

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Matière : Mathématiques	Série : Barycentre	Professeur : M. SARR
Groupe Excellence (Cours en ligne)		Niveau : 1S1 Tel : 781177433

Exercice 1 :

ABC est un triangle quelconque. Le point I est le milieu du segment $[AB]$, le point J est le milieu du segment $[AC]$. Le point K est le symétrique de J par rapport à A et le point L vérifie : $\overrightarrow{LB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

- 1) Montrer que I est le barycentre des points pondérés $(B ; 3)$, $(K ; 2)$ et $(C ; 1)$.
- 2) En déduire que les points K, I et L sont alignés.

Exercice 2 :

A, B, C, D sont quatre points distincts vérifiant : $\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \vec{O}$; I est le barycentre de $(A ; 1)$ et $(B, 2)$; J barycentre de $(A ; 1)$ et $(D ; 1)$; K le barycentre de $(B, 2)$ et $(D ; 1)$.

1. Montrer que : $3\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CD} = \vec{O}$. En déduire que C est sur la droite (ID)
2. Montrer que $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CB} = \vec{O}$. En déduire que C est sur la droite (JB)
3. Montrer aussi que C est sur la droite (KA)
4. Que peut-on dire de la position relative des droites (ID) , (JB) et (KA) .

Exercice 3 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le milieu de $[CD]$ et L le milieu de $[DA]$;

1. Montrer que la figure obtenue en joignant les milieux des quatre cotés J, K, L , est un parallélogramme.
2. Soit M le milieu de $[AC]$ et N le milieu de $[BD]$; montrer que le segment $[MN]$ a pour milieu le centre du parallélogramme $IJKL$.

Exercice 4 :

1. Soit ABC un triangle, B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.
 I et J sont les points du segment $[BC]$ tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$
 - a- I est le barycentre de $\{(B, b), (C, c)\}$. Déterminer b et c .
 - b- J est le barycentre de $\{(B, b'), (C, c')\}$. Déterminer b' et c' .
2. Soit H le point défini par $\overrightarrow{C'H} = \frac{3}{5}\overrightarrow{C'J}$. H est le barycentre de $\{(C'', t), (J, s)\}$.

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Déterminer t et s .

3. Montrer que H est le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \delta)\}$ étant des réels à déterminer.
4. Exprimer $\overrightarrow{HI}$ en fonction de $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ puis $\overrightarrow{HB'}$ en fonction de $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{HC}$
5. En déduire que l'on a $3\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HB'} = \vec{0}$ et que les points I, H , et B' sont alignés.
6. Soit K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$
 - a- Comparer $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{IK}$.
 - b- Soit G le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 2), (C, 2), (K, -1)\}$.
Préciser la position de G .

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle de centre de gravité G

1. Montrer que pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$
2. Soit O milieu de $[BC]$ montrer que pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{OA}$
3. Soit (C) l'ensemble des points M vérifiant : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$
Déterminer et construire l'ensemble (C) .

Exercice 6 :

- A. Soit A, B, C trois points et a, b et c trois réels tels que $a + b + c \neq 0$. Soit G le barycentre de $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$
1. Démontrer que le système : $\{(A, 2a + 1); (B, 2b - 2); (C, 2c + 1)\}$ admet un barycentre que l'on notera K .
 2. Donner une relation vectorielle qui définit K .
 3. En déduire que : $a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB} + c\overrightarrow{KC} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}}{2}$.
 4. En déduire que G et K sont confondus si B est le milieu de $[AC]$.
 5. En supposant que A, B et C ne sont pas alignés. Soit E le point vérifiant que $ABCE$ est un parallélogramme.
 - a- Montrer que $\overrightarrow{GK} = \frac{\overrightarrow{BE}}{2(a+b+c)}$ en utilisant la question 2.
 - b- Construire G et K pour $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = 2$
- B. Dans le plan, on considère le triangle ABC isocèle en A de hauteur AH tel que $AH = BC = 4 \text{ cm}$.
1. En justifiant la construction, placer le point G barycentre de $\{(A, 2); (B, 1), (C, 1)\}$.
 2. On désigne par M un point quelconque du plan.
 - a- Montrer que $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est vecteur constant et $\|\vec{V}\| = 8$.
 3. Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\vec{V}\|$.
 4. On considère le système $\{(A, 2); (B, n); (C, n)\}$ où n est un entier naturel fixé.
 - a) Montrer que G_n le barycentre de ce système existe pour tout n .

