Matière : Mathématique	**Série 5 : ETUDE DE FONCTION**	**Professeur** : M. Maissa Fall
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : 1S1

Exercice 1 :

f est une fonction de R dans R, calculer les nombres dérivés en x_o dans chacun des cas suivants :

1°) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+2}$; $x_o = -2$; 2°) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$; $x_o = 0$

3°) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$; $x_o = \frac{\pi}{4}$; 4°) $f(x) = (x^2 + 1) \tan x$; $x_o = \frac{\pi}{4}$

5°) $f(x) = x \sin x + 1$; $x_o = \frac{\pi}{3}$; 6°) $f(x) = \cos(x-2)$; $x_o = \frac{\pi}{3} + 2$

Exercice 2 :

Exercice 2 :

A) Dans chacun des cas suivants déterminer la dérivée de la fonction f après avoir déterminer son ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité.

1) $f(x) = \sqrt{x+4+\frac{1}{x}}$; 2) $f(x) = (x-5)^2\sqrt{x+1}$; 3) $f(x) = 4\sqrt{\frac{3-x}{x+5}}$; 4) $f(x) = \frac{\sin x - 1}{1+\sin x}$; 5) $f(x) = \cos(x^2+3)$

6) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$; 7) $f(x) = \frac{x^2+3}{\sin x}$; 8) $f(x) = \cos^2\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$; 9) $f(x) = \frac{2\cos x + 1}{\sqrt{\cos x - 1}}$; 10) $f(x) = \sqrt{\cos^2 x - 1}$

B) Dans chacun des cas suivants déterminer les trois premières dérivées de la fonction f .

1) $f(x) = 2x^5 - 7x^3 - 9$; 2) $f(x) = (-x^4+3)^7$; 3) $f(x) = \frac{2-3x}{x^2-2}$; 4) $f(x) = x\sqrt{x}$; 5) $f(x) = \cos x$; 6) $f(x) = \sin 3x$;

C) Déterminer la dérivée d'ordre 48 de la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

Exercice 3 :

En utilisant la dérivée d'une, calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$; 2°) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{5}}{x+2}$ 3°) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+4}-2}{x}$ 4°) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$

Exercice 4 :

Le plan est muni du repère (O,I,J). On donne la fonction f de R vers R définie par : $f(x) = 3x^2-x-1$.

1°) Déterminer le point de la représentation graphique (Cf) de f, où la tangente à (Cf) est parallèle à la droite d'équation : $y = 11x-3$

2°) Déterminer le point de la représentation graphique (Cf) de f où la tangente à (Cf) est perpendiculaire à la droite d'équation : $y = 2x+5$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Montrer que f est dérivable sur IR

Exercice 6 :

On dit que deux courbes sont tangentes en un point si elles ont la même tangente en ce point.

Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il y a lieu les points d'intersection de C_1 et C_2.

Dans le cas échéant, dire si elles sont tangentes et déterminer la tangente commune.

1) $\begin{cases} C_1 : y = \dfrac{x-2}{x+1} \\ C_2 : y = x^2+3x-2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} C_1 : y = x\sqrt{x+4} \\ C_2 : y = -\sqrt{x^2+4} \end{cases}$

Exercice 7 :

Montrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

Montrer que la dérivée d'une fonction périodique est une fonction périodique de même période.

Exercice 8 :

Soit f une fonction définie au voisinage du réel a .Si $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0, cette limite est appelée la dérivée symétrique de f en a et est notée $f_s'(a)$.

1- Montrer que si la fonction f a un nombre dérivé à gauche et à droite de a , elle admet une dérivée symétrique en a. Calculer $f_s'(a)$ en fonction de $f_d'(a)$et de $f_g'(a)$.

2- Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ .Montrer que f admet une dérivée symétrique en 0. Qu'en est-t-il du nombre dérivé à gauche et à droite de f en 0

Exercice 9 :

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour tout x de $]0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Montrer que pour tous réels a et b de $]0 ; \frac{\pi}{2}[$ tels que $a < b$ on a : $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}$

Exercice 10 :

On dispose d'une feuille de carton carrée de coté 100 cm. Aux quatre coins de cette feuille, on découpe un carrée de coté x cm puis on plie le morceau restant pour obtenir une boite sans couvercle

On désigne par V(x) le volume de cette boite, exprimé en cm^3

1-a) préciser l'ensemble des valeurs possibles de x.

b) Démontrer que : $V(x) = x(100 – 2x)^2$

2-Déterminer la valeur de x pour laquelle V est maximal. Déterminer ce volume maximal

Exercice 11 :

On fabrique des boites de conserve, de volume V= 16π cm^3 ayant la forme de cylindres de révolution, à deux bases, de rayon r et de hauteur h.

Pour optimiser le prix de revient du métal constituant, le fabricant veut connaître les valeurs de r et h pour que l'aire de la surface extérieure totale de la boite soit minimale

1-Calculer l'aire A(r,h) de la surface extérieure totale du cylindre en fonction de r et de h

2-Exprimer cette aire en fonction de r seulement ; on la notera A(r)

3- Etudier les variations de A(r) ; en déduire les valeurs de r et h pour que cette aire soit minimale

Exercice 12 :

On considère la fonction *f* définie par : $f(x)=\begin{cases} x-1+\dfrac{1}{|x-1|} & \text{si} \quad x\geq 0 \\ \sqrt{x^2-x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

1. Déterminer le domaine de définition de *f*.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 0. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3. Donner l'expression de *f* sans la valeur absolue.
4. Préciser toutes les asymptotes à la courbe de *f*
5. Dresser le tableau de variations de *f*.
6. Construire la courbe de *f*. On fera apparaître les résultats du 2).

Exercice 13 :

Soient h et g deux fonctions définies sur IR par h(x) = $\dfrac{\alpha x^2+2x+\beta}{x^2-3x}$ et

g(x) = $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2-3x}}$, α et β sont des nombres réels

1- Déterminer les réels α et β pour que la courbe de h ait une tangente en A(1, $\dfrac{1}{2}$) parallèle à

(D) : y = -$\dfrac{3}{4}$x+1

2- Déterminer le domaine de définition Dg de g puis étudier la dérivabilité de g en $\dfrac{1}{2}$

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-3x}$

1-Déterminer les limites de f aux bornes de D_f et préciser les asymptotes éventuelles à (C_f)

2- Etudier les variations de f

3- Tracer les asymptotes et la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(0,\vec{i}, \vec{j})$

4- Soit k la fonction définie sur IR par k(x) = f(/x/)

Déduire de (C_f) la représentation (C_k) de la fonction k.

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\sqrt{|x^2-6x+5|}$.

(C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Donner l'expression de f(x) sans le symbole « valeur absolue »
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en particulier en 1 et en 5 ; la courbe (C_f) admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?
3) Etablir les variations de f.
4) Démontrer que la droite d'équation x = 3 est axe de symétrie de (C_f).
5) Démontrer que les droites d'équation y = x-3 et y = -x+3 sont des asymptotes a (C_f)
6) Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de (C_f) avec les deux asymptotes. A étant le point dont l'abscisse est supérieur a 3.
7) Soit I (3 ; 0) Démontrer que pour tout réel x de [1 ; 5], le point M (x, f(x)) est a une distance constante du point I.
   En déduire la nature géométrique de la courbe lorsque $1\leq x\leq 5$
8) Tracer (C_f) et ces asymptotes faire figurer les points A et B

Exercice 15 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\cos 2x-2\cos x+1$

1) Montrer que f est pair et périodique de période 2Π
2) a) Calculer f '(x).
b) Résoudre dans [0, Π] , puis l'inéquation f '(x)>0
c) Dresser le tableau de variation de f sur [0, Π]. Préciser le minimum de f sur [0, Π].
3) Résoudre l'équation f(x)=0. En déduire les points communs à la courbe (C_f) restreinte à [0, Π] et à l'axe des abscisses. Préciser les équations des tangentes en ces points.

