

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématique	Série 6 : SUITE NUMERIQUE	Professeur : M. Maissa Fall
Groupe Excellence (cours en ligne)		Niveau : 1S1

Exercice 1 :

Trouver 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme vaut 16 et la somme des carrés vaut 84

Exercice 2 :

La somme des 2 premiers termes d'une suite arithmétique est $m + 11$; leur produit est $8m + 24$. Trouver les 3 premiers termes de cette suite. (2 solutions)

Exercice 3 :

Dans une suite arithmétique la somme des premiers termes de rang impair est 225 et la somme des premiers termes de rang pair vaut 290. Trouver les 10 premiers termes de cette

Exercice 4 :

Déterminer 3 termes consécutifs a , b et c d'une suite géométrique à termes positifs sachant : que $ac = \frac{25}{9}$ et $a + b + c = \frac{65}{9}$.

Exercice 5 :

Soit (V_n) la suite définie par : $V_0 = 0$ et pour tout n $V_{n+1} = \frac{2V_n - 1}{V_n - 2}$ pour tout n . Montrer que (V_n) est périodique. Montrer que la suite U telle que $U_n = n - 3 E\left(\frac{n}{3}\right)$, où E est la fonction partie entière, est périodique.

Exercice 6 :

Soit la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{20 + U_n} \end{cases}$$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq 5$
- 2) Montrer que (U_n) est croissante
- 3) En déduire que (U_n) converge vers un réel à déterminer.
- 4) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - 5| \leq \frac{1}{5} |U_n - 5|$ puis que $|U_n - 5| \leq 5 \left(\frac{1}{5}\right)^n$
- 5) Retrouver les résultats de la troisième question.

Exercice 7 :

Soit la suite (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \end{cases}$$

- 1) Montrer pour tout entier naturel $U_n \geq -\frac{1}{2}$
- 2) Etudier les variations de (U_n)
- 3) En déduire que (U_n) admet une limite à déterminer
- 4) Soit (V_n) définie par $V_n = \frac{2U_n + 1}{u_{n+1}}$. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique.

Exprimer U_n en fonction de n et retrouver sa convergence

Exercice 8 :

Soit
$$\begin{cases} U_0 = \frac{2}{3} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

- 1) Calculer U_1 et U_2
- 2) Soit (V_n) définie par $V_n = U_n \sqrt{2} - n$. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique
- 3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . Etudier la convergence de (U_n)
- 4) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer sa limite.

Exercice 9 :

Soit
$$\begin{cases} U_0 = \frac{4}{5} \\ U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n - n - \frac{4}{3} \end{cases} \quad V_n = U_n + an + b$$

- 1) Déterminer les nombres réels a et b sachant que (V_n) soit une suite géométrique .
En déduire V_n puis U_n en fonction de n .
- 2) $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



$$T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

Calculer S_n et T_n en fonction de n .

Exercice 10 :

On considère les suites (V_n) et (U_n) telles que
$$\begin{cases} V_0 = -1 \\ V_1 = a \in \mathbb{R} \\ V_{n+1} = (1-a)V_n + aV_{n-1} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$U_n = V_{n+1} - V_n.$$

- 1) a) Calculer les termes U_0 et U_1 en fonction de a
b) Montrer (U_n) est géométrique, en déduire U_n en fonction de a et de n .
- 2) On pose (S_n) tel que $\forall a \neq -1, S_n = U_0 + \dots + U_{n-1}$
 - a) Exprimer S_n en fonction de V_n
 - b) En déduire que $V_n = -(-a)^n$
- 3) Etudier la convergence de (V_n) pour que :
 - 1^e cas : $|a| = 1$
 - 2^e cas : $|a| \neq 1$

Exercice 11 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel non nul n par :

$$\begin{cases} U_1 = 12 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

- 1) On pose $W_n = V_n - U_n$ pour tout entier non nul. Démontrer que (W_n) est une suite géométrique convergente.
- 2) Exprimer W_n en fonction de n
- 3) Démontrer que (U_n) décroissante et (V_n) croissante.
- 4) Démontrer que pour tout entier non nul $n, U_n \geq V_n$ et en déduire que $V_1 \leq V_n \leq U_n \leq U_1$
- 5) Conclure

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- 6) $T_n = 3U_n + 8V_n$ avec n entier naturel non nul. Montre que (T_n) est une suite constante puis déterminer les limites de (U_n) et (V_n) .

Exercice 12 :

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- 1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$
- 2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2\sqrt{n-1} - 2 \leq U_n$
- 3) En déduire la limite de (U_n)

Exercice 13 :

Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{U_n^2 + 2}} \end{cases}$$

- 1) On considère ϕ la fonction sur $\mathbb{R}^+$ tel que $U_{n+1} = \phi(U_n)$
 - a) Trouver dans $[0 ; 1]$ la valeur de α solution de $\phi(x) = x$
 - b) Démontrer que $\forall x \in [0 ; 1], \quad |\phi'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$
- 2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{N} ; 0 \leq U_n \leq 1$
- 3) a) Montrer que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |U_n - \alpha|$
 - b) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$
 - c) Retrouver sa convergence ?

Exercice 14:

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$$

- 1) Calculer U_2 et U_3 .

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



2) On définit la suite (V_n) par $V_n = U_n + \frac{3}{2}$, $n \geq 1$

- Calculer V_1 et V_2 .
- Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser le premier terme et la raison.
- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
- Montrer que (V_n) et (U_n) sont divergentes.

Exercice 15 :

On considère la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{3}{2}U_n + 1 \end{cases}$$

- Calculer U_1 et U_2 .
- On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - Calculer V_0 et V_1 .
 - Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser le premier terme et la raison.
 - Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .
 - Calculer $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$, puis $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ en fonction de n .

