Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !

Matière : Mathématiques **Groupe Excellence** (Cours en ligne)	**POLYNOMES**	**Professeur** : M. SARR **Niveau :** 1S1-1S3

Exercice 1 :

On considère le polynôme $P(x)=(m^2-m-2)x^3-(m+1)x^2+(m-2)x+2m-1$

Déterminer le réel m pour que :

a) d°P= 3 ; b) d°P = 2 ; c) d°P = 1.

Exercice 2 :

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - (3+2m)x^2 + (6m+2)x - 4m.$

1) Vérifier que $P(2m) = 0$.
2) Ecrire $P(x)$ sous forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.
3) Résoudre en discutant suivant les valeurs de m l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 3 :

Soit a(x) et b(x) des polynômes donnés. En utilisant la division euclidienne, déterminer q(x) et r(x)

tels que: $a(x) = b(x)q(x) + r(x)$; d°r < d°b dans les cas suivants

1. $a(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$; $b(x) = x^2 - 3x + 1$

2. $a(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 9$; $b(x) = x^3 - x + 2$

3. $a(x) = 2x^4 + x^3 - 10x^2 + 6x - 5$; $b(x) = x^2 - x - 5$

Exercice 4 :

Déterminer les coefficients a et b pour que :

Le polynôme $x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1$ soit le carré d'un autre polynôme.

Exercice 5 :

Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$

1) Déterminer un polynôme Q(x) et le polynôme R(x) du premier degré, tels que :

$P(x) = (x^2 - 2x - 1)Q(x) + R(x)$

2) En déduire le reste de la division de $P(x)$ par $\left(x-1-\sqrt{2}\right)$.

3) Déterminer $P(1-\sqrt{2})$.

Exercice 6 :

1. Soit $P(x) = 2x^4 + x^3 - 20x^2 - 13x + 30$. Vérifier que 1 et $-\frac{2}{5}$ sont racines de P.

   Factoriser $P(x)$ par la méthode des coefficients indéterminés.

2. Soit le polynôme $P(x) = x^3 - \sqrt{2}\,x^2 - 3x + \sqrt{2}$.

Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que : $P(x) = \left(x - 1 - \sqrt{2}\right)Q(x)$.
Déterminer $Q(x)$ en utilisant la méthode de Horner et puis factoriser $P(x)$

Exercice 7 :

Soit $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

1) Sachant que $P(x)$ admet quatre racines a, b, c et d qu'on ne calculera pas, déterminer $a + b + c + d, ab + ac + ad + bd + cd, abc + acd + abd + bcd$ et $abcd$.
2) Sachant que $c = 1$ et $d = 2$, déterminer a et d à l'aide de la question 1)
3) On suppose $a = -1$ et $b = -2$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$ puis l'inéquation $P(1 - x) \leq 0$

Exercice 8 :

Soit $P(x) = x^4 - 6x^3 + \alpha x^2 + 42x + 40$

1. Déterminer α sachant que P admet quatre racines dont la somme des deux racines est égale à la somme des deux autres racines.
2. Dans toute la suite, α prend la valeur précédemment trouvée. Factoriser $P(x)$
3. Déterminer le couple (β, θ) tels que le polynôme $Q(x) = \beta x^4 - 7x^3 - \beta x^2 + \theta x + 6$ soit divisible par le polynôme $x^2 - 2x - 3$.
4. Résoudre dans R l'inéquation $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$

Exercice 9 :

Soit le polynôme $P(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$; (n étant un entier strictement positif).

1. Factoriser $H(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$ puis montrer, pour tout $n > 0$, que $P(x)$ est divisible par $H(x)$.
2. Un polynôme $Q(x)$, divisé séparément par $(x - 2)$ et $(x + 1)$, donne respectivement pour reste 4 et 7. Soit $R(x)$ son reste par sa division euclidienne par le produit $(x - 2)(x + 1)$.

a- Justifier qu'on peut écrire $R(x) = \alpha x + \beta$ avec α et β deux réels fixés.

b- Calculer alors α et β.

Exercice 10 :

Les nombres a, b, c et d sont tels que :

$$a = \sqrt{4 - \sqrt{5 - a}} \;;\; b = \sqrt{4 + \sqrt{5 - b}} \;;\; c = \sqrt{4 - \sqrt{5 + c}} \;;\; d = \sqrt{4 + \sqrt{5 - d}}$$

1) Montrer que a et b sont solutions de l'équations $x^4 - 8x^2 + x + 11 = 0$.
2) Montrer que c et d sont solutions de l'équation $y^4 - 8y^2 - y + 11 = 0$.
3) En déduire que le produit $abcd$ est égal à 11.

