Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Matière : Mathématique	**Série 3 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS**	**Professeur** : M. Maissa Fall
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : 1S1

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition de f de IR vers IR tel que

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2(1-x^2)}}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin x}$ c) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+x} - 2}$ d) $f(x) = \sqrt{E(x)-x}$

f) $f(x) = \sqrt{-2x^2 - 14x - 5}$ si $x \leq 1$ f) $f(x) = \frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}$ h) $f(x) = \frac{1}{|x|-2}$

i) $\begin{cases} f(x) = x - 3 \text{ si } x \leq -1 \\ f(x) = 2x^2 \text{ si } x \geq -1 \end{cases}$ $j)\ f(x) = \frac{5x+2}{\sqrt{-x}}$ $k)\ f(x) = \frac{7x+5}{x^3-2x+3}$

$l)\ f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+x} - 2}$ $m)\ f(x) = \frac{\sqrt{3x^2-x-2}}{x^2+x-2}$ $n)\ f(x) = \frac{3x-6}{|x|-x}$;

$$o)\ f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{-x+5}};\ p)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - E(x)}}$$

Exercice 2 :

Une fonction f définie sur IR vérifie $3f(-x) + f(x) = 4x^3 + 2x$.
Montrer que f est impaire. En déduire f(x)

Exercice 3 :

Montrer que toute fonction définie sur un intervalle du type]-a ;a [où a $\in [0;+\infty]$, est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 4 :

Soit f une fonction telle que pour tout réel x on ait : $f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Calculer $f(x+4)$; $f(x+6)$ et $f(x+8)$ .Que peut-on en conclure ?

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Exercice 5 :

Soit f(x) = E[x – 2 E($\frac{x}{2}$)]

a) Montrer que 2 est une période de f
b) Étudier f sur [0 ;2]
c) Représenter graphiquement la fonction f sur [-4 ; 4]

Exercice 6 :

Même question qu'à l'exercice précédent avec la fonction f(x) = $(-1)^{E(x)}$[x – E(x) –0,5]+0,5.

Exercice 7 :

Représenter graphiquement la fonction f telle f(x) = $\frac{1}{E(x + E(-x))}$

Exercice 8 :

Soit d(x , Z) la distance de x à l'entier le plus proche
a) Calculer d(0,75 ; Z) ; d(8/3 ; Z) d($\sqrt{2}$; Z)
b) Étudier et représenter la fonction g telle que g(x) = d(x ; Z)

Exercice 9 :

Déterminer l'ensemble de définition de fog lorsque :

g(x) = $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ et f(x) = $\sqrt{1 - x^2}$

Exercice 10 :

Soient f et g 2 fonctions définies sur une même partie E de IR. Montrer que :

Sup.(f ;g) = $\frac{(f+g)+|f-g|}{2}$ et Inf.(f ;g) = $\frac{(f+g)-|f-g|}{2}$

Exercice 11 :

Soit $\mathbf{f(x) = |x - 2|}$.Parmi les fonctions suivantes de IR vers IR, déterminer celles qui sont égales à f.

a)g(x) = $\frac{|6x - 12|}{6}$ b) h(x) = $\frac{(x-2)^2}{|x-2|}$ c) k(x) = $\left|\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}\right|$ d) l(x) = $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Exercice 12 :

Dire si chacune des fonctions suivantes est ou non une application de I dans IR.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-3}$ $I = [0, +\infty[$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ $I = IR$

c) $f(x) = \left|\frac{x}{x-1}\right|$ $I = IR_+$ d) $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ $I = [0, 2]$

e) $f: IR \to IR$ où $f(x) = |x|$ f) $g: IR \to IR$ où $g(x) = x - \sqrt{x}$

g) $h: [2; +\infty[\to IR$ où $h(x) = \sqrt{x-2}$ h) $k: [0; +\infty[\to IR$ où $k(x) = \frac{1}{x-1}$

Exercice 13 :

On considère les applications suivantes de IR - {**0**; **1**} vers lui-même :

$$f_1(x) = x; f_2(x) = 1 - x; f_3(x) = \frac{1}{x}; f_4(x) = \frac{x}{x-1}; f_5(x) = \frac{x-1}{x}; f_6(x) = \frac{1}{1-x}$$

Démontrer que ces six applications sont bijectives et déterminer leurs bijections réciproques.

Exercice 14 :

1) Soit f la fonction définie sur $I = [-2; 4]$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

a) Trouver les réels a et b tels que $\forall x \in I\ f(x) = a + \frac{b}{x+3}$

b) Étudier le sens de variation de f sur I

c) Montrer que f est bornée sur I

d) Tracer dans un repère orthonormé, la courbe (C_f) représentative de

2) Soit g la fonction définie sur $J = [-5; 1]$ par $g(x) = \frac{3x+1}{2-x}$

a) Trouver les réels α et β tels que $\forall x \in I\ f(x) = \alpha + \frac{\beta}{2-x}$

b) Étudier le sens de variation de g sur J et montrer que g est borné sur J

c) Tracer sur le même graphique la courbe (C_g) de g

3) Montrer que gof est définie sur I et calculer (gof)(x)

4) De même vérifier que fog est définie sur J et calculer (fog)(x)

5) Tracer sur le même graphique la droite (D) : y = x. Observer alors la position de (C_f) et de (C_g) par rapport à (D)

www.Groupe-excellence.sn

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Exercice 15 :

Soit f et g deux fonctions strictement monotones, I un intervalle inclus dans Df et J un intervalle inclus dans Dg, tels que pour tout x dans I f(x) soit dans J. Dans ces conditions montrer que :

1) Lorsque f et g ont même sens de variation, alors gof est strictement croissante sur I.

