TS1 / Fonction ln et expo

Exercice 1

Calculer les limites suivantes de f au point x_0 :

a) $f(x) = \frac{xlnx}{x+1}$; $x_0 = +\infty$; b) $f(x) = \frac{ln\,x - 2}{2lnx + 1}$; $x_0 = +\infty$

c) $f(x) = \frac{ln(x+1)}{x^2}$; $x_0 \in \{+\infty\,;0\}$;

d) $f(x) = ln|x^2 - 4| - |x - 2|$; $x_0 \in \{-\infty\,;+\infty\}$

e) $f(x) = \frac{ln|1 - |x||}{x}$; $x_0 \in \{0; -\infty\,;+\infty\}$

f) $f(x) = \frac{ln(1 + x^2)}{x}$; $x_0 \in \{0; -\infty\,;+\infty\}$;

g) $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}$; $x_0 \in \{0\,;+\infty\}$

h) $f(x) = xln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$; $x_0 \in \{0; -\infty\,;+\infty\}$;

i) $f(x) = \frac{xlnx}{x - lnx}$; $x_0 \in \{+\infty\,;0\}$

j) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - |ln(x+1)|$; $x_0 \in \{-1\,;+\infty\}$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

a) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x+2}{x^2 ln\,x}$; b) $\lim\limits_{x\to0^+} 2xln(x+\sqrt{x})$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{xlnx}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$; e) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{ln(3x+1)}{2x}$; f) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x^x - 1}{ln(x+1)}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x+1} ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$; h) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (x^2 - 1)ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$

i) $\lim\limits_{x\to2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$; j) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$;

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$; m) $\lim\limits_{x\to0^+} (1+x)^{\ln x}$; n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$

o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$; p) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$; q) $\lim\limits_{x\to0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$

r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$; s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{(x+1)}}$; t) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

Exercice 3

Etudier les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{-x^2+1}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{5}}}$ c. $\lim\limits_{x\to0} x^{\frac{1}{x}}$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

e. $\lim\limits_{x\to0} \frac{1+\ln x}{x^2}$ f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x^2}$ g. $\lim\limits_{x\to+1^-} \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$

h. $\lim\limits_{x\to-1} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ i. $\lim\limits_{x\to0} (\sin x^2)^{\frac{1}{x}}$ j. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ $(\alpha>0;\ \beta>0)$ l. $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha|\ln x|^\beta$ $(\alpha>0;\ \beta>0)$

m. $\lim\limits_{x\to0} \tan(x)e^{\frac{1}{\tan x}}$ n. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$ o. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{5}{6}}+2x}$

Exercice 4

I. On considère la fonction f_2 définie sur $]0;+\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

   c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2. Dans l'annexe ci-joint on a tracé, dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$, on considère les points M et M_2 de même abscisses x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifie que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisse respective 2 , $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

c) Trace la courbe (Γ) dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.

II. 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0;\,+\infty[$ par $f_k(x) = x^k - lnx$

a) Déterminer $f_k{}'$ la fonction dérivée de f_k.

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+lnk}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, lnx)$.
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$

a) Vérifie que $lnu_k = -\frac{lnk}{k}$ et en déduire que la limite de (u_k).

b) Soit $A(1\,,0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k; f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Exercice 5

Le plan orienté P est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique 4cm) n étant un entier naturel non nul. On s'intéresse aux solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x : $(E_n) : x + e^x - n = 0$

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + e^x - n$

On note C_{f_n} la courbe représentative de f_n dans le repère.

Partie A

1. a) Vérifie que pour tout réel x est strictement positif, $lnx - x < 0$.

   b) Montrer que l'équation (E_n) possède une solution unique u_n et que u_n appartient à l'intervalle $\left]ln\left(\frac{n}{2}\right)\,;\,lnn\right]$.

c) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{lnn}$

d) Calculer u_1

2. Dans cette question et celles qui suivent, on pourra au besoin se servir de l'équivalence suivante : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x + e^x - n = 0 \Leftrightarrow e^x = n - x$

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

b) A l'aide des variations de f_n, étudier les variations de la suite (u_n).

c) On note A_n l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = u_{n+1}$, $x = u_n$, l'axe des abscisses et la courbe C_{f_n}.