Exercice 16 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$

1-) On définit la suite (V_n) telle que pour tout $n \geq 0$, $V_n = U_n + \alpha$.

Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2-) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

3-) Etudier la convergence de la suite (V_n) puis en déduire celle de la suite (U_n) .

4-) a-) Exprimer $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$ en fonction de n .

b-) En déduire $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$ en fonction de n .

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



c-) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

Exercice 17 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$, $U_1 = 3$ et $U_n = \frac{4U_{n-1} - U_{n-2}}{3}$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

1-) Calculer U_2 , U_3 et U_4 .

2-) On définit (W_n) la suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = U_n - U_{n-1}$.

a-) Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

b-) Exprimer W_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

c-) On pose $P_n = W_1 \times W_2 \times \dots \times W_n = \prod_{k=1}^n W_k$. Exprimer P_n en fonction de n .

d-) Calculer $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ en fonction de n puis en déduire $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ en fonction de n .

e-) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$.

Exercice 18 :

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{U_n + 3}$.

1-) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq 1$.

2-) a-) On pose $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$. Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme V_0 .

b-) Exprimer V_n en fonction de n puis en déduire U_n en fonction de n .

3-) Calculer la limite de la suite (U_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

4-) Exprimer $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ en fonction de n puis calculer sa limite

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Exercice 19 :

Soit (U_n) et (V_n) les suites réelles définies par :

$$\begin{cases} U_1 = 12 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_1 = 1 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = V_n - U_n$.

a) Démontrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer W_n en fonction de n .

2) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et la suite (V_n) est croissante.

3) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $U_n \geq V_n$;

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_1 \geq U_n \geq V_n \geq V_1$

4) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $t_n = 3U_n + 8V_n$

Démontrer que (t_n) est une suite constante et en déduire les limites de (U_n) et (V_n) .

Exercice 20 :

Soit (U_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{1 + U_n}$.

1-) Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 2cm)

a-) Étudier les variations de f puis tracer la courbe (C_f) dans le repère.

b-) Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (U_n) .

2-) Montrer que la suite (U_n) est croissante et majorée par 2.

3-) Déduez-en que la suite (U_n) est convergente. Calculer sa limite.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Exercice 21 :

1-) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout $n \geq 1$.

a-) Justifier que pour tout $k \geq 1$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ et en déduire que pour tout $n \geq 1$

$$U_n \geq 2\sqrt{n-1} - 2.$$

b-) Montrer que la suite (U_n) est divergente.

2-) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2 + k}}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

c-) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 21 :

Etudier la convergence de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

1) $U_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$; 2) ; 3) $U_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{k}{3}\right)$ où E désigne la partie entière ; 4)

$U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n - \sin k}{n^2 + k}$; 6) $U_n = \cos\left(\frac{2^n}{3^n + 4^n}\right)$; 7) ; 7) $U_n = 3^n + (-1)^n$; 8) $U_n = 2^n \tan \frac{\pi}{2^n}$.

Exercice 22 :

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1; 2[$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in [1; +\infty[$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- a) Montrer que l'équation $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in]1; +\infty[$.
- b) Montrer que $\forall x \in]1; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et en déduire que $\forall x \in]1; +\infty[, |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.
- 3) Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = g(U_n)$ et $U_0 = 1$.
- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in]1; +\infty[$.
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.
- d) Montrer que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- e) Déduisez-en la convergence de (U_n) vers α .

Exercice 23 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right), \forall n \geq 1$

- 1) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

Démontrer que la suite (V_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

- 2)a) Démontrer que chacune des fonctions suivantes ne prend que des valeurs positives sur $[0; +\infty[$.

$$f : x \mapsto x - \sin x ; g : x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x \text{ et } h : x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

- b) Sachant que $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n - \frac{1}{24} \frac{(n+1)^2}{n^4} \leq U_n \leq V_n$.

- c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

Exercice 24 :

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Soit (U_n) définie par son terme général U_0 et par la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1$

pour tout entier naturel n .

1) Démontrer que (U_n) est constante si U_0 prend deux valeurs que l'on précisera.

2) On suppose maintenant que $U_0 \in]-1; 0[$.

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < U_n < 0$ et que (U_n) décroissante.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}} (U_n + 1)$.

c) On pose $k = \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n + 1 \leq k^n (U_0 + 1)$.

En déduire que la suite (U_n) admet une limite l à préciser.

Exercice 25 :

On considère la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ à termes réels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} - 4U_{n+1} + 4U_n = 9(-1)^n + n^2 - 4n \text{ et } U_0 = 1, U_1 = 2$$

1) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = \lambda(-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le réel λ pour que (V_n) vérifie la relation de récurrence :

$$V_{n+2} - 4V_{n+1} + 4V_n = 9(-1)^n$$

2) Déterminer le réel μ de façon que la suite (W_n) de terme général $W_n = \mu n^2$ vérifie la relation de récurrence : $W_{n+2} - 4W_{n+1} + 4W_n = n^2 - 4n$

3) Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ la suite de terme général $x_n = U_n - V_n - W_n$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$ et calculer x_0 et x_1 .

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



4) Montrer que la suite $(x_{n+1} - 2x_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme puis le terme général.

5) Montrer que $\forall n \geq 1, U_n = n2^n + (-1)^n + n^2$.

Exercice 26 :

On rappelle que $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$ et on lit factorielle n .

Par convention $0! = 1$ et $n! = n(n-1)!$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \leq 1 - \frac{1}{2^n n!}$

3) Montrer par récurrence que : $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7, $\forall n \geq 1$.

4) Si $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \geq 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

Prouver que $F_{n+1} \times F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.