4) Tracer la courbe (C_f) restreinte à [0, Π]. Compléter pour obtenir la courbe sur [-2Π ; +2Π]. (Unité graphique =1cm).

Exercice 16 :

1. On considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \sin x$.

Vérifier que f définit une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0;1[$.

2. Démontrer que $\forall\, x \in [0;1[,\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction f^{-1} est appelée Arcsinus et est notée Arcsin.

Exercice 17 :

On considère la fonction $f : \left]0;\frac{\pi}{4}\right] \to IR$

$$x \to \frac{1}{\sin x}$$

Monter que f réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à déterminer.

Calculer le nombre dérivé en $\frac{2}{\sqrt{3}}$ de la fonction f^{-1}

Exercice 18 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

1°) Etudier f et tracer sa courbe représentative Cf dans un repère orthonormé $\Re$.

2°) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$. Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera .On note g^{-1} sa bijection réciproque.

3°) a- Tracer $C_{g^{-1}}$ dans le repère $\Re$.

b- Déterminer $g^{-1}(0)$; $g^{-1}(9)$.

c- Donner les variations de g^{-1}.

d- Déterminer g^{-1}. (ensemble de définition et $g^{-1}(x)$ en fonction de x).

Exercice 19 :

1°) Soit g la fonction définie par : g(x)=$x^3 - 3x - 4$

a- Etudier les variations de g.

b- Montrer que l'équation g(*x*) = *0* admet une solution réelle, et une seule, α , puis déterminer un encadrement de α à 10^{-1} $prés$. Donner le signe de g(x) sur IR.

2°) Soit *f* la fonction définie par f(x)=$\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et *Cf* sa courbe représentative dans un repère orthonormé (*unité 4 cm*).

a) Déterminer le domaine de définition de Df puis calculer les limites aux bornes de Df.

b) Montrer que la droite (D) d'équation y=x+2 est asymptote à Cf puis préciser les autres asymptotes. Etudier la position de la courbe par rapport *(D)*.

c)Montrer que $\forall$ $x \in\in Df$, f ' (x)=$\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

d) Etudier les variations de *f*.

e)Tracer (D) et *Cf*.

Exercice 20 :

Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = 2\sin^3 x - 3\sin x$.

1°) Etudier la parité et la périodicité de *f*.

2°) Vérifier que $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.Que peut-on en déduire pour la courbe *Cf* de *f*.

3°) On note C_1 la courbe représentative de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Quelles transformations géométriques permettent de construire *Cf* à partir de C_1.

4°) Démontrer que pour tout réel x $f'(x) = -3\cos x \cos 2x$. Donner le tableau de variations de *f* restreinte à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

5°) Tracer *Cf* dans $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 21 :

Soit f la fonction de IR vers IR définie par : f(x)=2 x$\sqrt{|1 - x^2|}$

1)a)Déterminer le domaine de définition de f.

b) Ecrire f(x) sans le symbole de la valeur absolue puis calculer les limites aux bornes du domaine.

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et en -1.

3) Calculer f'(x) dans les intervalles ou f est dérivable. Dresser le tableau de variation de f.

B) On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \quad si\ \ x \in \,]0\ ;\ +\infty[\\ g(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x} \quad si\ \ x \in \,]-\infty\ ;\ 0\,] \end{cases}$$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

2)a) Montrer que (Cf) admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ puis étudier la position de (Cg) par rapport a (D) sur $]-\infty, 0[$.

b) Etudier la nature de la branche infinie de (Cg) en $+\infty$.

3) Calculer g'(x) dans les intervalles ou g est dérivable puis dresser le tableau de variation de g.

3) Tracer les droites remarquables et (Cg) dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2cm).

4) a)Montrer que la restriction h de g a $]-\infty, 0[$admet une bijection dont on précisera l'ensemble de départ.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en 2 et sans expliciter h^{-1}, calculer(h^{-1}) '(2).

