Matière : Mathématiques	**Série 10 : ANGLES ORIENTES - TRIGONOMETRIE**	**Professeur** : M. Maissa Fall
Groupe Excellence (cours en ligne)		**Niveau** : 1S1

Exercice 1 :

Deux cercles (ξ) et (ξ') sont sécants en A et B.

Une droite passant par A recoupe (ξ) en C et (ξ') en D.

Une droite passant par B recoupe (ξ) en E et (ξ') en F ; montrer que (CE) // (DF)

Exercice 2 :

Deux cercles (ξ) et (ξ') sont sécants en A et B, M étant un point sur (ξ).

On trace la tangente (T) à (ξ) en M.

La droite (MA) recoupe (ξ') en M' et (MB) recoupe (ξ') en N' ; montrer que (M'N') // (T)

Exercice 3 :

On considère deux points distincts et fixes A et B. Un point mobil M décrit la droite (AB).

Soit ξ un cercle fixe passant par A et B.

Le cercle ξ_1 passant par M et tangent en A à ξ et le cercle ξ_2 passant par M tangent en B à ξ se recoupent en P.

Soient (D_1) l'axe radical de ξ et ξ_1 ; (D_2) celui de ξ et ξ_2.

1. Montrer que (D_1) et (D_2) sont sécantes
2. Soit C leur point d'intersection, montrer que les points A, B, C et P sont cocycliques. En déduire le lieu géométrique de P lorsque M décrit (AB).

Exercice 4 :

Deux cercles ξ et ξ' sont sécants en A et B. Soit C un point de ξ ,D un point de ξ' n'appartenant pas à la droite (AC). Une droite passant par B recoupe ξ en M et ξ' en N ; soit R le point d'intersection de (CM) et (DN).

Montrer que A, C, D et R sont cocycliques.

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle non rectangle et H son orthocentre. Et H_A le symétrique orthogonal de H par rapport à (BC).

1. Démontrer que $(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ (\pi)$
2. Démontrer que $(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{H_AB},\overrightarrow{H_AC})\ (2\pi)$
3. En déduire $(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}) = -(\overrightarrow{H_AB},\overrightarrow{H_AC})\ (\pi)$
4. Montrer que les quatre points A, B, C et H_A sont cocycliques.
5. Nommer deux autres points sur ce cercle.

Exercice 6 :

Soit A et B deux points distincts du plan orienté .

Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que :

1. $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{3}\ (\pi)$
2. $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$
3. $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}\ (\pi)$

Exercice 7 :

Soit $(O\vec{i},\vec{j})$, un repère orthonormal direct, A et B les points de coordonnées respectives (2; 1) $(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{3}{2})$. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

1. Vérifier que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire et calculer une mesure de l'angle $(\vec{i},\vec{u})$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormale directe du plan.
3. Un point D a pour coordonnées (2, 2) dans le repère $(A,\vec{u}, \vec{v})$.
   a) Calculer AD et donner une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AD})$.
   b) Déduisez en une mesure de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{AD})$ puis les coordonnées de du point D dans le repère $(O\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 8 :

1) a) Calculer $(1+\sqrt{2})^2$
b) Résoudre dans IR : $4\,cos^2x + 2(\sqrt{2}-1\,)cosx - \sqrt{2} = 0$
c) Résoudre dans [-∏ ; ∏] : $4\,cos^2x + 2(\sqrt{2}-1\,)cosx - \sqrt{2} \geq 0$
2) Résoudre :

a) $2cosxsinx + \sqrt{3}\,cos2x = -1 \;\; dans\ IR$

b) $\frac{1-2cosx}{\sqrt{3}\tan x+1} \leq 0\ dans\ [\,0\,;2\pi\,]$

Exercice 9 :

1. Démontrer que pour tout élément x de [0 ; $\frac{\pi}{2}$]. On a : $\sqrt{1+\sin 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|$
2. Démontrer que $16\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24} = 1$
3. Mettre l'expression $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x}$ sous la forme d'un produit de deux tangentes
4. Simplifier l'expression suivante : $\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{1+2\cos x+\cos 2x}$

Exercice 10 :

1) Soit le réel a défini par $\sin a = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $0 \prec a \prec \frac{\pi}{2}$