Montrer que : $A_n = \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 - u_n^2) - (n+1)(u_{n+1} - u_n) + 1$

Vérifie que pour tout x appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités u_{n+1} et u_n, on a : $0 \le f_n(x) \le 1$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$

3. a) En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, vérifie qu'il existe une fonction ε définie dans un intervalle ouvert contenant 0 telle que pour tout h dans cet intervalle, on ait :

$ln(h+1) = h + h\varepsilon(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

b) On pose $\alpha_n = \frac{u_n}{lnn} - 1$ c'est-à-dire que $u_n = lnn + \alpha_n lnn$.

Quelle est la limite de (α_n) ?

c) Déterminer une suite (y_n) telle que $u_n = lnn + ln(1 + y_n)$

Déduire alors la question (3.a) qu'il existe une suite β_n ayant pour limite 0 telle que : $u_n = lnn - \frac{u_n}{lnn} + \beta_n \frac{lnn}{n}$

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à u_2.

D'après la première partie, u_2 appartient à l'intervalle $[0\,;ln2]$.

On note g l'application de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall x \in [0;1], g(x) = ln(2-x)$ et on pose : $b = \frac{2}{3}ln2$ et $a = g(b)$.

1. a) Montrer que u_2 est le seul point fixe de g et que u_2 appartient à l'intervalle $I = [a\,;b]$.

b) Prouver que g est dérivable sur I et $\forall x \in I, |g'(x)| \le |g(b)|$.

Enoncé clairement le théorème qui permet d'en déduire que

$\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq |g'(b)||x - y|$

c) Vérifier que $g(I) \subset I$.

2. On pose, $a_0 = b$ et pour tout entier naturel , $a_{n+1} = g(a_n)$.
   a) Démontrer que la suite (a_n) est bien définie (c'est-à-dire démontrer que pour tout entier naturel n, a_n appartient à l'ensemble de définition de g) et pour tout entier naturel n, a_n appartient à I.
   b) Démontrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - u_2| \leq |g'(b)|^n(b - a)$
   En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.
   c) Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que (a_n) soit une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} ?
3. Représenter sur un même graphique, restrictions de g, f_2 à l'intervalle $[0\,;1]$, le domaine A_2, la droite d'équation $y = x$ les points de coordonnées respectives $(a, 0), (u_2, 0), (u_3, 0)$.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm)

Partie A : Soit f la fonction définie sur $[0\,;1[$ par : $f(x) = 1 - x^2 + ln(1 - x)$

1. a) Etudier la fonction f et représenter graphiquement sa courbe (C_f) dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

   Vérifie que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\,, \beta\right]$ avec $\beta = 1 - \frac{1}{e}$

2. a) Soient p et q les fonctions définies sur $\left[\frac{1}{2}, \beta\right]$ respectivement par :

   $p(x) = |f'(x)|$ et $q(x) = |f''(x)|$.

   Etudier les variations de p et q et dresser leurs tableaux de variations.

   b) En déduire que $\forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, \beta\right]$, $\frac{|f''(x)|}{|f'(y)|} \leq M$ avec $M = \frac{e^2+2}{3}$.

3. Soit t un élément de $]\alpha\,,1[$.

   a) Calculer $\int_\alpha^t ln(1 - x)\,dx$

   b) Calculer $\int_\alpha^t f(x)dx$ et montrer que $\int_\alpha^t f(x)dx = p(\alpha)$ où p est un polynôme à déterminer.

Partie B : Les questions 1. et 2. Sont indépendantes.

1. *Soient* u *et* v *deux réels tels que* $u < v$.

   Soit h *une fonction définie sur intervalle ouvert contenant l'intervalle* $J = [u, v]$, *dérivable jusqu'à l'ordre 2 et ayant* u *comme unique zéro dans* J.

   On suppose que h *est négative sur* J *ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 et que* $\forall x \in J, h'(x) \neq 0$.

