Matière : Mathématiques **Groupe Excellence** (cours en ligne)	**Série 11 : GEOMETRIE DANS L'ESPACE**	**Professeur** : M. Maissa Fall **Niveau** : 1S1

Exercice 1 :

On considère un pavé droit ABCDEFGH.

Les points I, J et K distincts des sommets du pavé droit, appartiennent respectivement aux faces (ABCD),(BCGF) et (EFGH).

1. Représenter l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube dans le cas où les points I, J et K sont situés sur des arêtes de ces faces.

2. Représenter l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube dans le cas où les points I, J et K sont à l'intérieur de ces faces.

Exercice 2 :

On considère un tétraèdre ABCD.

Les points I, J et K distincts des sommets du tétraèdre ABCD, appartiennent respectivement aux faces (ACD),(BCD) et (ABD).

1. Représenter l'intersection du plan (IJK) avec les faces du tétraèdre dans le cas où les points I, J et K sont situés sur des arêtes de ces faces.

   1. Représenter l'intersection du plan (IJK) avec les faces du tétraèdre dans le cas où les points I, J et K sont à l'intérieur de ces faces.

Exercice 3 :

On considère un plan (P) et un point B de (P). Soit (D) une droite perpendiculaire en B à deux droites (D') et (D'') sécantes de (P).

L'objectif de l'exercice est de montrer que (D) est perpendiculaire à la bissectrice (Δ) de de l'angle □ formé par ces deux droites sécantes.

En notant A, I et J les points situés respectivement sur (D), (D') et (D'') tels que BA = BI = BJ = 1 et H le point d'intersection de (IJ) et (□).

1) Démontrer que AIJ est un triangle isocèle.
2) Démontrer que l'angle BHI est droit et en déduire que $BH^2 = BI^2 - HI^2$

3) Démontrer que l'angle AHI est droit et en déduire que $AH^2 = AI^2 - HI^2$.
4) En déduire que la droite (D) est perpendiculaire à la droite Δ.

Exercice 4 : Tétraèdre trirectangle

Soit un tétraèdre ABCD dont les arêtes contenant le point A sont deux à deux perpendiculaires. Un tel tétraèdre est appelé tétraèdre trirectangle en A.

1- Démontrer que dans un tétraèdre rectangle les arêtes opposées sont orthogonales.
2- Soit H le projeté orthogonale de A sur le plan (BCD) .
   a- Démontrer que le plan (ADH) est perpendiculaire à la droite (BC).
   b- Démontrer que H est l'orthocentre du triangle BCD.
   c- Soit K le point d'intersection des droites (DH) et (BC). Démontrer que :

   i) $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

   ii) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2}$

Exercice 5 : Points cosphériques

On considère dans l'espace un cercle (C) de diamètre [AB] .

Soit (P) le plan contenant le cercle (C) ;

Δ , la perpendiculaire en A au plan (P) ;

S un point de la droite Δ distinct de A.

1- Soit P un point quelconque du plan (P) et H le projeté orthogonal du point A sur la droite (SP).

Démontrer qu'on a les égalités suivantes :

$$SA^2 = \overline{SA} \times \overline{SH} \qquad AH^2 = \overline{HS} \times \overline{HP}$$

2- On considère un point M quelconque sur le cercle (C).

Soit C le projeté orthogonal de A sur la droite (SB).

Soit N le projeté orthogonal de A sur la droite (SM).

a) Démontrer que si le point M est distinct des points A et B, alors les plans (SMB) et (SMA) sont perpendiculaires.
b) Démontrer que la droite (CN) est perpendiculaire aux droites (SB) et (NA).
c) En déduire que le point N appartient à un cercle (□) de diamètre [AC] dont le plan qui le contient est perpendiculaire en C à la droite (SB).

d) Justifier que les points A, B, C, M et N appartiennent à une même (□) que l'on précisera.

Exercice 6 :

Soit un tétraèdre ABCD, I un point de [AB], J un point de [AC] et K un point]AD[, les droites (IJ), (JK) et (KI) n'étant pas parallèle au plan (BCD).

