\deg(P) \leq n - 1$;
- $P(a_1) = b_1, P(a_2) = b_2, \dots, P(a_n) = b_n$.

Ce résultat s'appelle **théorème de Lagrange**

- On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q vérifiant les conditions a) et b). Démontrer que $P - Q = 0$.

- Conclure sur l'unicité de P .

- Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_n)}{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}$$

- Vérifier que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, L_i est un polynôme de degré $n - 1$. Les polynômes L_i sont appelés **polynômes interpolateurs de Lagrange**

- Vérifier que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, on a :

$$L_i(a_1) = L_i(a_2) = \dots = L_i(a_{i-1}) = L_i(a_{i+1}) = \dots = L_i(a_n) = 0 \text{ et } L_i(a_i) = 1$$

- Démontrer que

$$P(x) = \sum_{i=1}^n b_i L_i(x) = b_1 L_1(x) + b_2 L_2(x) + \dots + b_n L_n(x)$$

est un polynôme qui vérifie les conditions a) et b) du **théorème de Lagrange**

- Enoncer une conclusion.

Application 1 :

Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1, P(0) = -1$ et $P(1) = -1$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Ce polynôme est-il unique ?

Application 2 :

Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(0) = 1, P(1) = 0, P(-1) = -2 \text{ et } P(2) = 4$$

Application 3 :

Déterminer tous les polynômes P tel que $P(-1) = 1, P(0) = -1$ et $P(1) = -1$

SAF SAP 8 : Concours Junior Polytech 2011

Soient x, y et z trois réels positifs tel que $xyz > 1$, on veut montrer que

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + x^2 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + y^2 + x^2} \geq 0 \quad (E)$$

- 1) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels. Démontrer l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**.

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2$$

Indication : Utiliser le trinôme $\varphi(t) = \sum_{k=1}^n (ta_k + b_k)^2$

- 2) Montrer que (E) est équivalent à $\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{1}{y^5 + x^2 + z^2} + \frac{1}{z^5 + y^2 + x^2} \leq \frac{3}{x^2 + y^2 + z^2}$

- 3) En utilisant l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, démontrer que :

$$(x^5 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x} + y^2 + z^2 \right) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

- 4) Montrer finalement que $\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{3(y^2 + z^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^2}$. En déduire (E).