Calculer cos2a. En déduire a

2) On pose : $A = \cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

$B = \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$
b) En déduire les valeurs exactes de A et B

Exercice 11 :

Résoudre dans R

a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$; $\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos(3x+\pi)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

d) $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$

e) $\cos\left(x-\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

f) $\sin x+2\cos 3x\sin x=0$

Exercice 12 :

Résoudre dans R :

$a)\quad 2\sin x-\sqrt{3}\succ 0$; $b)\quad 2\cos 4x+3\prec 0$ $c)\quad 2\cos^2 x-\cos x-1\leq 0$ $d)5\sin^2 x-\cos 2x-3\geq 0$

$e)\quad \sin x+\sin 2x+\sin 3x\prec 0$ $f)\ \sin x+\sin 2x+\cos x\succ 0$ $g)\ \frac{2\cos 2x-1}{1+\cos 2x}\leq 0$ $h)\tan(x-\frac{\pi}{6})\geq 0$

Exercice 13:

1) En utilisant une autre écriture de sin(4x + x) : démontrer l'égalité suivante : sinn5x = $16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x$
2) Démontrer que $\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation :

   $16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x=0$
3) Résoudre dans R l'équation :
   $16x^5-20x^3+5x=0$

4) En remarquant que $0\prec\frac{\pi}{5}\prec\frac{\pi}{4}$, déduire des questions précédentes la valeur de $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 14 :

Soit ABC un triangle on pose $\alpha=B\hat{A}C$ $\beta=A\hat{B}C$ $\gamma=A\hat{C}B$

1. Montrer que $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$
2. En déduire que $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

Exercice 15 :

Soit ABCDE un pentagone régulier inscrit dans un cercle trigonométrique ; en utilisant la relation $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$; montrer que :

1. $1 + 2(\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}) = 0$
2. $1 + 4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5} = 0$
3. En déduire $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$

Exercice 16 :

1. a) Sachant que $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$; donne les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

   b) Déduis en le calcul de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2. Retrouve autrement les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
3. Résoudre dans IR l'équation (E) : $\cos 4x + \sin 4x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$; précise les solutions de (E) qui appartiennent dans $[0 ; 2\pi[$
4. Place les images des solutions de(E) sur le cercle trigonométrique.
5. a) calcule $(\cos^2 x + \sin^2 x)^3$ de deux façons.

   b) détermine l'expression de $\sin^2 2x$ en fonction de$\cos 4x$.

   c) déduis en que $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$

Exercice 17 :

On considère dans l'intervalle $I = [-\pi ; \pi[$ l'équation (E) $\cos 4x - \cos 3x = 0$

1. Résoudre (E) dans I et puis représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
2. On pose $\cos x = X$.
   a) Exprimer $\cos 3x$ et $\cos 4x$ en fonction de X
   b) En déduire (E) est équivalente à (E') : $8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1 = 0$

c) Montrer que les solutions de (E') sont 1, $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$. En déduire une factorisation de $P(X) = 8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1$.

d) Calculer P(0), puis en déduire la valeur exacte de $A = \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$.

Exercice 18 : Droite de Simson

Soit ABC un triangle rectangle, de cercle circonscrit ξ.

Soit P un point quelconque du plan dont les projetés orthogonaux sur les droites (BC), (CA) (AB) sont respectivement nommés P_1, P_2, P_3.

1. On suppose que P n'appartiennent à aucune des droites (AB), (AC), (BC).
   a) Démontrer que : $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CP}) + (\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BA})\ (\pi)$
   b) En déduire que : P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si P appartient à $\xi - \{A,B,C\}$
2. On suppose que P appartient à $(AB) \cup (BC) \cup (CA)$.
   Justifier que : P_1, P_2, P_3 sont alignés si et seulement si P appartient à $\{A,B,C\}$
3. Conclure que pour tout point P du plan, l'alignement de P_1, P_2, P_3 équivaut à l'appartenance de P au cercle ξ.

A chaque point P de ξ, on peut associer une droite Δ_P contenant P_1, P_2, P_3 .

Δ_P est dite droite de Simson associée au point P ξ, relativement au triangle ABC