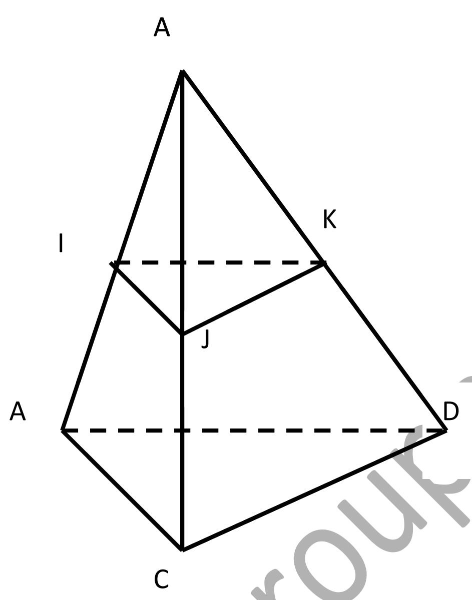


Figure 1

1) Dessiner la figure 1 et le la section du tétraèdre par le plan (IJK) (c'est-à-dire l'intersection du plan (IJK) avec les faces (ABC), (ACD) et (ABD))
2) A quel plan appartiennent les points I, J, B et C ?

Construire le point d'intersection L des droites (IJ) et (BC).

3) A quel plan appartiennent les points J, K, C et D ?

Construire le point d'intersection N des droites (CD) et (JK).

4) A quel plan appartiennent les points L et N ?

En déduire la droite d'intersection des plans (IJK) et (BCD) et vérifier que l'intersection de (IK) et (BD) appartient à la droite (LN).

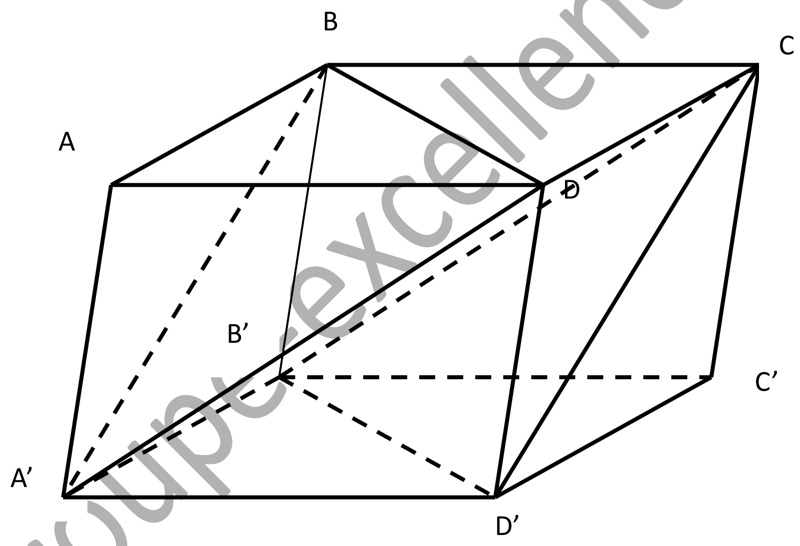
Exercice 8 :

Soit un parallélépipède ABCDA'B'C'D'.

1) Reproduire la figure ci-dessous, en conservant les pointillés et en mettant en évidence les plans (BDA') et (CB'D').
2) a) Démontrer que BCD'A' est un parallélogramme. En déduire le parallélisme de (BA') et (CD').

b) Démontrer que les droites (BD) et (B'D') sont parallèles.

c) Enoncer la propriété qui permet de conclure que les plans (BDA') et (CB'D') sont parallèles.



Exercice 9 :

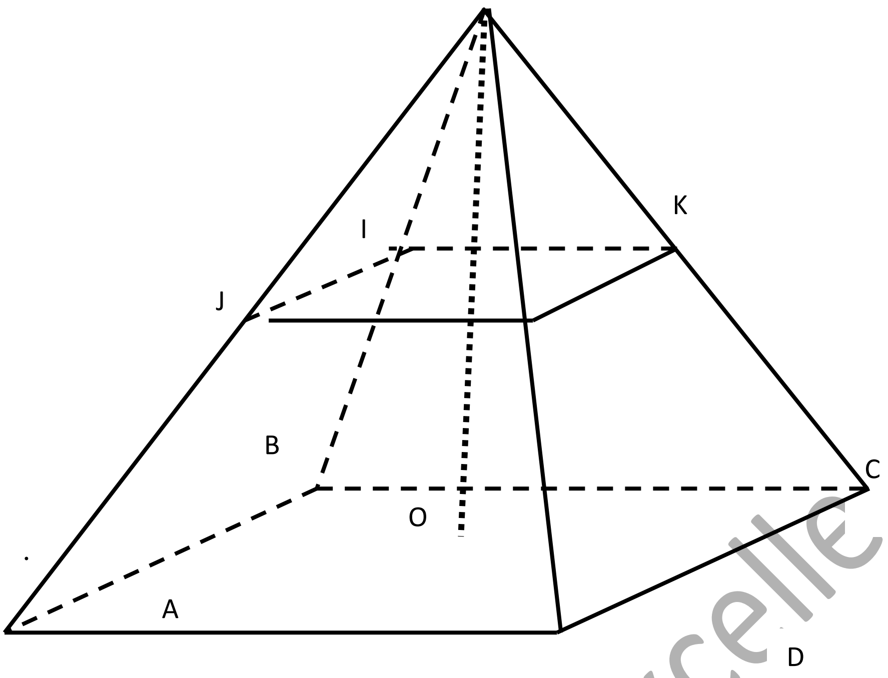
Soit une pyramide régulière, de sommet S, dont la base est un carré ABCD de centre O.