Exercice 11 :

Soit $P(x)$ un polynôme dont les restes respectifs de la division euclidienne par $x + 1$ et $x - 3$ sont respectivement 4 et -4.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x + 1)(x - 3)$.
2. Soit $A(x)$ et $B(x)$ le quotient et le reste de la division de $P(x^3)$ par $x^3 + 1$

a- Déterminer le polynôme $B(x)$.

b- Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par $x^3 + 1$.

3. Soit $g(x)$ un polynôme. Démontrer que $g(x)$ est divible par $(x - 1)^3$ si et seulement si $P(x + 1)$ est divisible par x^3.

Exercice 12 :

Soit $f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

1. Calculer $P(a), P(b)$ et $P(c)$.
2. En déduire que $P(x) = x^2$.

Exercice 13 :

A. Soit le polynôme P défini par : $P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$, n est un entier naturel.

1. On pose $n = 6$. Déterminer a et b pour que $P(x) = ax^7 + bx^6 + 1$ soit divisible par $(x-1)^2$. Factoriser le polynôme P par $(x-1)^2$.
2. Déterminer les réels a et b de facon que le polynôme $P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$ soit divisible par $(x+1)^2$.

B. Démontrer que le polynôme : $Q(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ est divisible par l'expression $(x-1)(x^2-1)$.

C. Montrer que pour tout entier naturel n est impair l'expression $(x+y+z)^n - x^n - y^n - z^n$ est divisible par $(x+y)(x+z)(y+z)$.

Exercice 14:

Soient $R\ et\ T$ les polynômes tels que $R(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ et$

$T(x) = 2x^n(3x-1)$

1) Déterminer le degré de chacun des polynômes : $R + T\ et\ R \times T$.
2) On admet l'existence d'un réel non nul k tel que $R(x+k) = R(x)$ et on définit le polynôme P tel que $P(x) = R(x) - R(0)$
   a) Déterminer $R(0); R(k); R(2k)\ et\ R(nk)$ où n est un entier naturel.
   b) Justifier que P est le polynôme nul
   c) En déduire une expression simple de $R(x)$.

Exercice 15 :

On considère, s'il existe, les polynômes $f_k(x)$ tel que : $f_0(0) = 0$ et $f_k(x) - f_k(x-1) = x^k$

1. Prouver $f_k(x)$ est de degré $k+1$.
2. Prouver que $f_k(x)$est divisible par $x^2 + x$.
3. Déterminer $f_k(x)$ pour $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

Déduire de ce qui précède l'expression en fonction de n des sommes : $S_n = \sum_{i=0}^{n} i^k$, avec $k \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

Exercice 16 :

Les parties sont dans une large mesure indépendantes

A. Trouver tous les polynômes de degré 3 qui admettent 1, 2 et 3 racines

B. P est un polynôme $x \longmapsto x^4 - 5x^2 + 4x - b$

Pour quelle valeur de b peut-on écrire, pour tout réel x, $P(x) = (2x+1)Q(x)$ avec Q un polynôme?

C. Calculer $(x^2+px+q)^2$ et vérifier que $x^4+6x^3+7x^2-6x+1$ est le carré d'un polynôme de degré

D. Montrer que $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ est le carré d'un trinôme

E. Soit P le polynôme:

$$P(x)=x^{11}-17x^{10}+17x^9-17x^8+\cdots-17x^2+17x-1$$

Calculer $P(16)$ et $P(18)$

F. n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. f_n est polynôme tel que pour tout réel x,

$$f_n(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1.$$

Démontrer qu'il existe un polynôme Q_n tel que tout réel x,

$$f_n(x)=x(x+1)(2x+1)Q_n(x)$$

G. Déterminer qu'il existe un polynôme g tel que pour tout réel x,

$$x^4-6x^2+8x-3=(x-1)^3g(x)$$

H. Démontrer que pour tout réel t est une racine du polynôme

$f: x \longmapsto x^3-(3-t)x^2+(2+3t)x-2t$. Factoriser alors $f(x)$

I. Soit $P(x)=x^4+6x^3+15x^2+18x$

1. Trouver des réels a et b tel que, pour tout réel x, $P(x)=(x^2+3x)^2+a(x^2+3x)+b$
2. Factoriser P et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

J. Soit le polynôme $f(x)=x^3-2x-21$

1. Montrer que si n est un entier naturel tel que $f(n)$, alors n divise 21
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 21 et en déduire une racine de f
3. Résoudre l'équation $f(x)=0$

Exercice 17 :

Soit le polynôme $f(x)=8x^3-16x-3$

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs, non nul. On dit que b est un diviseur de a, ou que a est un multiple de b, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a=kb$. On dit aussi que b divise a et on note b|a.

