

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



|                                           |                            |                                    |
|-------------------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| <b>Matière</b> : Mathématiques            | <b>Série 3 : POLYNOMES</b> | <b>Professeur</b> : M. Maissa Fall |
| <b>Groupe Excellence</b> (cours en ligne) |                            | <b>Niveau</b> : 1S1                |

## Exercice 1 :

On donne le polynôme  $P(x) : P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2$

1. Démontrer que  $P(x)$  est divisible par  $x - 1$  et par  $x - 2$  puis factoriser  $P(x)$ .
2. On donne

$$P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$$

Résoudre l'équation  $P(x) = 0$  sachant  $P(x)$  a deux racines opposées.

## Exercice 2 :

On donne le polynôme :  $P(x) = x^4 + px^2 + q$ ,  $p$  et  $q$  sont des réels.

Déterminer  $p$  et  $q$  de manière que  $P(x)$  soit divisible par  $x^2 - 6x + 5$ .

Résoudre l'équation  $P(x) = 0$ .

## Exercice 3 :

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$ , et  $c$  dans les cas suivants :

1. Le polynôme  $(x - 2)^2 - (x + 3)^2 + ax + b$  soit nul pour tout  $x$  réel.
2. Pour tout  $x$  réel  $P(x) = Q(x)$  avec  $P(x) = (a - 3)x^2 + (2b + c)x - 3a + b - 2$   
 $Q(x) = x^2 - (a + b)x + 2c - 1$
3. Le polynôme  $x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx + 4$ , soit le carré d'un polynôme
4. Le polynôme  $ax^{n+1} + bx^n + 1$  soit divisible par  $(x + 1)^2$

## Exercice 4 :

1. Déterminer  $P(x)$  polynôme du second degré, tel que pour tout  $x$  réel :  
 $p(x) - p(x - 1) = x$  ; en déduire la somme  $1 + 2 + \dots + n$
2. Déterminer  $q(x)$  polynôme de degré trois, tel que pour tout  $x$  réel :  
 $q(x) - q(x - 1) = x^2 + x$  ; en déduire la somme  $1x^2 + 2x^3 + \dots + nx^{n+1}$

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



3. Déterminer  $t(x)$  polynôme de degré trois, tel que pour tout  $x$  réel :  
 $p(x) - p(x-1) = x^2$  ; en déduire la somme  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

## Exercice 5 :

1. Déterminer les polynômes de degré trois dont les divisions par  $(x-1)$ , par  $(x-2)$ , par  $(x-3)$  ont le même reste (+36). Déterminer celui d'entre eux qui est divisible par  $(x+4)$ .
2. Soit  $p(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$ .
  - a) Calculer  $p(a)$ ,  $p(b)$  et  $p(c)$
  - b) En déduire que pour tout  $x$  réel  $p(x) = 1$ .

## Exercice 6 :

Les restes de la division euclidienne d'un polynôme  $P(x)$  par  $x-1$  et par  $x-2$  sont respectivement 6 et 18. Déterminer le polynôme reste de la division de  $P(x)$  par  $(x-1)(x-2)$ .

## Exercice 7 :

On donne le polynôme  $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 1$ .

1. Trouver les réels  $a$  et  $b$  tel que le polynôme  $P(x)$  soit divisible par  $(x-1)^2$ .
2. Résoudre alors  $P(x) = 0$ .

## Exercice 8 :

Soit le polynôme  $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$   $a$  et  $b$  étant des réels.

1. a- Montrer que si  $\alpha$  est une racine de  $P(x)$  alors  $\alpha$  est non nul.  
b- Montrer que  $\alpha$  est solution de  $P(x) = 0$  si, et seulement si,  $\frac{1}{\alpha}$  est une racine de  $P(x)$ .
2. Montrer que  $\alpha$  est solution de  $P(x) = 0$  si et seulement si  $\alpha + \frac{1}{\alpha}$  est solution de l'équation  $X^2 + aX + b - 2 = 0$ .
3. Résoudre alors l'équation  $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



## Exercice 9 :

1) Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  non nuls  $2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 6 \geq 0$  (On

pourra poser  $X = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ )

2) a) Montrer que l'équation  $x^4 + ax^3 + bx^2 + kax + k^2 = 0$  peut être amenée à une équation du second degré par le changement de variable  $X = x + \frac{k}{x}$

b) En déduire une résolution de  $x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 12x + 9 = 0$

## Exercice 10 :

Soit  $P(x)$  et  $Q(x)$  deux polynômes tel que  $P(x) = Q(x) + 1$

1. Soit le polynôme  $T(x) = [P(x)]^n + [Q(x)]^{2n} - 1$  ; montrer que toutes racines de  $P(x)$  ou de  $Q(x)$  est racine de  $T(x)$ .
2. En déduire deux polynômes divisibles par  $T(x)$ .