Soit I le point de l'arête [SA] tel que $SI = \frac{2}{3}SA$, J le point de [SB] tel que

$SJ = \frac{2}{3}SB$ et K le point de [SC] tel que $SK = \frac{2}{3}SC$.

1) Démontrer que les droites (SO) et (IJ) sont orthogonales.
2) Démontrer que les droites (SO) et et le plan (IJK) sont orthogonaux.
3) En déduire que (IJK) est parallèle à ((ABC)

S



Exercice 10 :

Soit un tétraèdre ABCD. Démontrer que la droite d'intersection des plans médiateurs des segments [AD] et [DC] est incluse dans le plan médiateur du segment [AC].

Exercice 11 :

L'espace E étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On considère les droites D etD' de repères respectifs $(A,\vec{i})$ et $(B,\vec{j})$avec A (0 ; 0 ; 1) et B (0 ; 0 ;-1).

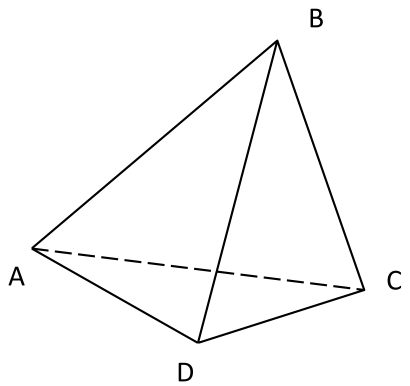
1)Pour tout point M de coordonnées (x , y , z),calculer les distances d(M,D) et d(M,D') en fonction de x , y et z .

2) On désigne par S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que d (M, D)=d (M, D').

Trouver une équation de S.

Exercice 12 :

On considère le tétraèdre ABCD .On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB] , [CD] , [BC] , [AD] , [AC] et [BD].On désigne par G l'isobarycentre des points A,B,C et D .



1) Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que AB=CD, BC=AD et AC=BD.

(On dit que le tétraèdre ABCD est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2)a)Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM.

b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3)a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB).

Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c)Montrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD].

d) Comment démontrerait –on que G est le barycentre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ?

Exercice 13 :

Dans le plan (P) de l'espace, on considère le cercle (C) de diamètre [AB]. Soit Δ la droite passant par A orthogonal à (P) et S un point de Δ distinct de A. On note I le projeté orthogonal de A sur la droite (BS).

Pour tout point M du cercle (C), on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).

1) Placer les données précédentes sur une figure, Δ étant placée verticalement.

2) Prouver que H appartient à la sphère $\sum$ de diamètre [AS].

3) Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B.

Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS).

En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS).

4) Montrer que H appartient au plan $\prod$ passant par I et orthogonale à la droite (BS).

5)a)Déterminer l'intersection Γ de $\sum$ et $\prod$.

b) Prouver que l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt (C) est égal à Γ.A cet effet, étant donnée un point N de Γ distinct de A, on pourra montrer que le plan (AN'S) coupe (C) en A et en un autre point M.

Exercice 14 :

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC et OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du tétraèdre.

1)a) Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontra de façon analogue que les droites

(BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est admis.

c)Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2) L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.On considère les points A (1 ; 0 ; 0),

B (0 ; 2 ; 0) et C (0 ; 0 ; 3).

a) Déterminer une équation du plan (ABC) .

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c)Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupe en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49};\frac{18}{49};\frac{12}{49}\right)$.