Exemple : -2|14 car 14=-2(-7) ;3|-12 car -12=3(4)

1. a) Montrer que si n est un entier naturel tel que $f(n) = 0$, alors n divise 3

   b) En déduire que le polynôme f n'admet pas de racine entière

2. On se propose de chercher si f admet une racine rationnelle positive.

Soit deux entiers naturels a et b premiers entre eux, vérifiant $f\left(\frac{a}{b}\right) = 0$

a)Montrer que $8a^3 - 16ab^2 - 3b^3 = 0$

b)En déduire que a divise 3 et que b divise 8.

c) Conclure

d)En déduire toutes les solutions rationnelles des équations :

$4x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0$

$2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$

Exercice 18 :

1. Démontrer que $h(x) = \sqrt{1 + x + x^4}$ n'est pas un polynôme.

2. On considère l'expression $f(x) = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^3 + \left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)^3$.
Démontrer que f est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
3. Soit p(x) un polynôme et q(x) = p(x) + 1. Démontrer que $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ est divisible par p(x)q(x).
Indication : $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1)$

Exercice 19 :

1. Soit P un polynôme de degré 2019 vérifiant $P(k) = k$ pour $k = 1,2, \dots, 2019$ *et* $P(0) = 1$. Trouver $P(-1)$

   Indication : Considérer $Q(x) = P(x) - x$.

2. Soit P un polynôme de degré 4 tel que $P(0) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9$ *et* $P(4) = 16$.

   Calculer $P(-2)$.

3. α, β *et* γ étant les trois racines $x^3 - x - 1$, Calculer $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$
4. Soit P un polynôme à coefficient entiers. On suppose qu'il existe des entiers deux à deux distincts a, b, c *et* d tels que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$.

Montrer qu'il n'existe pas d'entier k tel que $P(k) = 8$.

Exercice 19 :

Soit P un polynôme de degré 2000 vérifiant pour tout entier n / $0 \leq n \leq 2000$ la relation : $P(n) = \frac{n}{n+1}$.

On pose $f(x) = (x+1)P(x) - x$

a) Déterminer $\deg(f)$
b) Déterminer les racines de f et en déduire une factorisation de $f(x)$
c) Calculer alors $P(2001)$.

Exercice 20 :

1. Trouver le reste de la division euclidienne de $A(x) = x^{2018} + 2018$ par $B(x) = x^{2018} - 1$.

2. On considère les polynômes A et B : $A(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ et $B(x) = x^2 - x + 2$

Montrer qu'il existe un couple unique (P, Q) de polynômes vérifiant l'égalité polynomiale :

$$A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1 \; avec \deg P \leq 1 \; et \deg Q \leq 2$$

Exercice 21 :

On appelle **polynôme réciproque** de degré n tout polynôme P(x) vérifiant :

$$\begin{cases} d° \, P = n \\ \forall \; x \in \mathbb{R}^* \;\; P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^n} \end{cases}$$

1. Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors α est non nul et $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P(x).
2. Montrer que tout polynôme réciproque de degré n (impair) admet -1 pour racine
3. On suppose que le polynôme P est donné par : $P(x) = (x+1)Q(x)$.
   Démontrer que si P est un polynôme réciproque alors Q l'est aussi.
4. Démontrer que le produit de deux polynômes réciproques est réciproque
5. Déterminer le polynôme réciproque F de degré 5 admettant pour racines $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 2 - \sqrt{3}$ et tel que $F(0) = 2$
6. On pose $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on pose :

$P\,(x) = 2x^4 - (5 + 2\sqrt{5})x^3 + (4 + 5\sqrt{5})x^2 - (5 + 2\sqrt{5})x + 2$

a. Vérifier que $P\,(x)$ est un polynôme réciproque

b. Montrer que $\phi^2 = \phi + 1$ puis en déduire ϕ^3, ϕ^4 en fonction de ϕ
c. En déduire alors que ϕ est une racine de $P(x)$
d. En utilisant les questions précédentes, résoudre simplement dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)$

Exercice 22 :

Soit le polynôme : $P(x) = a^4(b - x) + b^4(x - a) + (a - b)x^4$ où a, b et c sont des réels distincts.

1. Calculer $P(a)$ et $P(b)$.
2. Soit $F(x) = P(x) - P(a)$.

a- Montrer que $F(x) = P(x) - P(b)$.
b- Prouver que $F(x)$ est divisible par $(x - a)(x - b)$
c- Montrer que $F(c)$ est divisible par l'expression $(a - b)(c - a)(c - b)$. Déterminer alors le quotient.

