TS1 : Fonctions ln et exp

Exercice 1

Calculer les limites suivantes de f au point x_0 :

a) $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$; $x_0 = +\infty$; b) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x+1} - |\ln(x+1)|$; $x_0 \in \{-1; +\infty\}$

c) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$; $x_0 \in \{+\infty; 0\}$; d) $f(x) = \frac{\ln|1-|x||}{x}$; $x_0 \in \{0; -\infty; +\infty\}$

e) $f(x) = \ln|x^2 - 4| - |x - 2|$; $x_0 \in \{-\infty; +\infty\}$; g) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{2 \ln x + 1}$; $x_0 = +\infty$

h) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$; $x_0 \in \{0; -\infty; +\infty\}$; i) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $x_0 \in \{0; +\infty\}$

j) $f(x) = x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$; $x_0 \in \{0; -\infty; +\infty\}$; k) $f(x) = \frac{x \ln x}{x - \ln x}$; $x_0 \in \{+\infty; 0\}$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$; f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln \left(\frac{x^3 + 4}{1 - x^2} \right)$; h) $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$; j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$;

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$; l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$; m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$; n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^x$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 5}{x^2 + 2} \right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$; p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + 1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x+1}}$; q) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$; s) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{(x+1)}}$; t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\ln(x^2 + 1)}}{1 + e^{x-3}}$

Exercice 3

Partie A On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{\ln^2(x)} - \frac{1}{\ln x} , & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1) Etudier les limites aux bornes de D_g

- 2) Dresser le tableau de variation de g
- 3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Partie B On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -\frac{x}{\ln(x)} & , \text{ si } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0.
b) En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 0.
- 2) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition D_f .
- 3) a) Comparer $f'(x)$ et $g(x)$.
b) En déduire les variations de f et son tableau de variation.
- 4) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse e^2 .
- 5) Soit M le point de (T) d'abscisse x et N le point de (C) de même abscisse x
On pose : $\varphi(x) = \overline{MN}$.
a) Montrer que : $\varphi(x) = f(x) + \frac{x+e^2}{4}$.
b) Dresser le tableau de variation de $\varphi''(x)$ puis le signe de $\varphi'(x)$ sur $]1; +\infty[$
c) En déduire le signe de φ sur $]1; +\infty[$ et la position de (C) par rapport à (T) pour les d'abscisses $x > 1$.
- 6) Tracer la courbe (C) et la droite (T).

Exercice 4

I. On considère la fonction f_2 définie sur $]0; +\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$

On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
c) Dresser le tableau de variation de f_2 .
2. Dans l'annexe ci-joint on a tracé, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (L) de la fonction $\ln$ et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$, on considère les points M et M_2 de même abscisses x et appartenant respectivement à (L) et (C) . Vérifie que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisse respectivement 2 , $\frac{1}{e}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

c) Trace la courbe (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

II. 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$

a) Déterminer f_k' la fonction dérivée de f_k .

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+\ln k}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.

Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$

a) Vérifie que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire que la limite de (u_k) .

b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k; f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.

Exercice 5

I. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ et (C_φ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une unique solution β dans l'intervalle $] -\infty; 0[$ et une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$ et la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - x + \ln x$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g des fonctions φ , f et g et la droite d'équation $y = x$.

1) Soit a un réel et un réel strictement positif.

On désigne par Δ_a la tangente à la courbe (C_f) au point A d'abscisse a et par $\mathcal{D}_b$ la tangente à la courbe (C_g) au point B d'abscisse b ;

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de $\mathcal{D}_b$.

b) Montrer que : (Δ_a et $\mathcal{D}_b$ sont parallèles) si et seulement si ($b = e^{-a}$)

Dans la suite on se propose que Δ_a et $\mathcal{D}_b$ sont parallèles, c'est-à-dire $b = e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et $\mathcal{D}_b$ sont confondues) si et seulement si

$$\left(a \neq 0 \text{ et } a = \frac{e^a}{e^a - 1} \right)$$

b) En déduire que Δ_a est la tangente à la courbe (C_f) et à la courbe la (C_g) respectivement aux points $A(\alpha ; f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha} ; g(e^{-\alpha}))$. (α étant la valeur définie dans I.2)

c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3) a) Construire dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), le point $A(\alpha ; f(\alpha))$.

b) Vérifie que $e^{-\alpha} = f(-\alpha) - \alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha} ; g(e^{-\alpha}))$.

c) Tracer Δ_a

Exercice 6

A/ On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle

$$I = \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ par : } g(x) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$$

1° Démontrer que pour tout t de I on a : $g'(t) = -\frac{t^3}{1+t}$

2° Déduire de 1 que pour tout t de I , on a :

$$a) -2t^3 \leq g'(t) \leq 0, \text{ si } t \geq 0 \text{ et } 0 \leq g'(t) \leq -2t^3, \text{ si } -\frac{1}{2} \leq t \leq 0$$

$$b) \text{ Démontrer que pour tout } x \text{ de } I, \text{ on a : } -\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0$$

B/ Soit f la fonction numérique définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère

orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm)

1°.a) Vérifier que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$: $f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$

b) En utilisant l'inégalité trouver en A.2 démontrer que f est continue et dérivable en 0 et déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

2° Soit h la fonction définie sur $] - 1; +\infty[$ par : $h(x) = -\frac{x^2+2x}{1+x} + 2\ln(1+x)$

a) Étudier le sens de variation de h .

b) Calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur $] - 1; +\infty[$

c) Démontrer que pour tout x appartenant à $] - 1; 0[\cup] 0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$

d) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

3° Soit ψ la restriction de f sur $] - 1; 0]$.

Justifier que ψ est bijective de $] - 1; 0]$ vers un intervalle K à préciser.

ψ^{-1} est-elle dérivable en $\frac{1}{2}$? Si oui calculer $(\psi^{-1})'(\frac{1}{2})$

4° Construire la courbe (C) et la tangente (T). Préciser les asymptotes à (C).

C/ 1° a) Démontrer que la fonction ϕ définie sur $] - 1; +\infty[$, par :

$\phi(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans

$] - 1; +\infty[$ et que $\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 1$.

2° a) Démontrer que : $\forall x \geq 0$; $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$

b) Démontrer alors que :

$\forall x \geq 0$; $-\frac{1}{1+x} \leq f'(x) \leq 0$, puis $\forall x \in [\frac{1}{4}, 1]$ ≥ 0 ; $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$

c) Démontrer que si $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ alors $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$

3° On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ par : $v_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4} \leq v_n \leq 1$

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \alpha| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

c) Déterminer un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, v_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 7

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x + 2)e^{-\frac{2}{x}}; \quad \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en zéro.
 b) Montrer que f est dérivable à droite en zéro.
 c) Montrer que f est une fonction croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 2) a) Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b) Montrer que $(\forall t \geq 0); 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$.
 En déduire que $(\forall x > 0); -\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$.
 c) En déduire que (C_f) admet une asymptote (Δ) qu'on déterminera.
- 3) Trace la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B

Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}; \quad \forall x > 0; n \in \mathbb{N}^* \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction f_n est dérivable à droite en zéro.
- 2) Etudier les variations de que la fonction f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- 3) a) Montrer que :
 $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ il existe un unique $a_n \in]0, +\infty[: f_n(a_n) = \frac{2}{n}$
 b) Montrer que : $\forall x > 0, (\forall n \in \mathbb{N}^*) : f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$
 c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, on pose a sa limite.
- 4) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; na_n = 2e^{\left(\frac{2}{a_n}\right)} - 2$.
 b) En admettant que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, montrer que $a = 0$