5) Tracer (C h^{-1}) sur le même repère.

Exercice 22 :

On considère la fonction *f* définie pour tout x réel par :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1°) Etudier les variations de *f* .

2°)a- Donner une équation de la tangente *T* à *Cf* au point d'abscisse 0.

c- Etudier la position de la courbe par rapport à la tangente *T*.

d- Montrer que le point A(0 ; 1) est centre de symétrie de *Cf*.

3°) Tracer *Cf*.

4°) Montrer que l'équation *f(x)* = *x* admet une solution unique $\alpha \in \left]1; 2\right[$.(On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction *g* telle que *g(x)* = *f(x)* – *x*.)

5°)a- Montrer que *f* est une bijection de sur un intervalle de que l'on déterminera .

b- Définir sa fonction réciproque f^{-1} en donnant son ensemble de définition, son ensemble d'arrivée et $f^{-1}(x)$ en fonction de *x*.

6°) Tracer la courbe de f^{-1}.

Exercice 23 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ f(x) = \dfrac{2-2x}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Démontrer que f est continue en 1.

2) Etudier la dérivabilité de f en 1.

3) Déterminer une équation de la demi - tangente à gauche et une équation de la demi - tangente à droite à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

4) Etudier les branches infinies de C_f .

5) Etudier les variation de f puis dresser son tableau de variation.

6) Tracer C_f.

Exercice 24 :

On considère la fonction f dé sur $[3;+\infty[$ par : $f(x) = x^2\sqrt{x-3}$.

1) a- Justifier que f est continue sur $[3;+\infty[$ et Déterminer son ensemble dérivabilité.

b- Etudier le comportement de C_f en $+\infty$.

c- Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de f .

2) a- Montrer que l'équation $\sqrt{x-3} = \dfrac{4}{x^2}$ possède une unique solution réelle.

b- Donner un encadrement à 10^{-2} près de cette solution.

3) a- Montrer que f réalise une bijection de $[3;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

b- Déterminer le domaine de continuité et de dérivabilité de f^{-1} la réciproque de f .

4) Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ sur un repère orthonormé $(O\ \vec{i}\,;\vec{j})$.

Exercice 25 :

1) Soit la fonction g définie par : $g(x) = x\sqrt{1+x^2} - 1$.

a- Etudier les variations g.

b- Montrer qu'il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$ et que de plus $0{,}7 \leq \alpha \leq 0{,}8$.

c- En déduire le signe de g sur son ensemble de définition.

2) Soit la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{x^3}{3} - \sqrt{1+x^2}$.

a- Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

b- Montrer que , pour tout élément x de D_h ; on a $h'(x) = \dfrac{x.g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

c- En déduire le tableau de variation de la fonction h.

3) Tracer C_h sur un repère orthonormé (O $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Exercice 26 :

On pose $f(x) = \dfrac{2}{1-x} + |x-3|$

1) Ecrire $f(x)$ sans le symbole | |

2) Etudier la continuité de f .

3) La fonction f est-elle dérivable en 3.

Calculer la dérivée de f sur les intervalles où elle est dérivable.

4) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau..

5) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Préciser les équations des asymptotes de C_f puis étudier la position de cette dernière par rapport à chaque asymptotes

6) Déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left]\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{2}\right[$.

Calculer α

7) Soit g la restriction de f à $[3;+\infty[$. Montrer que g admet une fonction de réciproque g^{-1} dont on indiquera ses variations.

8) Monter que g^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$. Puis calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{3}{2}\right)$. Et donner l'équation de la tangente de $C_{g^{-1}}$ au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

9) Construire C_f et $C_{g^{-1}}$ dans un repère orthonormé (O $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Exercice 27 :

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on : $-x \leq \sin x \leq x$

2) a) f et g deux fonctions définies sur IR.

Montrer que si pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \leq g'(x)$ alors $f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0)$

b) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 + \frac{x^2}{2}$

c) Montrer que les inégalités obtenues en b) sont vraies point tout réel x.