Exercice 23 :

On se propose de résoudre une résoudre une équation de degré 3 ne possédant pas, à priori, de solution particulière.

1. Soit le polynôme $P(x) = 10x^3 - 9x^2 + 9x + 1$.
   a) On pose$x = y + a$. Déterminer le polynôme $Q(y)$ obtenu en remplaçant x par $y + a$ dans$P(x)$.
   b) Montrer que : $Q(x) = 10(y^3 + \alpha y + \beta) \Leftrightarrow a = \frac{3}{10}$; $\alpha = \frac{63}{100}$; $\beta = \frac{79}{250}$
2. Cette partie a pour but de déterminer les racines $Q(y)$
   a) Déterminer deux réels a et b tels que : $b^3 + c^3 = \beta$ et $-3bc = \alpha$
   b) Prouver que $y^3 - 3bcy + b^3 + c^3$ est factorisable par $y + b + c$
   c) Déduire des questions précédentes que $-\frac{2}{5}$ et $-\frac{1}{10}$ sont respectivement les racines de $Q(y)$ et $P(x)$.
   d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 24 :

On donne l'expression :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right]$$

1. Donner l'expression de $P_n(x)$ pour $n \in \{1; 2; 3\}$
2. Vérifier que pour n élément de $\{3; 4\}$on a :

$P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0, \forall x \in IR \setminus [-1; 1]$

3. On pose $u = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $v = x - \sqrt{x^2 - 1}$

a- Calculer $u + v$ et exprimer $P_n(x)$ en fonction des fonctions u et v.

b- Calculer $(u^{n-1} + v^{n-1})(u + v)$

c- En déduire que pour $n \geq 3$, on a : $P_n(x) - xP_{n-1}(x) + \frac{1}{4}P_{n-2}(x) = 0$ et que $P_n(x)$ est la restriction à $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ d'un polynôme. Quel est le degré de ce polynôme ?

Exercice 25 :

1) On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x + |x| \text{ et } g(x) = x - |x|$$

a) f et g sont-elles des fonctions polynômes ?

b) Déterminer la fonction produit fg.

2) On considère deux fonctions polynômes P et Q telles que, pour tout x, $P(x)Q(x) = 0$ (le polynôme $P(x)Q(x)$ est le polynôme nul.)

Soit $d°P = n$ et $d°Q = p$.

Prouver que P admet au moins $n + 1$ racines, ou que $Q(x)$ admet au moins $p + 1$ racines. En déduire que $P(x) = 0$ ou $Q(x) = 0$.

3) Quelle propriété non vérifiée par l'ensemble des fonctions est vérifiée par l'ensemble des fonctions polynômes ?

Exercice 26 :

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas un polynôme à coefficients entiers tel que a, b, c des entiers différents et $P(a) = b, P(b) = c$ et $P(c) = a$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$.

1) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme alors α est une racine $P(x)$.

2) On se propose d'établir la réciproque

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) - P(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha)$$

b) En déduire que $P(x) - P(\alpha)$ est factorisable par $(x - \alpha)$.

3) Prouver que pour tout couple (p, q) d'entiers, $P(p) - P(q)$ est divisible par $p - q$.

4) Montrer alors qu'il existe trois entiers β, γ et δ tels que

$$(b - c) = \delta(b - a), (c - a) = \beta(b - c) \text{ et } (a - b) = \gamma(c - a)$$

5) Calculer $\delta\beta\gamma$. En déduire $|b - c| = |c - a| = |a - b|$.

6) Conclure

Exercice 27 :

A) Déterminer les polynômes P du second degré tel que $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$.

B) On se propose de déterminer l'ensemble des polynômes P vérifiant:

$$P(x^2) = (x^2 + 1)P(x) \quad (\mathbf{1})$$

1. Vérifier que le polynôme nul est solution de $(\mathbf{1})$.
2. Soit $P(x) = b$ où $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si P est solution de $(\mathbf{1})$ alors $b = 0$
3. Soit P un polynôme non constant de degré n non nul

   a) Donner les degrés des polynômes $P(x^2)$ et $(x^2 + 1)P(x)$

   b) En déduire le degré de tout polynôme P solution de $(\mathbf{1})$

   c) Déduire de la question A) les solutions de $(\mathbf{1})$

<u>**Pensée :**</u>

« Soyez un élément de qualité. Certaines personnes ne sont pas habituées à un environnement où l'on attend l'Excellence » Steve Jobs