Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Matière : Mathématique	**Série 3 : LIMITES CONTINUITE**	**Professeur** : M. Maissa Fall
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : 1S1

Exercice 1 :

Calculer les limites en + ∞ et en - ∞ des fonctions suivantes.

a) f(x) = $\dfrac{x^2+4x-7}{2x^2-6}$ b) f(x) = $\dfrac{2x-7}{3x^2-3x+1}$ c) $\dfrac{x^2+2x+3}{-3x+4}$ d) f(x) = $\dfrac{x^2+2}{|-2x+3|}$

e) f(x) = x + $\sqrt{x^2-2x}$ f) f(x) = $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-1}$ g) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ h) f(x) = $\dfrac{x-\sqrt{|x|}}{3x+2}$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas calculer la limite de la fonction f en 0.

a) f(x) = $\dfrac{\sin 5x}{x}$ b) f(x) = $\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$ c) f(x) = $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ d) f(x) = $\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$ e) f(x) = $\dfrac{x^3\cos^3}{\sin^2 x}$

f) f(x) = $\dfrac{\sin x+\tan x}{x}$ g) f(x) = $\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$

Exercice 3 :

1. Démontrer que ∀ x ∈ [1 ; +∞[, $\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{x}{x+1}\leq 1$. En déduire $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

2. Démontrer que ∀ x ∈ IR, $|\cos x+\sin x|\leq 2$. En déduire les limites en +∞ et en -∞ de la fonction x $\mapsto\dfrac{\cos x+\sin x}{x^2}$

Exercice 4 :

1) Utiliser les propriétés de comparaison pour calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ b) $\lim\limits_{\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$ c) $\lim\limits_{\to +\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}$ d) $\lim\limits_{\to +\infty} \frac{1}{x+\sin x}$ e) $\lim\limits_{\to -\infty} \frac{x+\cos x}{3+\cos x}$

f) $f(x) = x + E(x)$ g) $f(x) = 2x + \sin x$ h) $f(x) = x^2(1 + \cos^2 x)$ i) $f(x) = \frac{x - \sin^2 x}{2 + \sin x}$

j- $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ k- $f(x) = \frac{E(x)}{x}$

2) Calculer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan 4x}{\sin 2x - 1}$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+\cos x}{4-3\cos x}$

2. Déterminer les domaines de définition de ces fonctions puis calculer les limites aux bornes :

a. $f(x) = \frac{x^3+x^2+x-3}{2x^2-3x+1}$ **b.** $g(x) = \sqrt{x^2-3x} - \sqrt{x^2+5x}$

3. Calculer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x-\sqrt{x+1}-4}{x^2-2x-3}$ **b.** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$

Exercice 5 :

1. Démontrer que la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
2. En déduire la limite en 0 des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \frac{x^3}{1-\cos x}$ b) $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$ c) $\mapsto \frac{\cos^2 x - 1}{x\tan x}$ d) $\mapsto \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

Exercice 6 :

Calculer la limite de f en x_0 dans chacun des cas suivants

a) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ $x_0 = 0$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x}-1}{x}$ $x_0 = 0$ c) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\sin x}$ $x_0 = (\frac{\pi}{2})^-$

d) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{2x - \frac{\pi}{2}}$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ e) $f(x) = \frac{x-\sqrt{x^2-3x+1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$ $x_0 = +\infty$ f) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}-2}{x-3}$ $x_0 = 3$

Exercice 7 :

Calculer les limites des fonctions suivantes aux points indiqués

1) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^2 - 4x - 12}$; $x_0 = -2$ et $-\infty$

2) $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 1$; $+\infty$

3) $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}$ $x_0 = 2$

4) $i(x) = \dfrac{\cos^2 x + \cos x - 2}{\cos^2 - 1}$ $x_0 = 0$

5) $j(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 3x}$ $x_0 = 0$

6) $k(x) = \dfrac{\tan 6x}{1 - 2\sin x}$ $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

Exercice 8 :

Déterminer les domaines de ces fonctions de IR vers IR et calculer les limites aux bornes

a) $l(x) = \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 - 1}$ e) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + m^2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1-m}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $m(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{2x^2 + 2}}$

c) $n(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{|x^2 - 1|}$

d) $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x(x-1)}$ on discutera suivant les valeurs de a et b

Exercice 9 :

Déterminer la limite en zéro de $x \to \dfrac{(x+a)^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{x}$

et la limite en $+\infty$ de la fonction $x \to x + \sqrt[3]{1-x^3}$

CONTINUITE

Exercice 1 :

1. Etudier la continuité sur IR de la fonction $x \mapsto E(x) + [x - E(x)]^2$ ou E désigne la fonction partie entière.
2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = E(x) + E(2x)$
3. Déterminer les limites à droite et à gauche de g aux points 0 et 0,5. La fonction est-elle continue en ces points ?
4.

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants déterminer la valeur de a pour que la fonction f soit continue sur IR. a)

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - x}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = a \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}, & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 + x + a, & \text{si } x \succ 0 \end{cases}$

Exercice 3 :

1. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6 + |x-3|}{x^2 - 9} & \text{si } x \neq 3 \\ f(3) = a \end{cases}$$

   a. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   b. déterminer la limite a gauche et à droite en 3.
   c. Existent-ils des valeurs de a pour lesquelles f est continue en 3.

2. soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{|x| - 3}$;

g est-elle prolongeable par continuité en -3 ?; en 3 ? si oui donner le prolongement.