3) On sait que $\cos x \leq 1$, on conservera donc les inégalités:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$$

Appliquer suffisamment de fois le processus précèdent pour montrer que

- Pour tout réel x $\quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$
- Pour tout réel $x \geq 0$, $\quad 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq \sin x \leq 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$

Exercice 28 :

Soit $\varphi : \left]0;\pi\right] \to IR$ $\qquad\qquad f : [0;\pi] \to IR$

$x \to \cot gx - 2x$ $\qquad\qquad x \to x\cos^2 x$

1) Etudier la variation de φ. Et déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right[$

2) Etudier le signe de $\varphi(x)$ et en déduire la variation de f.

Exercice 29 :

Soit a un réel non nul ; f_a la fonction de IR vers IR définie par $\forall\, x \in IR \;\; f_a(x) = x + \frac{a}{\pi}\sin \pi x$

a) Comparer $f_a(x)$ et $f_a(x+2k)$ $\quad k \in Z$. Comparer $f_a(x)$ et $f_a(-x)$
b) Etudier suivant les valeurs de a la variation de f_a sur l'intervalle $[0;1]$
c) Démontrer que si $|a| \le 1$ alors f_a est une bijection de IR sur IR et que sa restriction à $[-1;1]$ est une bijection de cet intervalle sur lui-même.
d) Lorsque $|a| \le 1$; préciser les points en lesquels f_a^{-1} bijective bijection réciproque de f_a est dérivable.

Exercice 30 :

Soit $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$

1) Expliquer pourquoi on peut prendre pour domaine d'étude $[0;\pi]$
2) Etudier les variations de f sur $[0;\pi]$
3) Soit g la restriction de f sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

a) Montrer est g bijective de $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ vers J à préciser.
b) Etudier les variations de g^{-1} et tracer sa courbe.

4) a) Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$; $g^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$; $(g^{-1})'(\sqrt{2})$; $(g^{-1})'\left(\frac{-1}{2}\right)$; $(g^{-1})'(1)$

b) Calculer $\cos(g^{-1}(t))$ et $\sin(g^{-1}(t))$ en fonction de t.

Exercice 31 :

Soit $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$ et $\varphi(x) = \frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$

1) Etudier les variations de f et montrer que (C_f) admet un centre de symétrie.

2) Déterminer l'ensemble de définition de φ et calculer $\varphi(\pi - t)$.

3) Expliquer pourquoi on peut prendre pour domaine d étude $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

4) Donner les variations de f' sur $[-1;1]$. Préciser l'image de $[-1;1]$ par f'.

5) Montrer que $\varphi'(t) = f'(\sin t)\cos t$

a) Montrer l'existence et l'unicité d'une racine unique α de $\varphi'(t)=0$ sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

b) Montrer que $\sin\alpha = -2+\sqrt{3}$ et en déduire la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$.

6) Etudier les variation de φ et tracer (C_φ) sur un $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (unité10cm)

7) Montrer que $\varphi(t) = t$ admet une solution unique x_0 dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

8) Montrer que x_0 est la seule solution de $\varphi(t) = t$ sur IR.

9) Soit $u_0 = 0$ et $\forall n \in IN,\quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

a) Placer les 4 premiers termes de cette suite.

b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN,\quad u_n \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

c) Montrer que $u_{n+1} - x_0$ et $u_n - x_0$ sont de signes contraires.

d) Montrer que $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{2}{3}|u_n - x_0|$ en déduire que $|u_n - x_0| \leq \frac{2}{3}|u_0 - x_0|$ et la convergence de u_n.

Exercice 32 :

1. Déterminer les dérivées successives des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto f(x) = (3x-1)^5$

b. $f : x \mapsto f(x) = \frac{1}{2-3x}$

c. $f : x \mapsto f(x) = sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

2. Soit f la fonction définie sur IR^* par: $f(x) = \frac{1}{x}$.

a. Déterminer les fonctions f', f'', f''' et $f^{(4)}$.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence,

que $\forall n \in IN^*, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$