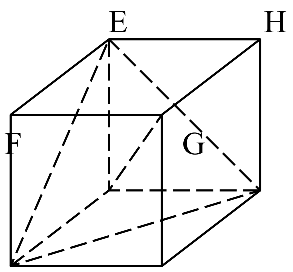
3)a)Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b) Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

c)Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre

Exercice 15 :

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessus.O_1 et O_2 sont les centres des carrés des rectangles ABCD et EFGH, et I le centre de gravité du triangle EBD .Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés {(E, 1), (B, 1-m), (G, 2m-1), (D, 1-m)}.



Partie A :

1) Justifier l'existence du point G_m .

2) Préciser la position de G_1.

3) Vérifier que G_o=A .En déduire que les points A, I et G sont alignés.

4) Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$ .En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.

5)a)Vérifier que les points A, G_m, E et O_1 sont coplanaires.

b) Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m est sur la droite (EI).

Partie B :

Dans cette question, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Démontrer que la droite (AG) est orthogonal au plan (EBD).En déduire une équation cartésienne du plan (EBD).

2) Déterminer les coordonnées du point G_m .

3) Pour quelle valeur de m la distance de G_m au plan (EBD) est égal à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 17 :

Soit $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace.

1) G est l'isobarycentre de A, B et C.

a) Donner les coordonnées de G.

b) Montrer que (OG) est perpendiculaire à (ABC).

2) Soit A' (2 ; 0.0), B' (0 ; 2 ; 0) et C' (0 ; 0 ; 3).

a) Déterminer un vecteur normal a $\overrightarrow{A'B'}$ *et* $\overrightarrow{A'C'}$.En déduire qu'une équation de (A'B'C') est : $3x+3y+2z=6$

b) Montrer que $:M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(AC)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-k\\y=0\\z=k\end{cases}$

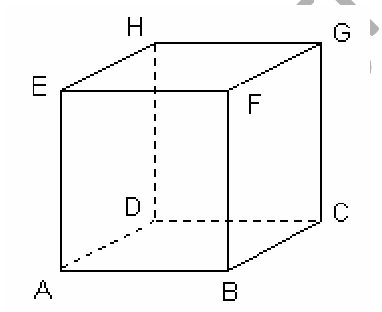
c)Déterminer les coordonnées de K commun à (AC) et (A'B'C') .

3) a)Montrer que le point L commun à (BC) et (A'B'C') a pour coordonnées (0 ;4 ;-3)

b) Montrer que (AB) //(A'B')//(LK).

Exercice 18 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F .Dans tout l'exercice l'espace est rapporté à un repère orthonormal. $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$



1)a)Déterminée les coordonnées des points I et J.

b) Vérifier que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c)En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

d) Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2) On désigne (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a)Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.

c)Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$.

d) Le point L est-il orthocentre du triangle BGI ?

Exercice 18 :

Soit P_1, P2 et P_3 les plans d'équations :

P_1 : x-2y+z-5=0

P_2 : 3x+5y+7z+4=0

P_3 : y+z+3=0

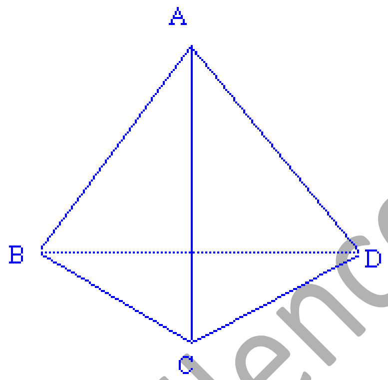
1) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

2) Déterminer une équation paramétrique de l'intersection D des plans P_1 et P_2.

3) En déduire que P_1, P2 et P_3 ont un unique point commun et calculer ses coordonné

Exercice 19:

ABCD est un tétraèdre dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux.
Démontrer que les arêtes opposées (celles qui ne se coupent pas) sont orthogonales.



Exercice 20 :

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3,2,6)$, B de coordonnées $(1,2,4)$ et C de coordonnées $(4,-2,5)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Vérifier que ce plan est P.

2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P.

c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

d. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

3. On considère dans cette question le système de points pondérés $S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

a. Vérifier que ce système admet un barycentre qu'on notera G.

b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

c. Déterminer la distance de G au plan P.

4. Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$.
Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

Exercice 21 :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(3\,;0\,;6)$ et $I(0\,;0\,;6)$; on appelle (D) la droite passant par A et I.

