

✧ VARIABLES ALEATOIRES ✧

Cellule de mathématiques

Classe : TS_2

Exercice 1 Une urne contient 5 boules dont 3 rouges, 2 blanches. On tire successivement 2 boules avec l'hypothèse suivante :

- Si la boule tirée est blanche, on la remet avant de faire le tirage suivant.
 - Si la 1^{ère} boule est rouge, on ne la remet pas et on procède au tirage suivant.
- On désigne par X la variable aléatoire : le nombre de boules rouges obtenues.

- 1 Définir la loi de probabilité de X ; $E(X)$; $V(X)$ et $\sigma(X)$.
- 2 Définir et représenter la fonction de répartition de X .

Exercice 2 Une urne contient 12 boules : 4 rouges et 8 noires.

- 1 On tire simultanément 4 boules. Soit X le nombre de boules rouges obtenues lors du tirage.
 - a Quelle est la probabilité d'obtenir 4 boules de la même couleur ?
 - b Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c Calculer son espérance mathématique.
- 2 On tire successivement 4 boules en remettant à chaque tirage la boule tirée dans l'urne. Soit Y le nombre de boules rouges tirées lors d'un événement.
 - a Déterminer la loi de probabilité de Y .
 - b Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et vérifier que $E(X) = E(Y)$.

Exercice 3 Une cible comprend deux parties désignées par 1 et 2. Un tireur lance une fléchette sur cette cible. Il atteint la partie 2 avec une probabilité $\frac{1}{6}$ et marque alors 2 points. Il atteint la partie 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et marque alors 1 point.

- 1 Quelle est la probabilité pour que le tireur manque la cible ?
- 2 Le tireur lance sa fléchette deux fois. Les deux lancers sont indépendants. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des points marqués.
 - a Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance mathématique et sa variance.
 - b Représenter graphiquement la fonction de répartition de X

Exercice 4 Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires indiscernables au toucher.

1 On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

- a Calculer la probabilité de l'événement A : "tirer au moins une boule noire"
- b Soit l'événement B : "obtenir deux boules de même couleur".
Montrer que $p(B) = \frac{7}{15}$
- c On répète cette expérience cinq fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage.
Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé exactement trois fois.

2 Dans cette question, on tire des boules de l'urne une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule blanche pour la première fois.

- Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience.
- a Justifier que les valeurs de X sont : 1; 2 et 3.
 - b Montrer que $p(X = 2) = \frac{4}{15}$
 - c Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 5 Dans un jeu de 32 cartes, on a 4 "couleurs" : Pique, Trèfle, Carreau et Cœur. Chaque couleur comprend 8 cartes dont un As.

- 1 On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
 A : " les 3 cartes sont des As"
 B : " il y a au moins 2 couleurs parmi ces 3 cartes "
 C : " il n'y a pas d'As parmi les 3 cartes "
- 2 On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes. Le nombre de coups tirés définit une variable aléatoire X . Déterminer :
 - a Les valeurs prises par X .
 - b La loi de probabilité de X et $E(X)$.

Exercice 6 On dispose de deux urnes :
 – Une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires.
 – Une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.
 Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne; on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

- 1 Montrer que la probabilité de l'événement E : " Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules " est égale à $0,46$.
- 2 On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches obtenues.
 - a Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b Le joueur doit verser $2,50F$ avant d'effectuer le tirage : il reçoit à l'issue du tirage $1F$ par boule blanche obtenue.
Le jeu est-il équitable ?
- 3 Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne sachant qu'on a tiré deux boules blanches.
- 4 On ne considère que l'urne U_1 , de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules. On nomme succès le tirage de deux boules blanches. On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne).
Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès sur les dix tirages.

Exercice 7

Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2.

Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1; 2; 3 et 4.

- 1 On choisit au hasard une urne puis un jeton dans cette urne (les choix sont supposés équiprobables).
 - a Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
 - b On a tiré un jeton portant le numéro 1.
Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1
- 2 On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
 - a Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
 - b Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.
Déterminer la loi de probabilité de S .
 - c Deux joueuses Mbeugué et Anouchka décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Mbeugué donne à Anouchka $100F$ et que dans le cas contraire, Mbeugué reçoit λF de Anouchka.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Mbeugué.
Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ , puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable.

Exercice 8 50 commerçants sénégalais ont séjourné en Chine. Cinq jours après leur retour au pays, un commerçant parmi eux, a été testé positif du virus **COVID-19**. Les autorités ont effectué des tests virologiques sur les autres commerçants. Sur 50 tests, sont revenus : 20 cas positifs symptomatiques ; 25 cas positifs asymptomatiques et 5 cas négatifs.

On note les événements suivants :

P_1 : " être positif symptomatique "

P_2 : " être positif asymptomatique "

N : " être négatif "

- 1 Calculer $P(P_1)$; $P(P_2)$ et $P(N)$.
- 2 Les autorités ont décidé de tester les membres des familles de ces commerçants. L'expérience a montré qu'une personne ne peut être contaminée que par un commerçant issu de sa famille.
On admet que si un commerçant est malade symptomatique, la probabilité qu'un membre de sa famille soit testé positif est $0,8$ et si un commerçant est malade asymptomatique, la probabilité qu'un membre de sa famille soit testé positif est $0,3$.
On note les événements après les tests sur les cas contacts :
 - S : " être sain "
 - $\bar{S}$: " être malade "**NB** : Tous les membres des familles des 50 commerçants ont été testés.
 - a Construire l'arbre pondéré associé.
 - b Donner $P(S/P_1)$ et $P(S/P_2)$.
 - c Calculer $P(S/N)$ et $P(\bar{S}/N)$.
- 4 Calculer $P(S)$, en déduire $P(\bar{S})$
- 5 On compte 10 jeunes testés positifs dont 3 sont asthmatiques ; 4 personnes âgées dont 2 sont diabétiques et 2 enfants dont 1 présentant une maladie grave. On décide d'interner 3 malades par jour.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de testés positifs internés présentant une maladie grave.
 - a Définir la loi de probabilité de X .
 - b Définir la fonction de répartition de X et la tracer.
 - c Calculer l'espérance mathématique de X , en déduire son écart type.
- 6 Pour suivre l'évolution du virus chez une personne âgée, on lui fait un test par jour pendant 5 jours.
Vu la complexité du virus, les résultats des tests quotidiens sont indépendants.
On suppose que la probabilité qu'un test revienne négatif chez une personne âgée est de $\frac{1}{4}$ et une personne âgée est déclarée guérie s'il obtient au moins 3 tests négatifs en 5 tests.
Quelle est la probabilité qu'une personne âgée soit déclarée guérie ?