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



- b) Construire les points G_0, G_1 et G_2 .
- c) Montrer que G_n appartient au segment $[AH]$.
- d) Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\| = n\|\overrightarrow{V}\|$. Montrer que E_n est un cercle qui passe par A . Construire E_n .

Exercice 7 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Soit $A(1; 2)$ et $B(3, -1)$. Trouver les coefficients α et β vérifiant $\alpha + \beta = 1$ pour que le point C intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses soit barycentre du système (A, α) et (B, β) .
- 2) On considère les points $E\left(1; \frac{1}{2}\right)$, $H\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ et $F\left(-1; -\frac{11}{2}\right)$
 - a) Vérifier que les points E, F et H sont alignés.Trouver α et β vérifiant $\alpha + \beta = 1$ tels que H soit barycentre de (E, α) et (F, β)

Exercice 8 :

On se donne un triangle ABC et on désigne par G le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 3)$, par H celui de $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 4)$ enfin par K celui de $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 3)$.

- 1) Montrer que :
 - a) $\|2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB}\| = 0$.
 - b) Si $M \neq G$ alors $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| \neq 0$.
 - c) En déduire que G réalise le minimum de $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\|$.
- 2) Quel point réalise le minimum de $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\|$?
- 3) Montrer que K réalise le minimum de $\|5\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{MC}\| = 0$.

Exercice 9 :

Soient ABC un triangle et trois réels non nuls a, b et c . On suppose que les systèmes de points pondérés (B, b) et (C, c) ; (C, c) et (A, a) ; (A, a) et (B, b) admettent des barycentres que l'on note respectivement I, J et K .

- a) Démontrer que si $a + b + c = 0$ alors les droites (AI) , (BJ) et (CK) sont parallèles.
- b) Réciproquement démontrer que si les droites (AI) , (BJ) et (CK) sont parallèles alors $a + b + c = 0$.

Application :

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



Soient I, J et K trois points du plan définis par : $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
Démontrer que les droites (AI) , (BJ) et (CK) sont parallèles.

Exercice 10 :

Partie A :

Soient trois points A, B et C du plan, on désignera par I le milieu du segment $[BC]$

Soit m un paramètre réel et G_m le barycentre des trois points pondérés :

$(A, 1 - 2m)$, (B, m) et (C, m) .

1) Pour tout réel m , justifier l'existence de G_m et démontrer que G_m appartient à la médiane issue de A du triangle ABC .

2) Démontrer que l'ensemble des points G_m , quand m décrit $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, est un segment dont on précisera les extrémités.

Partie B :

Pour tout réel m et pour tout point M du plan, on considère le vecteur

$$\vec{U}_m = (1 - 2m)\overrightarrow{MA} + (m - 1)\overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}$$

1) a) Exprimer $\vec{U}_m + \overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$

b) En déduire que $\vec{U}_m$ est un vecteur constant

2) a) Exprimer $\vec{U}_m$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que $\vec{U}_m$ n'est pas le vecteur nul et que les points B et G ne sont pas confondus.

3) Pour quelle valeurs de m le vecteur $\vec{U}_m$ est-il colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Exercice 11 :

Dans un triangle ABC , soit G le barycentre de $\{(A,1), (B,1), (C, m^2)\}$

1. Montrer que $\forall m \in \mathbb{R}$, G existe et qu'il appartient à une droite fixe.

2. Quand $m \in]-1;1[$ encadrer $\frac{2}{m^2 + 2}$. En déduire que G décrit alors un segment que l'on construira.

Exercice 12 :

Soit A, B et C trois points non alignés, α, β et γ trois réels vérifiant les conditions d'existence des barycentres suivants :

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



G barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$;

G_1 barycentre de $\{(A, -\alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$;

G_2 barycentre de $\{(A, \alpha); (B, -\beta); (C, \gamma)\}$;

G_3 barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, -\gamma)\}$.

Démontrer que les droites (AG_1) ; (BG_2) et (CG_3) sont concourantes en G .