On appelle (P) le plan d'équation $2y+z-6=0$ et (Q) le plan d'équation $y-2z+12=0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.

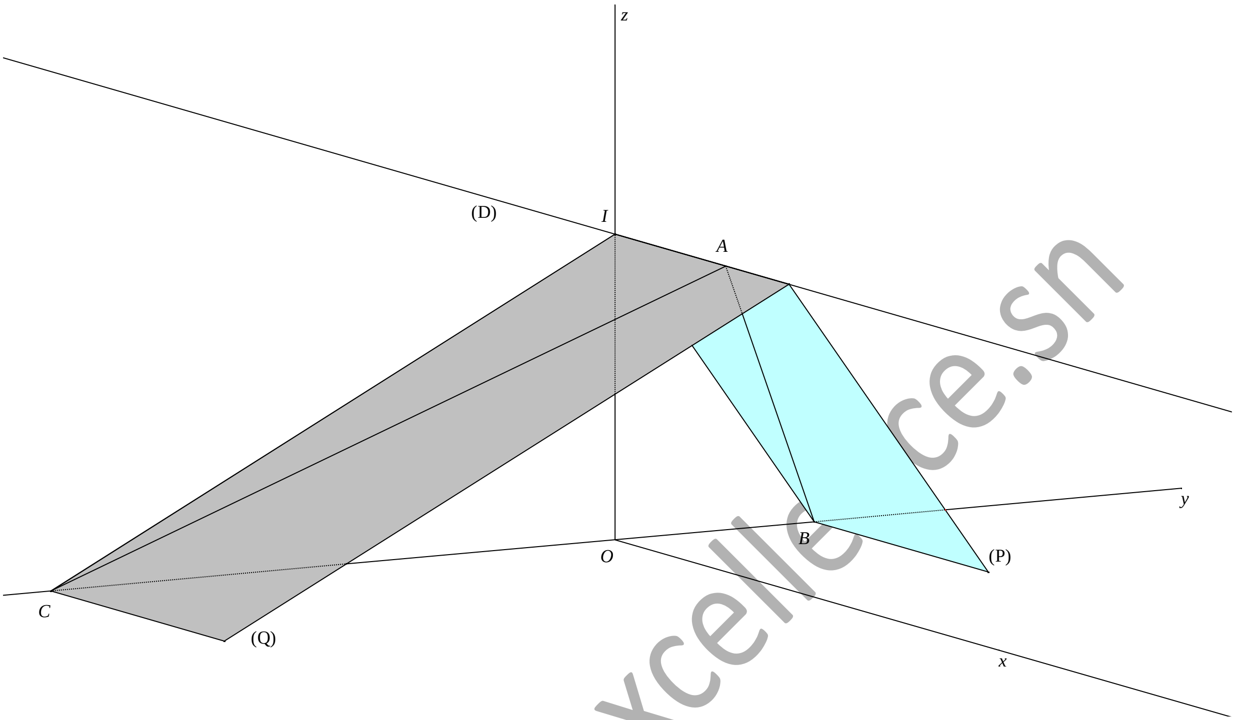
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).

3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $(O\,;\vec{j})$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $(O\,;\vec{j})$.

4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est $x+4y+2z-12=0$.

5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA). Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.

6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



Exercice 22 :

L'espace est muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. *Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives* $x+2y-z+1=0$ *et* $-x+y+z=0$. *Soit A le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).*

1. Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}+t \\ y=-\dfrac{1}{3} \\ z=t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d).

3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P').

4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

Exercice 23 :

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A\left(\frac{2}{3}\,;-3\,;2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3}\,;0\,;-4\right)$. On note *I* le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1. Soit *E* le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$ et $(B\,;1)$.

a. Calculer les coordonnées de *E*.

b. Montrer que l'ensemble (P) des points *M* de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$.

c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre *I* de la sphère au plan (P). En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$. En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit *D* le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{2}\,;4\sqrt{3}-1\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*ID*).

b. En déduire que la droite (*ID*) est sécante au cercle (C) en un point noté *F* dont on donnera les coordonnées.

Exercice 24 :

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points $A(1\,;3\,;2)$, $B(4\,;6\,;-4)$ et le cône (Γ) d'axe $(O\,;\vec{k})$, de sommet *O* et contenant le point *A*.

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2+y^2=\frac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (*xOy*) et contenant le point *B*.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Q) et de (Γ). Sans justification reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

* deux droites parallèles ;
* deux droites sécantes ;
* une parabole ;
* une hyperbole ;
* un cercle.

