Matière : Mathématiques	**Série 9 : BARYCENTRE-PRODUIT SCALAIRE**	**Professeur** : M. Maissa Fall
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : 1S1

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle, I , J et K les points définis par $4\overrightarrow{AI'} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{O'}$ $\overrightarrow{AJ'} - \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{O'}$ et $4\overrightarrow{BK'} + 3\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{O'}$ Montrer que (AK), (BJ) et (CI) ont un point commun.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle, B' et C' sont les milieux respectifs

des segments $[AC]\ et\ [AB]$.

I et J sont les points du segment $[BC]$ tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) a) I est le barycentre de $\{(B,b);(C,c)\}$. Déterminer b et c.

   b) J est le barycentre de $\{(B,b');(C,c')\}$. Déterminer b' et c'.

2) Soit H le point défini par $\overrightarrow{C'H} = \frac{3}{5}\overrightarrow{C'J}$. H est le barycentre de $\{(C',t);(J,s)\}$.

   Déterminer t et s.

3) Montrer que H est le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\beta)(C,\delta)\}$ $\alpha,\ \beta\ et\ \delta$ étant des réels à déterminer.

4) a) Exprimer $\overrightarrow{HI}$ en fonction de $\overrightarrow{HB}\ et\ \overrightarrow{HC}$ puis $\overrightarrow{HB'}$ en fonction de $\overrightarrow{HA}\ et\ \overrightarrow{HC}$.

   b) En déduire que l'on a $3\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HB'} = \vec{0}$ et que les points I, H et B' sont alignés.

5) Soit K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

   a) Comparer $\overrightarrow{IH}\ et\ \overrightarrow{IK}$.

   b) Soit G le barycentre du système $\{(A,1);(B,2);(C,2);(K,-1)\}$. Préciser la position de G

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A. I est le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de I sur (AC) et J le milieu de $[IH]$. Démontrer que les droites (AJ) et (BH) sont : perpendiculaires

a) en s'appuyant sur le produit scalaire.

b) en introduisant le milieu K de $[HC]$ et en démontrant que J est l'orthocentre du triangle AIK.

Exercice 3 :

ABC est un triangle et (Δ) une droite quelconque. On désigne

par A',B' et C' respectivement les projetés orthogonaux de A,B et C sur (Δ).

Soit (D_1) la perpendiculaire à (BC) passant par A'.

(D_2) la perpendiculaire à (CA) passant par B'.

(D_3) la perpendiculaire à (AB) passant par C'.

1) Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{C'B'}.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C'A'}.\overrightarrow{CB}$ (1)

2) Démontrer que (D_1) et (D_2) sont sécantes. Soit I leur point d'intersection.

3) a) Comparer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{IB'}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{IA'}$.

b) Déduire de la relation (1) que $\overrightarrow{IC'}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont concourantes.

Exercice 4 :

A et B sont deux points tels que AB=3cm. Déterminer l'ensemble des point M du plan dans les cas suivants :

1) $2MA^2 - MB^2 = 3$ 2) $\overrightarrow{AB}.(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = -3$ 3) $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) = 0$

4) $\frac{MA}{MB} = 2$ 5) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que :

BC=2a et AB=AC=3a où a >0.

Soit G le barycentre des points (A ,2) (B, 3) (C, 3). Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [AI].

1) Montrer que G est le milieu de [IJ].
2) M étant point du plan, calculer en fonction de MG et de a : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$
3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 18a^2$
4) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 22a^2$
5) Montrer que les droites (BC), (AB) et (AC) ont, chacune, un unique point commun avec E
   Que représente le point G pour le triangle ABC

Exercice 6 :

Soit ABC, un triangle équilatéral et φ l'application qui a tout point M du plan associe le réel :

$\varphi(M) = MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ .On pose $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = a$ avec a>0

1) Soit G défini par : $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .Calculer GA^2, GB^2 et GC^2 en fonction a
2) Déterminer les réels α, β et δ tels que G soit le barycentre du système $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\delta)\}$
3) Trouver et représenter l'ensemble Γ des points M satisfaisant à : φ (M)=a^2 .

Exercice 7 :

ABC, un triangle tel que BC=4cm, $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$ et $\hat{C} = \frac{3\pi}{4}$ .Soit f l'application du plan dans IR

définie par : $f(M) = MB^2 - 3MC^2$

1) Calculer AB et AC

2) Calculer f (A), f (B) et f(C)

3) Déterminer k pour la ligne de niveau k de f passe par : a) le milieu I de BC b) le point A

Exercice 8 :

Dans le plan on donne le rectangle ABCD tel que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = a$ et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = b \quad (0 < a < b)$

Construire l'ensemble des points M du plan défini par

$$2a^2 + b^2 \leq MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \leq a^2 + 2b^2.$$

Exercice 9 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. $A(-2;-1)$, $B(-4;3)$ et $C(-3;6)$

Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC en précisant son centre et son rayon.