   On considère la fonction T *définie sur* J *par* $T(x) = x - \dfrac{h(x)}{h'(x)}$

   a) *Soit* a *un élément de* J *et* A *le point d'abscisse* a *de la courbe* (C_h) *représentative de* h *dans le repère* $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

      Vérifie que $T(a)$ *est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à* (C_h) *en* A *avec l'axe des abscisses.*

      Montrer que T *est dérivable en* J *et monotone ; dresser son tableau de variation. En déduire que* $T(J) \subset J$.

      On pose $x_0 = v$ *et pour tout entier naturel* n, $x_{n+1} = T(x_n)$

   b) *Montrer que la suite* (x_n) *est bien définie et bornée. Vérifier qu'elle est monotone, en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.*

2) *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$.

   Soit g *une fonction définie sur l'intervalle* $[a, b]$ *et deux fois dérivables.*

   Soit k *un réel fixé, on considère la fonction* G *définie sur* $[a, b]$ *par :*

   $\forall x \in [a, b], G(x) = g(a) - g(x) - (a - x)g'(x) - \dfrac{1}{2}k(a - x)^2$

   a) *Calculer* $G(a)$. *Déterminer* k *pour que* $G(b)$ *soit égal à* 0.

      Désormais k *prend cette valeur.*

   b) *En appliquant le théorème des accroissements finis à* G *dans l'intervalle* $[a, b]$, *montrer qu'il existe un réel* c *dans* $]a, b[$ *tel que* $G'(c) = 0$.

      En déduire que : $g(a) = g(b) + (a - b)g'(b) + \dfrac{1}{2}(a - b)^2 g''(c)$.

Partie C : Application à la fonction f.

1) a) *Démontrer que la fonction* f *satisfait dans l'intervalle* $[\alpha, \beta]$, *aux hypothèses faites sur la fonction* h *de la partie B.*

   On considère la suite (x_n) *définie par son premier terme* $x_0 = \beta$ *et pour tout entier naturel* n : $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel c_n dans $]\alpha, x_n[$ tel que : $f(a) = f(x_n) + (a - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(a - x_n)^2 f''(c_n)$.

c) En déduire que :

$$(x_{n+1} - \alpha) = (x_n - \alpha)^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \quad \text{et} \quad x_{n+1} - \alpha \leq \frac{M}{2}(x_n - \alpha)^2$$

2) Pour tout entier naturel n, on pose $\delta_n = \frac{M}{2}(x_n - \alpha)$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$\delta_n \leq \delta_0^{2^n} \leq \left(\frac{M}{4}\right)^{2^n} \text{(Remarque que } \delta_0 = \frac{M}{2}(\beta - \alpha) \leq \frac{M}{4}\text{)}$$

b) Déterminer un entier naturel n tels que , $x_n - \alpha$ soit inférieur à 10^{-5} et une valeur approchée de α à 10^{-5} près par excès.

Exercice 7

A. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C_f).

3) Soit λ un réel de $]0\,;1[$. On considère par S_λ l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

Calculer S_λ en fonction de λ et déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} S_\lambda$.

B. 1) Soit g_1 et g_2 les restrictions de f respectivement à chacun des intervalles $]0\,;1[$ et $[1; +\infty[$.

Montrer que g_1 réalise une bijection de $]0\,;1[$ sur un intervalle I que l'on déterminera et que g_2 réalise une bijection de $[1\,; +\infty[$ sur l'intervalle I.

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation $f(x) = e + \frac{1}{n}$ admet dans $]0; +\infty[$ exactement deux solutions notées α_n et β_n telle que $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul n, deux suites réelles (α_n) et (β_n) sont convergentes et déterminer leurs limites.

3) On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{x}\left(f(x) - \left(e + \frac{1}{n}\right)\right) & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On note (C_h) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

a) Montrer que h est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [0\,;+\infty[$.

4) Soit H la primitive de h sur $[0\,;+\infty[$ qui s'annule en 0.

a) Justifie que les fonctions $u\colon \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}}dt$ et $v\colon \mapsto 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ sont continues sur $[0\,;+\infty[$ et dérivables sur $]0\,;+\infty[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0, u(x) = v(x)$.

c) Donner l'expression de H(x) pour tout $x \in [0; = +\infty[$.

5) Soit $\mathcal{A}_n$ l'aire de la partie du plan limitée par (C_n), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta_n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n = 2 - \frac{2}{3}e$.

