Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433

TS1 : Suites numériques

Exercice 1 :

On appelle le principe des dominos : si u *est une suite et si p et q sont des entiers tels que :* $0 \leq p \leq q$ *alors on* $\sum_{k=p}^{q}\left(u_{k+1}-u_{k}\right)=u_{q+1}-u_{p}$.

Une telle somme est appelée somme télescopique. Evidement la majorité des termes s'annule et la somme vaut $u_{q+1}-u_{p}$ *. Voici quelques exemples.*

1) Simplifier les sommes suivantes :

$$a = \sum_{k=p}^{q}\left(u_{k+1}-u_{k}\right) \quad et \quad b = \sum_{k=p-3}^{q-1}\left(u_{k+1}-u_{k-1}\right)$$

2) Simplifier les sommes : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A(n)=\sum_{k=0}^{n} k.k! \quad$ *et* $\quad B(n)=\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Indication : remarquer que $k=(k+1)-1$ *et transformer en somme télescopique.*

3) Déterminer trois réels a, b *et* c *tels que pour tout* $k \geq 1$,

$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$ *. En déduire le calcul de* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 2

Démontrer par récurrence les résultats suivants :

a) $\forall n \geq 1 \quad , \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$; b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad 2^n \geq n+1$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$; *d)* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \prod_{k=1}^{n}(n+k)=2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad (a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k}\right)=a^n-b^n$, *où a et b sont des réels non nuls*

f) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!$; g) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ $\left(Th.\ de\ CATALAN\right)$

Exercice 3

1) Linéariser $\sin^3 x$*. En déduire* $S_n=\sum_{k=0}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right)$

2) En remarquant que : $\sin x=\sin[(k+1)-kx]$.

En déduire la somme : $S_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(k\theta)\cos((k+1)\theta)}$

Télécharger à www.groupe-excellence.sn

Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433

Exercice 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2}}$.

a) Calculer S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, (1+u_k)^2 = 1 + \dfrac{1}{k^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

c) En déduire que $T_n = \dfrac{n(n+2)}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \dfrac{u_n}{2n+1}$, $x_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$.

a) Déterminer des réels a, b, c tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{2n+1} = \dfrac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k - \dfrac{1}{n+1} - 3 \right)$.

3) On pose : $y_1 = 1$ et $y_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^2 u_k^2}$ pour tout $n \geq 2$.

a) Exprimer y_n en fonction de w_n pour tout $n \geq 1$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{y_k} = 18 + 24 x_{2n+1} + \dfrac{6}{n+1}$.

Exercice 5

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Montrer que pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq 4$.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \quad , \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et déterminer une expression explicite de u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Télécharger à www.groupe-excellence.sn

Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433

Exercice 6

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n^2} \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$ *on a :* $0 < u_n < 1$.

b) Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et en déduire que* $u_n \geq \frac{1}{2}$

c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et calculer sa limite.*

2) Soit v *la suite de terme général :* $v_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ *on a :* $v_{n+1} = v_n^2$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ *:* $v_n = \dfrac{1}{3^{2^n}}$.

c) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ *:* $p_n = v_0.v_1.\cdots.v_n$ *. Calculer* p_n *puis calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{p_n}{v_{n+1}}\right)$.

3) Soit la suite S_n *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ *, on a :* $0 < 1-u_n < \dfrac{1}{1+u_0^2}(1-u_{n-1})$.

b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$ *,* $0 < 1-u_n < \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ *;* $1-\dfrac{5}{n}\left[1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right] \leq S_n \leq 1$ *. En déduire alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 7

1) Soit la fonction : $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

a) Etudier les variations de f *. Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x) = x$.

b) Montrer que si : $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ *alors* $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$.

2) Soit la suite réelle u *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}.$ *Etudier la monotonie de* u .

b) Montrer que u *est convergente et calculer sa limite.*

Télécharger à www.groupe-excellence.sn

Pour vos cours en ligne, contactez-nous au 781177433

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

a) Montrer que v est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n .

b) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) On pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^2 \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ n \le S_n \le 3n$.

b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$.

5) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* :\ r_n = \dfrac{S_n}{n}$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : nS_{n+1} - (n+1)S_n = nu_n^2 - S_n$.

b) En déduire que (r_n) est une suite croissante.

c) Montrer que (r_n) est une suite convergente.

6) Soit $n,\ p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > p$.

a) Montrer que $(n-p)u_p^2 \le S_n \le nu_{n-1}^2$. En déduire que : $\left(\dfrac{n-p}{n}\right)u_p^2 \le r_n \le u_{n-1}^2$.

b) Montrer que : $\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ u_p^2 \le l \le 3.$ En déduire la valeur de l .

Exercice 8

On considère la suite : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+3u_n}{2+u_n} \end{cases} \quad ; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \le u_n \le 2$.

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

3) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

a) Montrer que la suite v est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Soit la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = w_n + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $w_n = \dfrac{8}{3}\left(\left(\dfrac{1}{4}\right)^n - 1\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer alors la limite de la suite (w_n) .

Télécharger à www.groupe-excellence.sn