Exercice 10 :

: Soit ABC un triangle, on pose BC=a, AC=b et AB= c ; A' est le milieu de [BC], B' celui de [AC] et C'celui de [AB] . Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.

1) Montrer que, pour tout point M du plan , on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$

2) En calculant de deux façons différentes $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2$, établissez que :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA'] et [BC].

Montrer que lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a , b et c.

Exercice 11 :

Soit A, B, C trois points non alignés du plan tels que le tringle ABC ne soit pas équilatéral. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC] ,[CA] et [AB].On pose a=BC , b=CA et c=AB .

1) On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$.

Montrer que $\vec{u} = (a^2 - b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{AB}$.En déduire que $\vec{u}$ n'est pas un vecteur nul.

2) Pour tout point M du plan, on pose : $f(M) = a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$

a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Calculer $f(O)$.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2 - c^2)$.En déduire $f(G)$.

c)Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

Exercice 12 :

Soit ABC un triangle rectangle en A, ξ le cercle circonscrit, (Δ) est une droite variable passant par C rencontrant la hauteur (AH) en M, le cercle ξ en N. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CN}$ ne dépend pas de (Δ).

Montrer par ailleurs que $AB^2 = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = BH.\ BC$ et $AC^2 = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = CH.\ CB$ et en déduire que : $AH^2 = HB.HC$

Exercice 13 :

Soit ABC un triangle.

1. Démontrer que tout point M du plan $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
2. Démontrer que les hauteurs issues des sommets B et C se coupent en un point H tel que $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$
3. En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes au point H
4. Soit (O, I, J) un repère orthonormé. On considère les points A(0, 2), B(2, -2) et C(-2, -3) calculer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

Exercice 14 :

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit ζ un cercle de centre O et de rayon R. soit M un point du plan, Une droite passant par M coupe ζ en deux points A et B (éventuellement confondus).

1. Démontrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2$ (**indication** : on pourra faire intervenir le point A' diamétralement opposé à A).

Le produit $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est indépendant de la sécante choisie. On l'appelle Puissance du point M par rapport au cercle ζ. Dans la suite on la note **P(M, C)**

2. Suivant la position du point M dans le plan, étudier le signe de P(M, C))
3. Soient respectivement ζ et ζ' deux cercles de centre O et O' distincts et de rayon R et R' ; démontrer que l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant P(M,C) = P(M,C') est une droite orthogonale à (OO').

Exercice 15 :

Soit (O, I, J) un repère orthonormé, on considère les points A(1,-3), B(4,1) et C(2,3)

1. Calculer AB, BC , et AC
2. Calculer une valeur approchée de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ à un dixième de degré prés.
3. Calculer les rayons R et r du cercle circonscrit et du cercle inscrit.

Exercice 16 :

Calculer la surface d'un hexagone régulier inscrit

dans un cercle de rayon 3cm.

Exercice 17 :

On donne un triangle ABC, (AA'), (BB') et (CC') les trois hauteurs, A_1, B_1 et C_1 les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] ; G le centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit.

1. Démontrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overline{BA'}.\overline{BC} = \overline{BC'}.\overline{BA}$. Etablir deux résultats analogues
2. En déduire (en utilisant Céva) que les trois hauteurs sont concourantes.
3. Démontre que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{OA_1}$
4. En déduire que le vecteur $3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à (CA).
5. Démontrer que $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$; en déduire que :
   a) O, G et H sont sur une même droite (*droite d'Euler).*
   b) $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA_1}$ et deux autres égalités analogues.

Exercice 18 :

On considère une droite (D), un point P extérieure à cette droite et H le projeté orthogonal de P sur (D). A tout point M de la droite (D), on associe le point N barycentre des points pondérés (M, HP^2) et (P, HM^2).

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{HN}$ en fonction de $\overrightarrow{HM}$ *et* $\overrightarrow{HP}$.
2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{HN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont orthogonaux.
3. Déduire de la question précédente le lieu des points N lors que M décrit (D).

Exercice 19 :

Soit ABC un triangle On pose a = BC, b = AC , c = AB, α = a cos $\hat{B}$ cos $\hat{C}$,
β = b cos $\hat{A}$ cos $\hat{C}$, γ = c cos $\hat{A}$ cos $\hat{B}$.

On admettra que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

1. Soit H le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déduire de la question précédente que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
3. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
4. Soit G le centre de gravité du triangle ABC, O le centre de son cercle circonscrit et H' le point tel que : $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
   a) Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AH'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
   b) Démontrer que H' = H
5. Démontrer que O est le barycentre de (G,3) et (H, -1)
6. Vérifier que $\beta + \gamma$ = a cos $\hat{A}$, et Déduire des questions précédentes que O est le barycentre de (A, a cos $\hat{A}$), (B, b cos $\hat{B}$) et (C, c cos $\hat{C}$).