Exercice 25 :

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. *Question de cours*

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. On considère les points $A(1 ; 2 ; -3)$, $B(-3 ; 1 ; 4)$ et $C(2 ; 6 ; -1)$.

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées $(-5 ; 9 ; 4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

Exercice 26 :

Soit $OABC$ un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. a. Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ? Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On peut démontrer de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1 ; 0 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 0)$ et $C(0 ; 0 ; 3)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (d) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49} ; \frac{18}{49} ; \frac{12}{49}\right)$.

3. a. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$. En déduire l'aire du triangle ABC.

c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Exercice 27:

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2 ; 8 ; 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 5 ; -1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.

Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d').

Montrer que le vecteur de coordonnées $(2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d').

3. Démontrer que les droites (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

4. On considère le point H de coordonnées $(-3 ; 3 ; 5)$ et le point H' de coordonnées $(3 ; 0 ; -4)$.

a. Vérifier que *H* appartient à (d) et que *H'* appartient à (d').

b. Démontrer que la droite (*HH'*)est perpendiculaire aux droites (d) et (d').

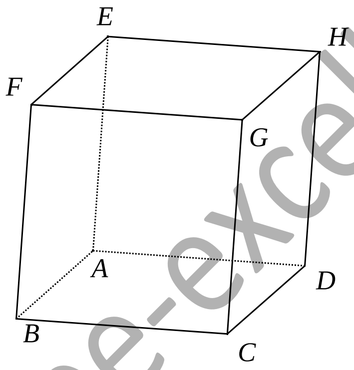
c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d'), c'est-à-dire la distance *HH'*.

5. Déterminer l'ensemble des points *M* de l'espace tels que $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$.

Exercice 28 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormal $(D\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\vec{k}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.



1. a. Donner les coordonnées des points *A*, *C*, *E*.

b. Déterminer les coordonnées du point *L* barycentre du système {(*C*, 2) ; (*E*, 1)}.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit (a, b) un couple de réels. On note *M* le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et *N* le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$.

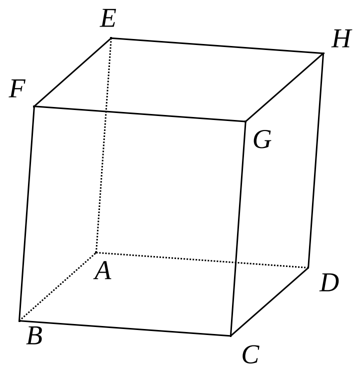
a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système $\begin{cases} -a+2b=1 \\ 3a-b=0 \end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

Exercice 29 :

On donne la propriété suivante : « Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »
Sur la figure donnée ci-dessous, on a représenté le cube *ABCDEFGH* d'arête 1.



On a placé :

les points *I* et *J* tels que et ; $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$

le milieu *K* de [*IJ*].
On appelle *P* le projeté orthogonal de *G* sur le plan (*FIJ*).

PARTIE A
1. Démontrer que le triangle *FIJ* est isocèle en *F*. En déduire que les droites (*FK*) et (*IJ*) sont orthogonales.
On admet que les droites (*GK*) et (*IJ*) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (*IJ*) est orthogonale au plan (*FGK*).
3. Démontrer que la droite (*IJ*) est orthogonale au plan (*FGP*).
4. a. Montrer que les points *F*, *G*, *K* et *P* sont coplanaires.
b. En déduire que les points *F*, *P* et *K* sont alignés.
PARTIE B
L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$
On appelle *N* le point d'intersection de la droite (*GP*) et du plan (*ADB*). On note (*x*, *y*, 0) les coordonnées du point *N*.
1. Donner les coordonnées des points *F*, *G*, *I* et *J*.
2. a. Montrer que la droite (*GN*) est orthogonale aux droites (*FI*) et (*FJ*).
b. Exprimer les produits scalaires et en fonction de *x* et *y*.
c. Déterminer les coordonnées du point *N*.
3. Placer alors le point *P* sur la figure.

Exercice 30 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal ($(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points : $A(3\ ;\ -2\ ;\ 1)$ $B(5\ ;\ 2\ ;\ -3)$, $C(6\ ;\ -2\ ;\ -2)$, $D(4\ ;\ 3\ ;\ 2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(2\ ;1\ ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.

3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ en unités de volume.