Exercice 8

I. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ et (C_φ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \varphi(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution α dans l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et une solution unique dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ et la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + lnx$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g des fonctions φ, f et g et la droite d'équation $y = x$.

1) Soit a un réel et un réel strictement positif.

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe (C_f) au point A d'abscisse a et par D_b la tangente à la courbe (C_g) au point B d'abscisse b ;

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b.

b) Montrer que : (Δ_a et D_b sont parallèles) si et seulement si $(b = e^{-a})$

Dans la suite on se propose que Δ_a et D_b sont parallèles, c'est-à-dire $b = e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si $\left(a \neq 0 \;\; et \;\; a = \frac{e^a}{e^a - 1}\right)$

b) En déduire que Δ_α est la tangente à la courbe (C_f) et à la courbe la (C_g) respectivement aux points $A(\alpha\,;f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha}; g(e^{-\alpha}))$. (étant la valeur définie dans I.2)

c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3) a) Construire dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), le point $A(\alpha\,;f(\alpha))$.

b) Vérifie que $e^{-\alpha} = f(-\alpha) - \alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha}\,;g(e^{-\alpha}))$.

c) Tracer Δ_α

Exercice 9

Partie A : Soit $f_n(x) = (2 - x)e^x - n$

1) a) Etudier les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudier le sens de variation de f_n

c) Dresser le tableau de variation de f_n

2) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions, une notée $\alpha_n \in]-\infty; 1[$ et $\beta_n \in]1; +\infty[$.

b) Montrer que : $e^{\alpha_n} - n\alpha_n = (e^{\alpha_n} - n)(\alpha_n - 1)$

De même montrer que : $e^{\beta_n} - n\beta_n = (e^{\beta_n} - n)(\beta_n - 1)$

c) En déduire le signe de $f_n(x)$ suivant x

Partie B

Soit U définie par $U(x) = e^x - nx$

1) *Etudier les limites de U en* $-\infty$ *et en* $+\infty$.
2) *Etudier le sens de variation de U.*
3) *Dresser le tableau de variation de U. En déduire le signe de U(x) sur IR.*

Partie C

On considère la fonction h_n *définie par :* $h_n(x) = \frac{e^x - n}{e^x - nx}$

1) *a) Quel est l'ensemble de définition* D_{h_n} *de* h_n?
   b) Déterminer les limites de h_n *sur* D_{h_n}
2) *Calculer* $h_n'(x)$. *En déduire le sens de variation de* h_n *sur* D_{h_n}.
3) *Montrer que* $h_n(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n - 1}$ *et* $h_n(\beta_n) = \frac{1}{\beta_n - 1}$.
   Dresser le tableau de variation de h_n *sur* D_{h_n}.
4) *On note les points* M_n *et* N_n *d'abscisses respectives* α_n *et* β_n.
   Montrer que lorsque n varie les points M_n *et* N_n *sont sur une courbe fixe* Γ *dont-on déterminera une équation.*
5) *Démontrer que la fonction* H_n *définie par :* $H_n(x) = ln(e^x - nx)$ *est une primitive de* h_n.

Partie D : Cas $n = 1$ *ou* $n = 2$

1) *Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression de* $h_2(x) - h_1(x)$
2) *En déduire la position relative des courbes* C_{h_1} *et* C_{h_2} *et montrer qu'elles se coupent en un points dont on précisera son ordonnée.*
3) *Prouver que* $\alpha_2 = 0$
4) *Construire* C_{h_1} , C_{h_2} *et* Γ.
   Prendre unité $2cm \times 5cm$; $\alpha_1 = -1{,}1$; $\beta_1 = -1{,}8$; $\beta_1 = -1{,}6$.
5) *Soit* λ *un réel strictement supérieur à 1.*
   a) *Calculer en* cm^2 *l'aire* $\mathcal{A}(\lambda)$ *du domaine du plan défini par* $1 \leq x \leq \lambda$ *et par* $h_1(x) \leq x \leq h_2(x)$
   b) *Calculer la limite de* $\mathcal{A}(\lambda)$ *quand tend vers* $+\infty$