Exercice 4 :

a) Étudier la continuité de f sur son domaine

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x-1} & \text{pour } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x - x^2} & \text{pour } 0 \le x < 1 \\ f(x) = -x^2 + 4x - 2 & \text{pour } 1 \le x < 3 \\ f(x) = 4 - x & \text{pour } x \ge 3 \end{cases}$$

b) Déterminer a et b pour que f soit continue sur son domaine

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - ab & \text{pour } x < -2 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - a}{x - b} & \text{pour } -2 \le x < 1 \\ f(x) = x - a & \text{pour } x \ge 1 \end{cases}$$

Exercice 5 :

Soit $\begin{cases} f(x) = x^2 E\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

a. Donner l'expression de f sur $]-\infty; -1]$ et sur $]1; +\infty[$

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c. Prouver que $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[\quad on\ a \quad x - x^2 < f(x) \le x$

d. Calculer la limite de f en 0.

e. Pour $n \in IN^*$ donner l'expression de f sur $\left]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$ et sur $\left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}\right]$.

f admet-elle une limite en $\dfrac{1}{n}$?

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

1) Montrer que $\forall x \in]-1; 1[$, $|f(x)| < |x|$
2) En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$ et un prolongement par continuité de f en o

3) Donner l'expression de f pour $x \in \left]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right[, n \geq 1$. Calculer $f\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire la continuité de f sur $]0;1[$

Exercice 7 :

Soit a un réel fixé. Soit φ une fonction numérique telle que si x tend vers a, alors $(\varphi(x))^2$ tend vers 4. Intuitivement, on est tenté de dire que, si x tend vers a, φ(x) tend vers –2 ou φ(x) tend vers 2.

1°) Cette intuition est - elle vérifiée pour les fonctions f et g suivantes ?

f(x) = $\dfrac{2|x|}{x}$, et x tend vers 0 $\quad \begin{cases} g(x) = -2 \text{ si } x \in Q \\ g(x) = 2 \text{ si } x \notin Q \end{cases}$ et x tend vers 3

2°) Que doit – on ajouter à l'énoncé pour que l'intuition soit confirmée ?

Exercice 8 :

On définit les fonctions f et g par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f(x) = 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \, 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = 0 & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ g(x) = x - \frac{1}{2} & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1) Les fonctions f ;g ;f + g, et fg sont-elles continues sur [0 ;1] ?
2) Est-il vrai que le produit de 2 fonctions continues sur un intervalle [a ;b] est la fonction nulle si et seulement si l'une au moins des 2 fonctions est la fonction nulle ?

Exercice 9 :

Déterminer le prolongement par continuité s'il existe des fonctions telles que :

f(x) = $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$; g(x) = $\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{3x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; h(x) = $\dfrac{1}{2x}\left[(1+x)^n - 1\right]$ ($n \in IN$) et k(x) = $xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x||x-2|}{x(x^2-x-2)} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

1- Étudier la continuité de f sur son ensemble de définition
2- Déterminer un prolongement par continuité à droite de 2
3- Déterminer les limites de f en –1 ; 1 ; - –∞ et + ∞

4-

Exercice 11 :

Étudier la continuité de f :

a) $\begin{cases} f(x) = 1 - x & pour\ x < 1 \\ f(x) = x^2 + x - 2 & pour 1 \leq x < 2 \\ f(x) = -4x - 2 & pour\ 2 \leq x \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = x\sin x - a\cos x & \text{pour } x < 0 \\ f(x) = x + b & \text{pour } 0 \leq x < 3 \\ f(x) = x^2 - 4 & \text{pour } 3 \leq x \end{cases}$

(On discutera suivant les valeurs de a et b)

Exercice 12 :

Soit f une fonction définie et continue sur [0 ;1] et telle que f([0 ;1] $\subset$ [0 ;1].
Démontrer qu'il existe un réel x_0 de [0 ;1] solution de l'équation f(x) = x.

Exercice 13 :

On cherche toutes les fonctions f continues sur IR telles que pour tout couple (x, y) de réels on ait : f(x+y) = f(x) + f(y)

1) On suppose qu'une telle fonction existe
   a) Calculer f(0) ; montrer que f est impaire
   b) Montrer que pour tout entier relatif n on a : f(nx) = nf(x)
   c) Montrer que pour tout rationnel r on a : f(rx) = rf(x)
   d) Montrer que pour tout réel a on a : f(ax) = af(x)
   e) On pose f(1) = α ; déterminer f(x) en fonction de x et α
2) Conclure

Exercice 14 :

Soit f une fonction f continue sur IR telle que pour tout réel x :f(2x) + f(x) = 0

a) Calculer f(0)
b) Montrer que pour tout entier naturel n : f($\frac{x}{2^n}$) = $(-1)^n$f(x)
c) Montrer que f(x) = 0 pour tout réel

Exercice 15 :

On cherche toutes les fonctions f définies et continues sur IR à valeurs dans IR^*_+ telles que pour tout couple (x, y) de réels on ait : f(x+y) = f(x) f(y) (*)

1-Montrer que f(0) = 1

2-Montrer que f(-x) = $\frac{1}{f(x)}$ et f(x-y) = $\frac{f(x)}{f(y)}$ $\forall x \in IR,\ \forall y \in IR$

3-Montrer que pour tout entier naturel n on a : f(nx) = $[f(x)]^n$ $\forall x \in IR$

4-Montrer que pour tout entier relatif m on a : f(mx) = $[f(x)]^m$ $\forall x \in IR$

5-Montrer que pour tout rationnel r on a : f(rx) = $[f(x)]^r$ $\forall x \in IR$

6-Montrer que pour tout réel α on a : f(αx) = $[f(x)]^\alpha$ $\forall x \in IR$

7-On pose f(1) = k ; exprimer f(x) en fonction de x et k pour tout x réel