Exercice 20 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) :

1. (D) est la droite passant par A(-1 ;3) et de coefficient directeur –1
2. (D) est la droite passant par B(3 ; -4) et dirigée
3. par un vecteur directeur $\vec{u}$ vérifiant $(\vec{i}, \vec{u}) = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice 21 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t \end{cases}$ $t \in$ IR.

1. La droite (D) passe-t-elle par A5-2 ; 1) ? Par B(1 ; -1) ? Par C(4 ; -7) ?
2. Quelle est le point de (D) qui a pour abscisse 2 ? Pour ordonnée 0 ?
3. Donner une équation cartésienne de la droite (D).

Exercice 22 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), on considère le point A(-1 ; 3) et la droite (D) : x + y – 2 = 0

A tout point M de (D), on associe le point N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\,\overrightarrow{AH} - 3\,\overrightarrow{AK}$ ou H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (D).
2. Calculer les coordonnées de N en fonction de celles de M
3. Déterminer le lieu (D') des point N lorsque M parcourt (D).

Exercice 23 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer la distance du point A à la droite (D) dans les cas suivants.
   a) $(D): y = -3x + 4 \quad et \quad A(3,-1)$

   b) $(D): \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \quad et \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) m étant un paramètre réel et soit $(D_m): mx - (2m+1)y + m - 3 = 0$

   a) Calculer la distance d(m) du point A(1,1) à (D_m).

   b) Déterminer (D_m) sachant que d(m)=1.

Exercice 24 :

On considère le triangle de sommet A(-2 ; –1), B(-4 ;3), C(-3 ;6)

dans un R.O.N. (O $\vec{i}$ $\vec{j}$)

1. calculer le rayon R de son cercle circonscrit .
2. Déterminer, par ses coordonnées, le vecteur unitaire $\vec{u}$ De la demi-droite d'origine O contenant A. Déterminer de même le vecteur unitaire $\vec{v}$ De la demi-droite d'origine O contenant B.
3. On rappelle que $\vec{u}+\vec{v}$ est un vecteur directeur de AOB . Déterminer une équation cartésienne de cette bissectrice .

EXERCICE DE RECHERCHE

ABC est un triangle du plan euclidien. Un triangle PQR sera dit inscrit dans le triangle ABC si les points P, Q et R sont respectivement sur situés sur les segments $[BC]$,$[CA]$, $[AB]$ et sont distincts des extrémités de ces segments .Un tel triangle PQR inscrit dans le triangle ABC sera qualifié de **Cévien** si les droites (AP) ,(BQ)et (CR)sont concourantes .A un triangle PQR inscrit dans le triangle ABC on associe les six nombres réels $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ strictement positifs ,définit par les relation suivantes :

$$\overrightarrow{BP} = \mu_1 \overrightarrow{BC} \ , \ \overrightarrow{PC} = \lambda_1 \overrightarrow{BC} \ , \ \overrightarrow{CQ} = \mu_2 \overrightarrow{CA} \ , \ \overrightarrow{QA} = \lambda_2 \overrightarrow{CA} \ , \overrightarrow{AR} = \mu_3 \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{RB} = \lambda_3 \overrightarrow{AB} .$$

1)a)Calculer le rapport de l'aire du triangle ARQ à l'aire du triangle ABC en fonction de μ_3 et λ_2.

b) Montrer que le rapport de l'aire du triangle PQR à l'aire du triangle ABC est :

$$r = 1 - \mu_3\lambda_2 - \mu_1\lambda_3 - \mu_2\lambda_1 .$$

c)Montrer que $\mu_i + \lambda_i = 1 \ \forall i \in \{1,2,3\}$.

d) En déduire que $r = \mu_1\mu_2\mu_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

2) On suppose que PQR est Cévien. On appelle M le point d'intersection des droites (AP), (BQ)et (CR).

a) Déterminer les rapports : $\frac{aire(ABP)}{aire(APC)}$, $\frac{aire(MBP)}{aire(MPC)}$, $\frac{aire(AMB)}{aire(AMC)}$, $\frac{aire(AMC)}{aire(CMB)}$ et $\frac{aire(BMC)}{aire(BMA)}$.

b) En déduire que $\mu_1\mu_2\mu_3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$.

3) a) Montrer que le tringle PQR , Cévien, est d'aire maximale si et seulement si $S = \mu_1\mu_2\mu_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ est maximale.

b) Montrer que $S \leq \frac{1}{4}$.

c)En déduire qu'il existe un triangle Cévien inscrit dans le triangle ABC d'aire maximale.