Exercice 13 : Points réciproques

Soit ABC un triangle. On appelle A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$.

Soit (α, β, γ) un triplet de réels strictement positifs et G_1 le barycentre du système $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$, G_2 le barycentre du système $(A, \frac{1}{\alpha}), (B, \frac{1}{\beta}), (C, \frac{1}{\gamma})$.

On dit que les points G_1 et G_2 sont réciproques.

- 1) Vérifiez que ces points G_1 et G_2 sont définis et qu'ils sont strictement intérieurs au triangle ABC .
- 2) On appelle :

A_1 le point d'intersection de (AG_1) et $[BC]$,

A_2 le point d'intersection de (AG_2) et $[BC]$.

On définit de même B_1, B_2, C_1 et C_2 .

Exprimez le point A_1 comme barycentre des points B et C . Même question avec A_2 .

- 3) Montrez que les points A_1 et A_2 sont symétriques par rapport A' .

Exprimez de la même façon des propriétés symétries entre B_1 et B_2 puis C_1 et C_2 .

- 4) Montrez que l'isobarycentre G est le seul point intérieur au triangle confondu avec son point réciproque.

Exercice 14 :

Soit ABC un triangle et M un point strictement intérieur à ce triangle. Les droites (AM) , (BM) et (CM) coupent les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ du triangle respectivement en $A'B'$ et C' .

1. Démontrer que : $\frac{\text{aire}(MAB)}{\text{aire}(MAC)} = \frac{A'B}{A'C}$. En déduire que A' est le barycentre du système des points pondérés : $\{(B, \text{aire}(MAC)), (C, \text{aire}(MAB))\}$
2. Soit G le barycentre des points pondérés

Groupe Excellence

Excellez avec les meilleurs professeurs !



$$\{(A, \text{aire}(MBC)), (B, \text{aire}(MAC)), (C, \text{aire}(MAB))\}$$

Démontrer que G est confondu au point M

3. Soient α, β, δ trois réels strictement positifs et K le barycentre de $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \delta)\}$

Démontrer en utilisant les questions précédentes que $\frac{\text{aire}(KBC)}{\alpha} = \frac{\text{aire}(KAC)}{\beta} = \frac{\text{aire}(KAB)}{\delta}$

Exercice 15 :

ABC est un triangle. On note $BC = a, CA = b$ et $AB = c$. L'objectif de cet exercice est de trouver des réels affectés aux points A, B et C tels que le centre I du cercle inscrit, l'orthocentre H ou O le centre du cercle circonscrit au triangle soient des barycentres des sommets.

Partie A : Le centre du cercle inscrit.

A' est le pied de la bissectrice de BAC . A' est donc équidistant des cotés de l'angle BAC . On note d cette distance et h la longueur de la hauteur issue de A .

- 1) Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{c}{b}$ puis en déduire que A' est le barycentre de $\{(B, b), (C, c)\}$
- 2) B' et C' sont les pieds des bissectrices de ABC et ACB . Exprimer B' comme barycentre de C, A et C' comme barycentre de A et B .
- 3) Prouver que I est le barycentre de $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$

Partie B : Orthocentre et centre du cercle circonscrit

On se place dans le cas où les angles de ABC sont tous aigus.

On pose $\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{ABC} = \beta$ et $\widehat{ACB} = \theta$. A_1 est le pied de la hauteur issue de A .

- 1) Prouver que : $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{\tan \theta}{\tan \beta}$.
- 2) Déduisez-en que A_1 est le barycentre de $\{(B, \tan \beta), (C, \tan \theta)\}$.
- 3) Énoncer les résultats analogues pour les pieds B_1 et C_1 des hauteurs issues de B et C .
- 4) Prouver que H , orthocentre de ABC est barycentre de $\{(A, \tan \alpha), (B, \tan \beta), (C, \tan \theta)\}$
- 5) MNP sont les milieux de $[BC], [CA]$ et $[AB]$.
 - a) Justifier que les médiatrices du triangle ABC sont des hauteurs du triangle MNP .
 - b) Exprimer alors O comme le barycentre de M, N et P .
 - c) Déduisez-en que O , centre du cercle circonscrit à ABC , est le barycentre A, B et C affectés des coefficients que vous préciserez.