## Exercice 11 :

On se propose de résoudre le système

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que (S) est équivalent au système (S')

$$(S') \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = -3 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

En déduire que  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les solutions de l'équation  $X^3 - 3X - 2 = 0$  [E]

Résoudre alors [E] puis en déduire toutes les solutions de (S').

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



**Indication** : Donner les formes factorisée et développée d'un polynôme de degré  $n$  qui admet  $n$  racines.

## Exercice 12 :

On donne le polynôme  $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$

1. Montrer que ce polynôme est divisible par  $(x-1)^2$ .
2. Déterminer le polynôme  $Q(x)$  tel que  $P(x) = (x-1)^2 Q(x)$  pour  $n=1$  ;  $n=2$  ;  $n=3$

## Exercice 13 :

Soient  $a, b, c$  trois réels deux à deux distincts.  $Q_a, Q_b$  et  $Q_c$  les trois polynômes suivants.

$$Q_a = (b-c)(x-a)((x+a)^2 + (b+c)^2)$$

$$Q_b = (c-a)(x-b)((x+b)^2 + (c+a)^2)$$

$$Q_c = (a-b)(x-c)((x+c)^2 + (a+b)^2)$$

$$\text{et } P(x) = Q_a(x) + Q_b(x) + Q_c(x)$$

- 1) Quels sont les termes de plus haut degré de  $Q_a, Q_b$ , et  $Q_c$  ? En déduire sans calculer que  $P$  est nul ou de degré inférieur ou égal à 2.
- 2) Calculer  $P(a), P(b)$  et  $P(c)$ . En déduire que  $P$  est un polynôme nul.

## Exercice 14 :

On considère le polynôme :  $P(x,y) = x^4 + 2x^2 + 4xy + y^2 + 1$  dans lequel  $x$  et  $y$  sont deux variables.

1. on considère  $p(x)$  comme un trinôme du second degré en  $y$ .  
Mettre ce trinôme sous forme canonique. En déduire que pour tout couple  $(x,y)$  de nombre réels, on a  $p(x,y) \geq 0$ , l'égalité n'ayant lieu que pour deux couple que l'on précisera.
2. On considère maintenant  $y$  comme un paramètre ;  $P(x,y)$  est alors un polynôme du quatrième degré en  $x$ .

# Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- a. Le paramètre  $y$  étant fixé, montrer qu'il existe trois valeurs réelles de  $\lambda$  telles que l'on ait une décomposition de la forme
$$P(x,y) = (x^2 + 1 - 2\lambda)^2 + \frac{1}{\lambda} (2\lambda x + y)^2.$$
 Calculer ces trois valeurs de  $\lambda$ .
  - b. Écrire les trois décompositions de  $P(x)$  correspondant à ces trois valeurs de  $\lambda$  et montrer que, parmi ces trois décompositions, il y'en a quel que soit  $y$ , toujours une qui est une différence de deux carrés.
3. Dans toute la suite on suppose  $y = 8$
- a. Mettre  $P(x,8)$  sous la forme  $P(x,8) = A(x) \times B(x)$  ou  $A(x)$  et  $B(x)$  sont deux polynômes du second degré à coefficients réels.
  - b. Montrer qu'il est possible de déterminer deux polynômes du premier degré à coefficients réels  $\alpha x + \beta$  et  $\alpha'x + \beta'$  tels que l'on ait identiquement
$$(\alpha x + \beta)A(x) + (\alpha'x + \beta')B(x) = 1.$$
  - c. En déduire une décomposition de  $\frac{1}{P(x,8)}$  en une somme de deux fractions rationnelles.

## Exercice 15 :

Soit le polynôme  $P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

1. On pose  $S = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$

- a. Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  tel que  $P(x) = (x-1)Q(x) + S$
  - b. Montrer que si les coefficients de  $P$  sont des entiers il en est de même des coefficients de  $Q$ . (On pourra utiliser l'algorithme de Horner).
2. Soit  $N$  le nombre entier écrit  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  dans le système décimal.

Exemple  $N=5327$  alors  $a_0 = 7, a_1 = 2, a_2 = 3$  et  $a_3 = 5$

- a. Vérifier que  $N=P(10)$ .
- b. En déduire qu'un nombre entier  $N$  est divisible par 9 ssi la somme de ses chiffres est divisible par 9