2) Lorsque f et g ont des sens de variations différentes, alors gof est strictement décroissante sur I

Exercice 16 :

Soit f et g définies de IR vers IR par :

$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ et $g(x) = \sqrt{x - E(x)}$ où $E(x)$désigne la fonction partie entière

1) Déterminer les ensembles de définitions de f et de g

2) a) Démontrer que $\forall x \in IR$ on a : $x - |x| - 1 \leq 0$ et que

$x + |x| + 1 \geq 0$ puis en déduire que fest bornée sue IR

b) monter que g est bornée sur IR

3) a) montrer que f est bijective de IR sur $]-1;1[$ et déterminer f^{-1}

b) g est –elle bijective de IR sur $[0;1[$? (on vérifiera que $E(x+p) = E(x) + p \; \forall p \in Z$)

4) a) Définir de manière précise les restrictions de gof sur les intervalles $[-2;0] et \; [0;2[$

b) définir les restrictions de fog sur les intervalles $[-2;-1];[-1;0];[0;1] et \; [1;2[$

Exercice 17 :

Soit f et g définies de IR vers IR par $f(x) = \sqrt{x^4+1}$ **et** $g(x) = x^2$

1) Déterminer les ensembles de définitions de f et de g puis comparer f et g

2) a) Montrer que $\forall x > 0 : f(x) - g(x) \leq \frac{1}{2x^2}$

b) Montrer qu'il existe un polynôme P du troisième degré tel que : $f(x) - f(1) = \frac{(x-1)P(x)}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2}}$

c) Montrer que $\forall x \in [0;2]$on a : $1 \leq P(x) \leq 15$ et $\sqrt{x^4+1}+\sqrt{2} \geq 2$

d) En déduire que $\forall x \in [0;2]$ on a : $|f(x) - f(1)| \leq \frac{15}{2}|x-1|$

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Exercice 18 :

Soit f la fonction définie de IR vers IR par $\mathbf{f(x) = E(x) - 2E(\frac{x}{2})}$

1) Donner, sans employer le symbole E, les expressions de f(x) sur le segment $[0; 2]$
2) Montrer que f est périodique et construire sa courbe dans un repère orthonormé$(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
3) Soit h une fonction définie sur un intervalle $[-a; a]$. *Etudier la parité des fonctions p et i définies par*:

$$p(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}$$

Prouver qu'il existe une fonction paire et une seule p, et une fonction impaire et une seule i telles que h(x)=p(x) + i(x)

Application : calculer p et i pour $h(x) = \frac{-2x+3}{x^2+5}$

Exercice 19 :

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}}$

1) Déterminer Df
2) Montrer que $\forall$ x ϵ Df on a $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$
3) Etudier les variations de f sur IR_+ et sur IR_-
4) Soit g la restriction de f à IR_+. Montrer que g est bijective de IR_+ vers $[1; +\infty[$ *et déterminer* g^{-1}

Exercice 20 :

Soit f la fonction définie par :$\mathbf{f(x) = \frac{1}{x+1}\sqrt{x^2 + 1}}$

1) Déterminer Df
2) Soit g définie par g(x) = $(f(x))^2$. Etudier les variations de g puis celle de f

Exercice 21 :

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}}$ **si x $\neq$ 0 et f(0) = 0**

1) Montrer que : $-1 < f(x) < 1 \; \forall \; x \; \epsilon \; IR$
2) Montrer que -1 et 1 ne sont pas des extrémums de f.

www.groupe-excellence.sn

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Exercice 22 :

Sur $]0;1[$ $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)$

1) Montrer que $\forall x \in]0;1[$ $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2-x}$
2) Étudier les variations de f sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2};1\right[$
3) Quelle est la valeur maximale que prend $A = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)$ lorsque a et b décrivent IR+ et vérifient a + b = 1 ?

Exercice 23 :

Sur $[1;+\infty[$ $f(x) = x - 1 - 2\sqrt{x-1}$

1) Déterminer $A = f^{-1}\left(\left\{-\frac{1}{2}\right\}\right)$ et en déduire que f n'est pas injective.
2) Soit $u(x) = x^2 - 2x$ et $v(x) = \sqrt{x-1}$
   a) Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[$ $f(x) = (uov)(x)$
   b) Étudier les variations de f
   c) En déduire que f n'est pas injective de $[1;+\infty[$ vers IR
3) Déterminer le maximum absolu de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}\left(1-2\sqrt{x-x^2}\right) - 1$ sur $\left[\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right]$

Exercice 24 : Concours Général 2006

Soit f la fonction définie sur IR, continue et vérifiant la relation (1) suivante :

(1) : $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ **quels que soient** x **et** y **appartenant à** IR

.

1) Déterminer les fonctions constantes vérifiant (1). On suppose, dans la suite, que f est différente de ces fonctions.

2) Déterminer $f(0)$ et étudier la parité de f .Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) On suppose que f admet une racine α .

a) Montrer que $\Omega(\alpha;0)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative de f

b) En déduire que 4α est une période de f .

www.groupe-excellence.sn

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

c) Montrer que $f(4\alpha)=1$.

d) Montrer que si b est une période de f alors $f(b)=1$.

e) Réciproquement, soit b une période de f .Étudier $f\left(\frac{b}{2}\right)$ et montrer que si $\frac{b}{2}$ n'est pas une période de f, on a : $f\left(\frac{b}{4}\right)=0$.

www.groupe-excellence.sn